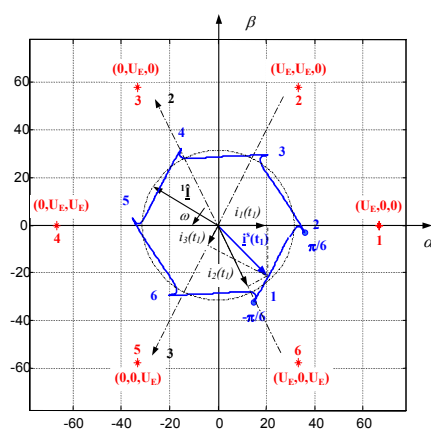


Electronique de puissance

Chapitre 4 PHASEURS SPATIAUX



T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

4. PHASEURS SPATIAUX	1
4.1 INTRODUCTION.....	1
4.2 DÉFINITION DES PHASEURS SPATIAUX	3
4.2.1 <i>Définition</i>	3
4.2.2 <i>Composantes des phaseurs spatiaux</i>	5
4.2.3 <i>Composante homopolaire</i>	7
4.2.4 <i>Reconstitution des grandeurs triphasées</i>	7
4.2.5 <i>Définition de la puissance apparente</i>	9
4.2.6 <i>Transformation de coordonnées</i>	12
4.3 TRANSFORMATION DIRECTE	14
4.4 EXEMPLE DE PHASEURS SPATIAUX EN RÉGIME STATIONNAIRE	15
4.4.1 <i>Régime stationnaire sinusoïdal</i>	17
4.4.2 <i>Régime stationnaire rectangulaire</i>	19
4.4.3 <i>Régime stationnaire triangulaire</i>	21
4.4.4 <i>Transformation inverse</i>	23
4.5 PHASEURS SPATIAUX APPLIQUÉS AUX CIRCUITS TRIPHASÉS	24
4.5.1 <i>Circuit équivalent pour les phaseurs spatiaux</i>	25
4.5.2 <i>Circuit équivalent pour les composantes homopolaires</i>	27
4.5.3 <i>Transformation de coordonnées</i>	28
4.6 PHASEURS SPATIAUX EN RÉGIME TRANSITOIRE.....	30
4.6.1 <i>Généralités</i>	30
4.6.2 <i>Structure de la charge</i>	30
4.6.3 <i>Solution analytique de l'équation différentielle</i>	32
4.6.4 <i>Transformation de coordonnées</i>	35
4.6.5 <i>Trajectoire et allure temporelle dans le système de coordonnées fixe</i>	35
4.6.6 <i>Reconstitution des courants de phase</i>	36

Bibliographie

4. PHASEURS SPATIAUX

4.1 INTRODUCTION

Les systèmes électroniques de puissance sont presque toujours liés à des circuits triphasés, soit au niveau réseau d'alimentation, soit au niveau de la charge (moteur synchrone ou asynchrone par exemple). Pour la description des phénomènes stationnaires (qui sont le plus souvent non-sinusoidaux) et transitoires, on fait appel à des phaseurs spatiaux. Ces derniers sont donc amplement utilisés pour la modélisation des convertisseurs statiques. Ces mêmes phaseurs spatiaux se prêtent particulièrement bien au traitement de circuits de réglage triphasés. Ce sont aussi des grandeurs complexes, mais qui représentent de manière plus générale des phénomènes stationnaires et transitoires dans les circuits triphasés. Les phaseurs spatiaux peuvent être soumis à une transformation de coordonnées, ce qui conduit souvent à un traitement simplifié.

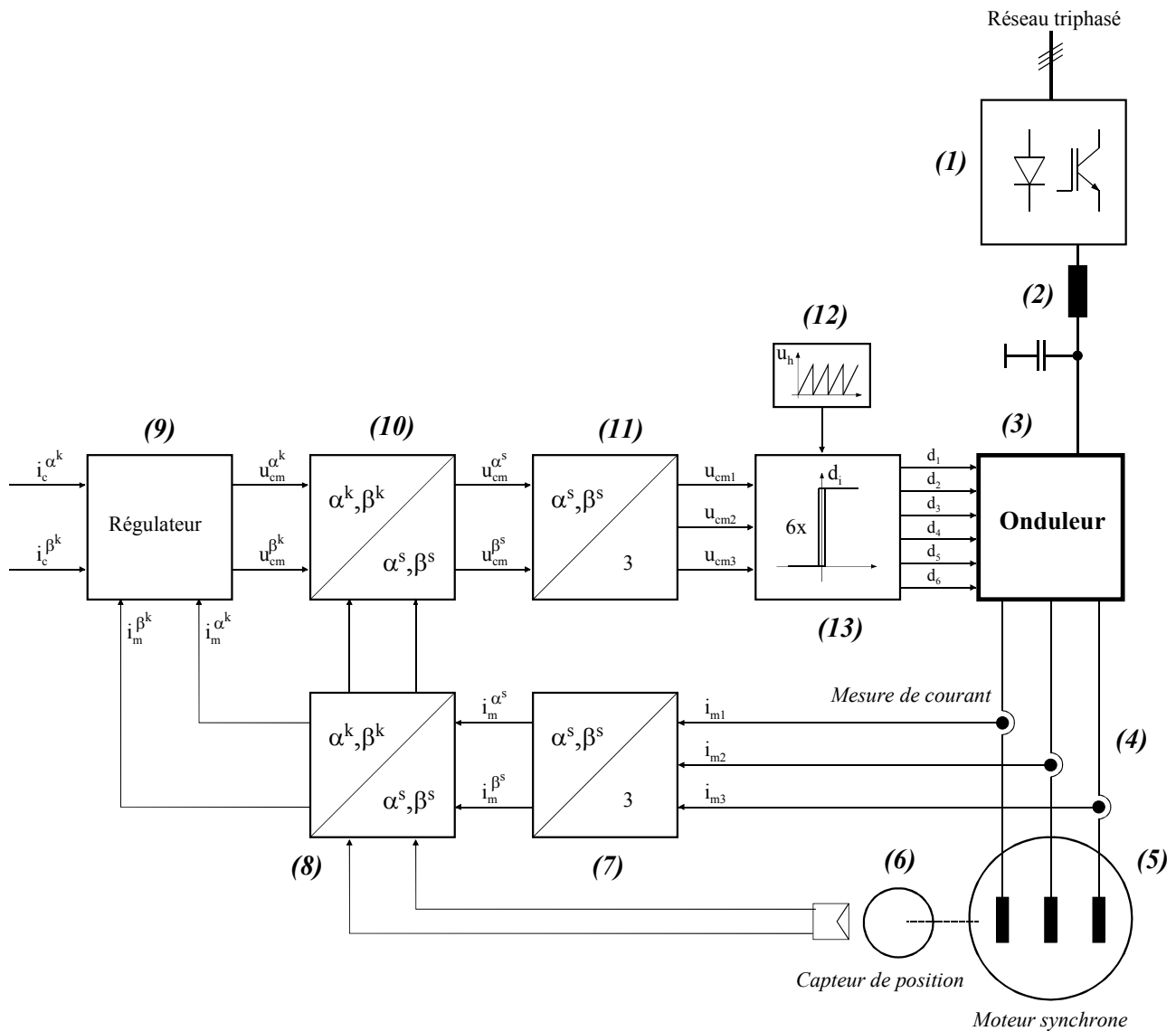


Figure 4-1 : Exemple d'asservissement de couple d'un moteur synchrone à aimants permanents

La Figure 4-1 illustre un cas classique de l'utilisation des phaseurs spatiaux pour l'asservissement du couple (courant) d'un moteur synchrone à aimants permanents. On peut séparer les divers blocs en trois parties distinctes :

1. Électronique de puissance : blocs (1), (2) et (3).

1.1 Bloc (1)

Ce bloc représente le dispositif électronique permettant de transformer le réseau alternatif triphasé en une tension continue avec possibilité de travailler dans les quatre quadrants.

1.2 Bloc (2)

Après redressement la tension continue ainsi obtenue est filtrée afin d'éviter la génération d'harmoniques de rang élevé sur le réseau alternatif.

1.3 Bloc (3)

Ce bloc n'est rien d'autre que la partie onduleur (à trois branches) permettant la transformation de la source de tension continue en une source de tension triphasée alternative dont il est possible de contrôler la tension de sortie ainsi que sa fréquence.

2. Charge et système de mesure : bloc (4), (5) et (6).

2.1 Bloc (4)

Dans le cas de l'asservissement du couple (courant) d'un moteur synchrone, il est nécessaire de mesurer le courant dans chaque phase. En général, pour des systèmes symétriques, le courant dans la troisième phase peut être déduit du courant dans les deux autres phases.

2.2 Bloc (5)

Ce bloc représente la charge sous la forme, c'est un exemple, d'un moteur synchrone à aimants permanents.

2.3 Bloc (6)

A un moteur du type défini par le bloc (5), il est nécessaire d'y adjoindre un capteur de position permettant de connaître en tout temps la position relative rotor – stator.

3. Électronique de commande : blocs (12) et (13).

3.1 Bloc (12)

Que la commande soit analogique ou numérique, le principe reste le même.

Comme pour tout modulateur PWM, il est nécessaire de comparer un signal de commande à un signal de référence sous la forme d'un triangle ou d'une dent de scie. Le résultat de cette comparaison est un signal rectangulaire de fréquence fixe mais de rapport cyclique variable.

3.2 Bloc (13)

Ce bloc correspond à la comparaison du signal de référence du bloc (12) avec chaque tension de commande provenant du calculateur de processus, ou de l'électronique analogique d'asservissement. La sortie fournit les six commandes d'ouverture / fermeture des contacteurs de puissance, ceci en tenant compte du temps d'antiveuchement propre au choix de la technologie des composants de puissance sélectionnés.

4. L'asservissement (7), (8), (9), (10) et (11).

4.1 Bloc (7)

Correspond à la transformation de coordonnées permettant de passer du système triphasé à un phaseur spatial complexe dont le référentiel est fixe (par exemple stator du moteur synchrone).

4.2 Bloc (8)

Correspond à la transformation de coordonnées permettant de passer du phaseur spatial complexe dont le référentiel est fixe à un référentiel tournant à la pulsation électrique du moteur (dépend de la vitesse de rotation du moteur et du nombre de paires) de pôles.

4.3 Bloc (9)

Le régulateur est un organe analogue ou numérique permettant d'exécuter l'algorithme de réglage propre à l'application. Il s'agit donc soit d'un calculateur, soit d'une carte analogique. Vu la complexité du système et les progrès technologiques en matière de vitesse d'exécution, en général les algorithmes de calcul des blocs (7) à (13) sont implantés dans un calculateur numérique.

4.4 Bloc (10)

Après traitement par le régulateur, les sorties de ce dernier, correspondant à un référentiel tournant selon la définition du point 4.2, sont converties afin d'être compatibles au phaseur spatial lié à un référentiel fixe.

4.5 Bloc (11)

Des composantes du vecteur spatial $\{u_\alpha^s, u_\beta^s\}$, il est nécessaire de déduire les tensions de phase $\{u_1, u_2, u_3\}$ puis de branche $\{u_{10}, u_{20}, u_{30}\}$ (moyenne glissante sur une période de pulsation) et enfin d'en déduire les grandeurs de commande $\{u_{cm1}, u_{cm2}, u_{cm3}\}$ qui définissent les temps d'enclenchement et de déclenchement des contacteurs statiques de chaque de branche de l'onduleur.

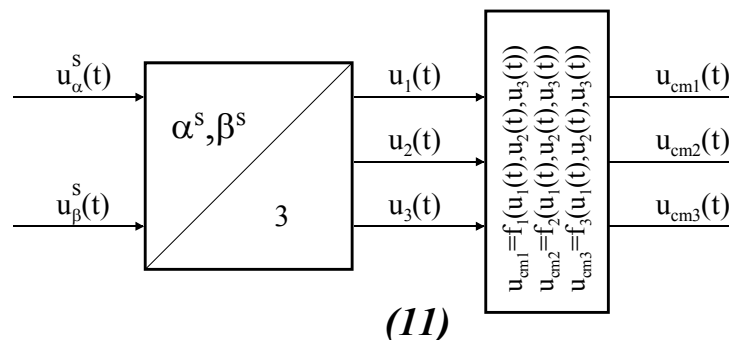


Figure 4-2 : Transformation du phaseur spatial (référence fixe) aux tensions de branches

4.2 DÉFINITION DES PHASEURS SPATIAUX

4.2.1 Définition

Pour les systèmes triphasés symétriques, les variables d'états ($\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3\}$, ...) ne sont pas linéairement indépendantes. IL est donc possible de transformer ce système en un système biphasé de représentation équivalente. Sous forme matricielle, cette transformation s'exprime sous la forme suivante

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \begin{bmatrix} u_\alpha^s(t) \\ u_\beta^s(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi/3) & \cos(4\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \sin(4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad 4.1$$

Le phaseur spatial de tension est également représenté de manière complexe sous la forme

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = u_\alpha^s(t) + j \cdot u_\beta^s(t) \quad 4.2$$

ou encore

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \frac{2}{3} \cdot (u_1(t) + \underline{\mathbf{a}} \cdot u_2(t) + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_3(t)) \quad 4.3$$

avec

$$\underline{\mathbf{a}} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\mathbf{a}}^2 = e^{j \cdot \frac{4\pi}{3}} = \underline{\mathbf{a}}^* = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4.4$$

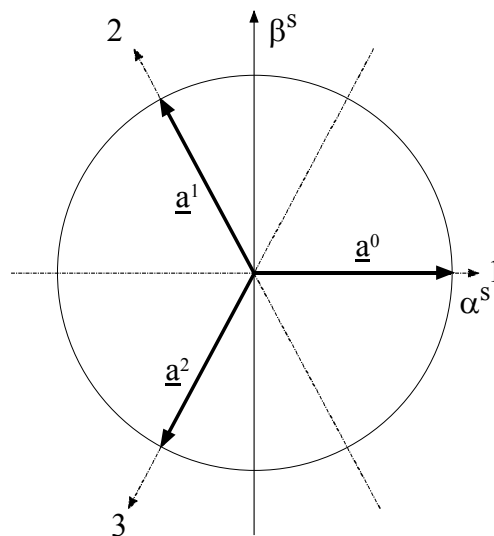


Figure 4-3 : Représentation vectorielle de $\underline{\mathbf{a}}^0$, $\underline{\mathbf{a}}^1$ et $\underline{\mathbf{a}}^2$

Les Figure 4-4 et Figure 4-5 montrent la construction du phaseur spatial d'un système triphasé en régime stationnaire sinusoïdal. Les valeurs instantanées aux temps t_0 et t_1 sont reportées sur trois axes déphasés d'un angle de $2\pi/3$. Par addition géométrique, on trace $3\underline{\mathbf{u}}^s/2$ et le phaseur spatial $\underline{\mathbf{u}}^s$.

L'indice supérieur s indique que ces grandeurs sont exprimées dans le système de coordonnées fixe (par rapport au stator d'une machine triphasée par exemple). Cette distinction est importante puisque les phaseurs spatiaux peuvent être soumis à une transformation de coordonnées.

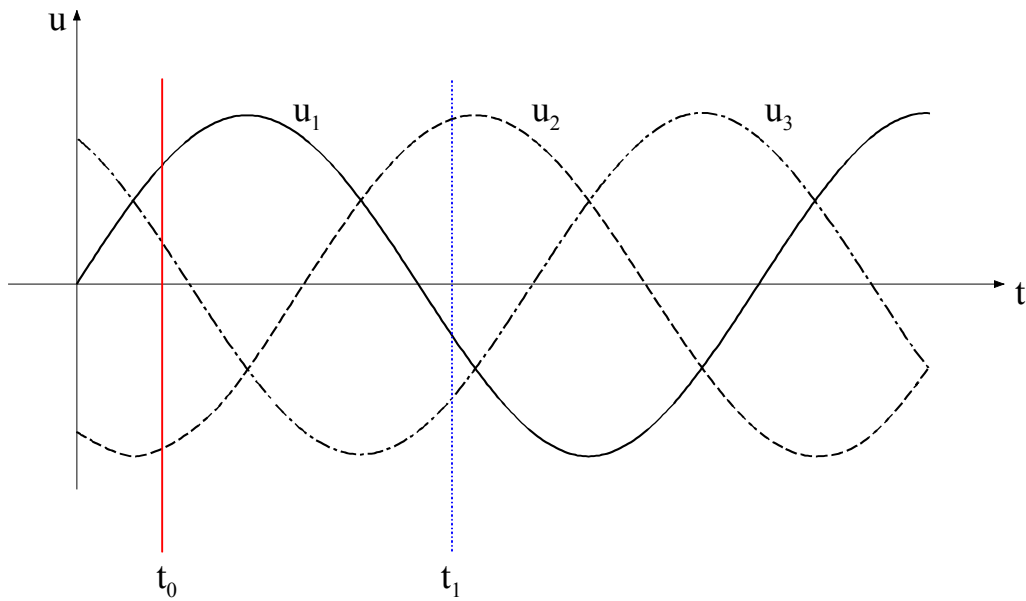
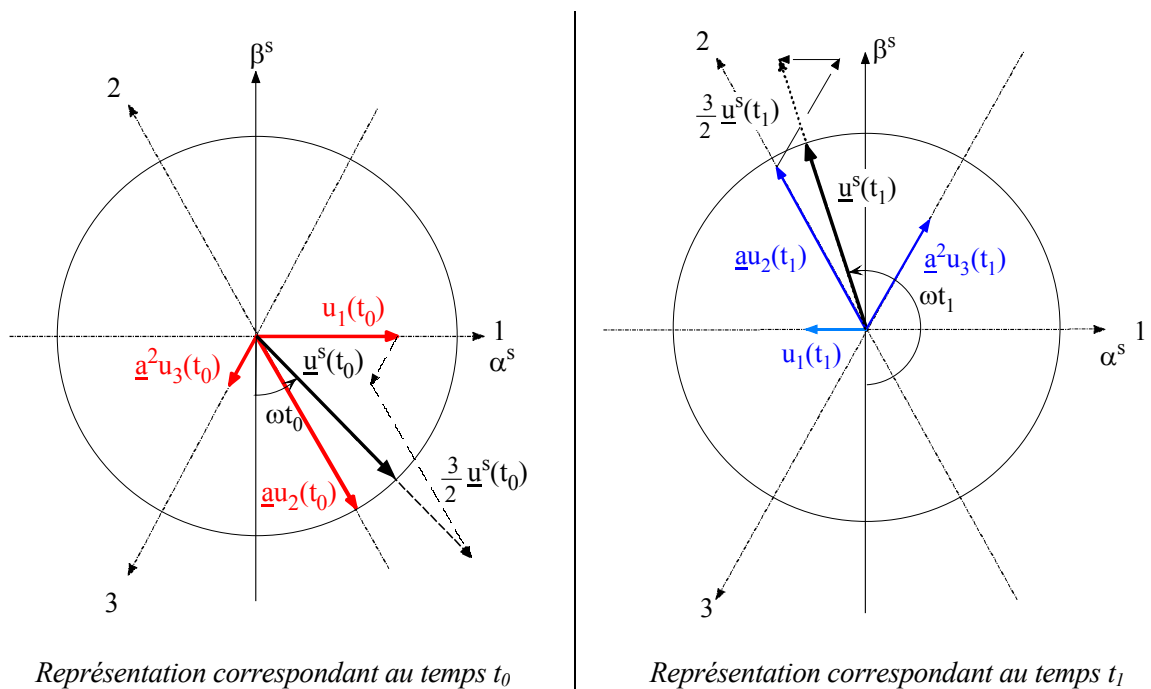


Figure 4-4 : Représentation temporelle d'un système triphasé symétrique



Représentation correspondant au temps t_0

Représentation correspondant au temps t_1

Figure 4-5 : Représentation vectorielle du phaseur de tension pour un système triphasé symétrique

4.2.2 Composantes des phaseurs spatiaux

Un phaseur spatial \underline{u}^s peut-être exprimé soit en coordonnées polaires

$$\underline{u}^s(t) = u \cdot e^{j\rho_s(t)} \tag{4.5}$$

soit en coordonnées cartésiennes

$$\underline{u}^s(t) = u_\alpha^s(t) + j \cdot u_\beta^s(t) \quad 4.6$$

Dans le premier cas, l'angle ρ_s est en général variable en fonction du temps. Par contre, le module u reste constant pour un phénomène stationnaire sinusoïdal. Sa valeur correspond à la valeur de crête des tensions de phases (tensions simples). Lors de phénomènes non sinusoïdaux ou transitoires, le module u varie en fonction du temps.

Dans le deuxième cas, les composantes $u_\alpha^s(t)$ et $u_\beta^s(t)$ correspondent respectivement à la valeur réelle et imaginaire du phaseur spatial $\underline{u}^s(t)$.

Les composantes $u_\alpha^s(t)$ et $u_\beta^s(t)$ peuvent être exprimées directement à l'aide des trois tensions de phases $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$. De la relation 4.3, on obtient après décomposition en valeur réelle et imaginaire

$$u_\alpha^s(t) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) \quad 4.7$$

$$u_\beta^s(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_2(t) - u_3(t)) \quad 4.8$$

Dans les circuits triphasés symétriques, il existe la condition

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0 \quad 4.9$$

même en régime transitoire. L'expression pour $u_\alpha^s(t)$ se simplifie et on a

$$u_\alpha^s(t) = u_1(t) . \quad 4.10$$

La composante $u_\alpha^s(t)$ est égale à la tension de phase $u_1(t)$ et la composante $u_\beta^s(t)$ correspond, au facteur $1/\sqrt{3}$ près à la valeur instantanée de la tension composée entre les phases 2 et 3. On peut montrer que le second terme de la relation 4.8 a pour module une valeur identique à $u_1(t)$ mais à une phase décalée de -90° par rapport à l'axe supportant u_1 .

En régime stationnaire sinusoïdal, ces composantes varient sinusoïdalement en fonction du temps avec une amplitude égale à celle des tensions de phases.

En effet les composantes $u_\alpha^s(t)$ et $u_\beta^s(t)$ peuvent être exprimées directement à l'aide des trois tensions de phases $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$. A l'aide de la relation 4.3, et après décomposition en valeurs réelle et imaginaire, on obtient

$$\underline{u}^s(t) = u_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot j \cdot (u_2(t) - u_3(t)) \quad 4.11$$

or pour un système symétrique et sinusoïdal, on a

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ u_2(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3}) \\ u_3(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \frac{\pi}{3}) \end{aligned} \quad 4.12$$

et par conséquent

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot j \cdot (\hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3}) - \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \frac{\pi}{3})) \quad 4.13$$

Dans la partie imaginaire on a la relation trigonométrique suivante

$$\cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3}) - \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \frac{\pi}{3}) = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad 4.14$$

par conséquent, la relation 4.13 devient

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \hat{U} \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad 4.15$$

ou en coordonnées polaires

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad 4.16$$

Comme le montre la Figure 4-6, il suffit de projeter le phaseur spatial $\underline{\mathbf{u}}^s$ sur les trois axes 1, 2, 3 pour obtenir les tensions de phases $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$

4.2.3 Composante homopolaire

Lorsque le point neutre n'est pas flottant dans un circuit triphasé ou pour des tensions non sinusoïdales, il est possible que la relation 4.9 ne soit pas vérifiée. Dans un tel cas, il existe une composante homopolaire définie par

$$u_0(t) = \frac{1}{3} \cdot (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)) \quad 4.17$$

La composante u_α^s devient, à l'aide des relations 4.7 et 4.17

$$u_\alpha^s(t) = u_1(t) - u_0(t) \quad 4.18$$

4.2.4 Reconstitution des grandeurs triphasées

A partir du phaseur spatial $\underline{\mathbf{u}}^s$, il est possible de reconstituer les valeurs instantanées des grandeurs triphasées. Cette transformation inverse, sous forme matricielle prend la forme suivante

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ \cos(4\pi/3) & \sin(4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha^s(t) \\ u_\beta^s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_0(t) \\ u_0(t) \end{bmatrix} \quad 4.19$$

Lorsqu'il y a une composante homopolaire, cette dernière doit être ajoutée à chaque tension de phase reconstituée. Cette opération conduit aux relations analytiques 4.20.

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \Re\{\underline{\mathbf{u}}^s(t)\} + u_0(t) \\
 u_2(t) &= \Re\{\underline{\mathbf{a}}^{-1} \underline{\mathbf{u}}^s(t)\} + u_0(t) \\
 u_3(t) &= \Re\{\underline{\mathbf{a}}^{-2} \underline{\mathbf{u}}^s(t)\} + u_0(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

En effet, sachant que

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{a}}^{-1} &= e^{-j2\pi/3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \underline{\mathbf{a}}^{-2} &= e^{-j4\pi/3} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

on peut écrire pour la première ligne de 4.20

$$\begin{aligned}
 \Re\{\underline{\mathbf{u}}^s(t)\} &= \Re\left\{\frac{2}{3} \cdot (u_1(t) + \underline{\mathbf{a}} \cdot u_2(t) + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_3(t))\right\} \\
 &= \Re\left\{\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) + j \cdot \sqrt{3} \cdot (u_2(t) - u_3(t))\right\} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) = u_1(t) - u_0(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

puis pour la deuxième ligne de 4.20

$$\begin{aligned}
 \Re\{\underline{\mathbf{a}}^{-1} \underline{\mathbf{u}}^s(t)\} &= \Re\left\{\frac{2}{3} \cdot (\underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_1(t) + u_2(t) + \underline{\mathbf{a}} \cdot u_3(t))\right\} \\
 &= \Re\left\{\frac{1}{3} \cdot (-u_1(t) + 2 \cdot u_2(t) - u_3(t)) + j \cdot \sqrt{3} \cdot (u_3(t) - u_1(t))\right\} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (-u_1(t) + 2 \cdot u_2(t) - u_3(t)) = u_2(t) - u_0(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

et enfin pour la troisième ligne de 4.20

$$\begin{aligned}
 \Re\{\underline{\mathbf{a}}^{-2} \underline{\mathbf{u}}^s(t)\} &= \Re\left\{\frac{2}{3} \cdot (\underline{\mathbf{a}}^{-2} \cdot u_1(t) + \underline{\mathbf{a}}^{-1} \cdot u_2(t) + u_3(t))\right\} \\
 &= \Re\left\{\frac{2}{3} \cdot (\underline{\mathbf{a}} \cdot u_1(t) + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_2(t) + u_3(t))\right\} \\
 &= \Re\left\{\frac{1}{3} \cdot (-u_1(t) - u_2(t) + 2 \cdot u_3(t)) + j \cdot \sqrt{3} \cdot (u_1(t) - u_2(t))\right\} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (-u_1(t) - u_2(t) - 2 \cdot u_3(t)) = u_3(t) - u_0(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Si le phaseur spatial $\underline{\mathbf{u}}^s$ est exprimée par les composantes u_α^s et u_β^s , on trouve

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= u_\alpha^s(t) + u_0(t) \\
 u_2(t) &= \cos(2\pi/3) \cdot u_\alpha^s(t) + \sin(2\pi/3) \cdot u_\beta^s(t) + u_0(t) = -\frac{1}{2} \cdot u_\alpha^s(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} u_\beta^s(t) + u_0(t) \\
 u_3(t) &= \cos(4\pi/3) \cdot u_\alpha^s(t) + \sin(4\pi/3) \cdot u_\beta^s(t) + u_0(t) = -\frac{1}{2} \cdot u_\alpha^s(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} u_\beta^s(t) + u_0(t)
 \end{aligned}
 \quad 4.25$$

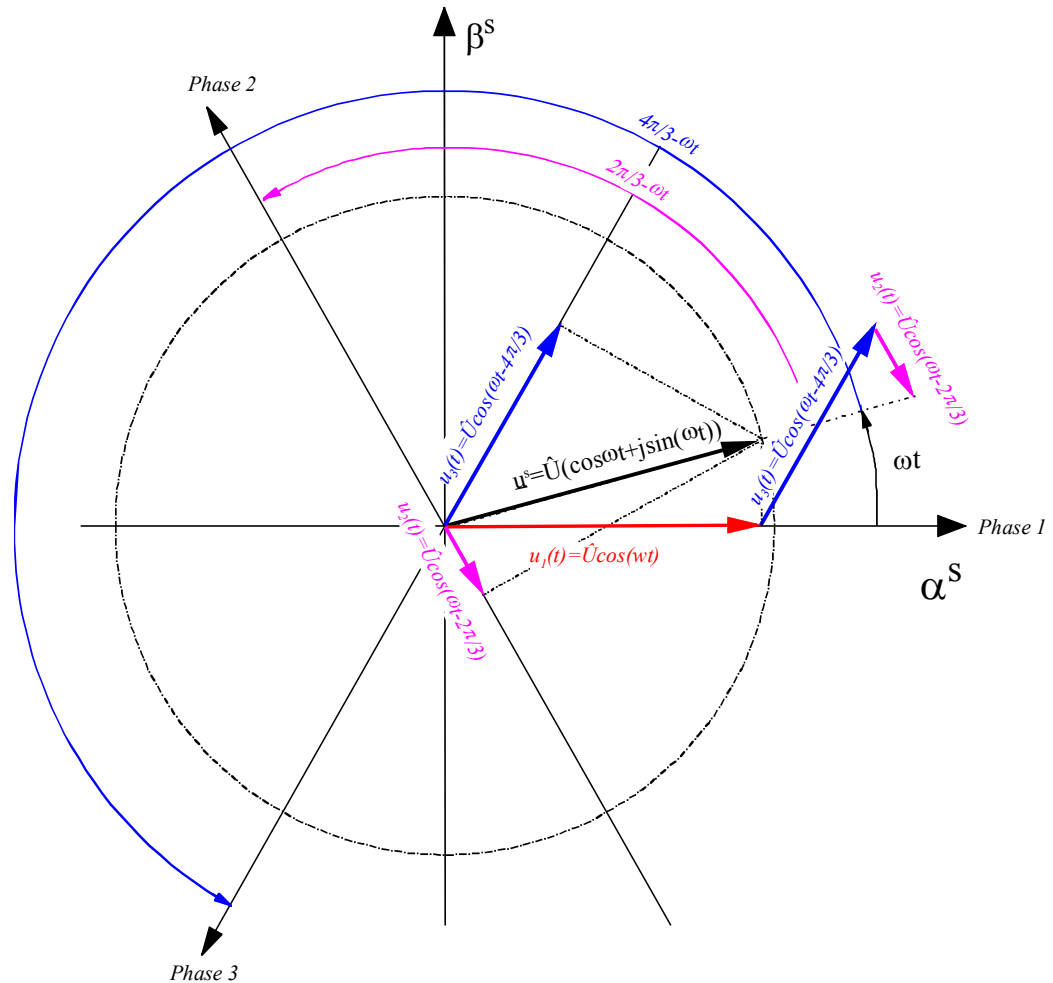


Figure 4-6 : Reconstitution des tensions de phases

4.2.5 Définition de la puissance apparente

A l'aide des phaseurs spatiaux pour tensions et courants, on peut définir la valeur instantanée de la puissance apparente comme grandeur complexe selon la relation

$$\underline{s} = p + j \cdot q = \frac{3}{2} \underline{\mathbf{u}}^{*s} \cdot \underline{\mathbf{i}}^s + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \quad 4.26$$

$\underline{\mathbf{u}}^{*s}$ est la valeur complexe conjuguée du phaseur spatial de la tension. Cette relation est valable lorsque les courants et les tensions possèdent des composantes homopolaires. Seule la puissance active est modifiée par le terme $p_0 = 3 \cdot u_0 \cdot i_0$ dû à la composante homopolaire. Par contre, la composante homopolaire ne donne aucune contribution à la puissance réactive. La partie réelle de la relation 4.26 est la valeur instantanée de la puissance active,

$$p = \frac{3}{2} \Re\{\underline{\mathbf{u}}^{*s} \cdot \underline{\mathbf{i}}^s\} + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \quad 4.27$$

tandis que la partie imaginaire correspond à la valeur instantanée de la puissance réactive.

$$q = \frac{3}{2} \Im\{\underline{\mathbf{u}}^{*s} \cdot \underline{\mathbf{i}}^s\} \quad 4.28$$

Pour démonstration, on remplace dans 4.26 les phaseurs spatiaux par leur définition donnée par la relation générale 4.5.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{s}} &= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (u_1 + \underline{\mathbf{a}}^* \cdot u_2 + \underline{\mathbf{a}}^{*2} \cdot u_3) \cdot \frac{2}{3} \cdot (i_1 + \underline{\mathbf{a}} \cdot i_2 + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot i_3) \right] + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 + \underline{\mathbf{a}} \cdot (u_1 \cdot i_2 + u_2 \cdot i_3 + u_3 \cdot i_1) + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot (u_1 \cdot i_3 + u_2 \cdot i_1 + u_3 \cdot i_2) \right] + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ &= \frac{2}{3} \left\{ u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 - \frac{1}{2} \cdot [u_1 \cdot (i_2 + i_3) + u_2 \cdot (i_1 + i_3) + u_3 \cdot (i_1 + i_2)] \right. \\ &\quad \left. + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot [u_1 \cdot (i_2 - i_3) + u_2 \cdot (i_3 - i_1) + u_3 \cdot (i_1 - i_2)] \right\} + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ \underline{\mathbf{s}} &= \frac{2}{3} \left\{ u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 - \frac{1}{2} \cdot [u_1 \cdot (-i_1 + 3 \cdot i_0) + u_2 \cdot (-i_2 + 3 \cdot i_0) + u_3 \cdot (-i_3 + 3 \cdot i_0)] \right. \\ &\quad \left. + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot [u_1 \cdot (i_2 - i_3) + u_2 \cdot (i_3 - i_1) + u_3 \cdot (i_1 - i_2)] \right\} + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{3}{2} \cdot (u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3) - \frac{3}{2} \cdot (u_1 + u_2 + u_3) \cdot i_0 \right. \\ &\quad \left. + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot [i_1 \cdot (u_3 - u_2) + i_2 \cdot (u_1 - u_3) + i_3 \cdot (u_2 - u_1)] \right\} + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ &= u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 + j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [(u_3 - u_2) \cdot i_1 + (u_1 - u_3) \cdot i_2 + (u_2 - u_1) \cdot i_3] \end{aligned} \quad 4.29$$

Dans ces transformations, on a tenu compte que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}^* &= \underline{\mathbf{a}}^{-1} = \underline{\mathbf{a}}^2 = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \underline{\mathbf{a}}^{*2} &= \underline{\mathbf{a}}^{-2} = \underline{\mathbf{a}} = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad 4.30$$

En résumé, on peut écrire

$$\underline{\mathbf{s}} = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 + j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [(u_3 - u_2) \cdot i_1 + (u_1 - u_3) \cdot i_2 + (u_2 - u_1) \cdot i_3] \quad 4.31$$

où la partie réelle est la somme des valeurs instantanées du produit tension de phase par courant de phase, ce qui donne la puissance active instantanée. En régime sinusoïdal permanent, cette puissance active est constante.

Démonstration

$$u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 \\ = \hat{U}\hat{I} \cdot \left(\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi\right) \right)$$

sachant que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) &= \cos^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) &= \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos(\varphi) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi\right) &= \underbrace{\cos^2\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos(\varphi)}_{1)} - \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi)}_{2)} \end{aligned}$$

et finalement

$$1) \left\{ \begin{aligned} \cos^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3})) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos^2\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t - \frac{2\pi}{3})) \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \right\} + = \frac{3}{2} \cdot \cos(\varphi)$$

$$2) \left\{ \begin{aligned} \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi) &= \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) &= \frac{1}{2} \sin\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) &= \frac{1}{2} \sin\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} + = 0$$

$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 = \frac{3}{2} \hat{U}\hat{I} \cos(\varphi)$	4.32
--	------

où φ est le déphasage entre la tension et le courant pour chaque phase.

Par contre, la partie imaginaire est la somme des valeurs instantanées du produit tension composée par courant de phase, ce qui donne la valeur instantanée de la puissance réactive, compte tenu du facteur $1/\sqrt{3}$ et du déphasage de $\varphi - \pi/2$ entre le courant et la tension d'un même produit.

Démonstration

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [(u_3 - u_2) \cdot i_1 + (u_1 - u_3) \cdot i_2 + (u_2 - u_1) \cdot i_3]$$

sachant que $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\begin{aligned} (u_3 - u_2) &= \hat{U} \cdot \left(\cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) - \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \right) = -2\hat{U} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(\omega t - \pi) \\ &= -\sqrt{3} \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega t) = \underbrace{\sqrt{3} \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{=u_1 \text{ en avance de } \pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_1 - u_3) &= \hat{U} \cdot \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \right) = -2\hat{U} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ &= \underbrace{\sqrt{3} \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})}_{u_2 \text{ en avance de } \pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_2 - u_1) &= \hat{U} \cdot \left(\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - \cos(\omega t) \right) = -2\hat{U} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \\ &= \underbrace{\sqrt{3} \cdot \hat{U} \cdot \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2})}_{u_3 \text{ en avance de } \pi/2} \end{aligned}$$

en se référant à la démonstration précédente ou l'on remplace φ par $\varphi - \pi/2$, on obtient

$$q = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [(u_3 - u_2) \cdot i_1 + (u_1 - u_3) \cdot i_2 + (u_2 - u_1) \cdot i_3] = \frac{3}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \hat{U} \hat{I} \sin(\varphi) \quad 4.33$$

On peut exprimer les phaseurs spatiaux dans 4.26 par leurs composantes α et β , ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \underline{s} &= p + jq = \frac{3}{2} \cdot \underline{u}^{s*} \cdot \underline{i}^s + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 = \frac{3}{2} (u_\alpha^s - j \cdot u_\beta^s) \cdot (i_\alpha^s + j \cdot i_\beta^s) + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 \\ &= \frac{3}{2} (u_\alpha^s \cdot i_\alpha^s + u_\beta^s \cdot i_\beta^s) + 3 \cdot u_0 \cdot i_0 + j \cdot \frac{3}{2} (u_\alpha^s \cdot i_\beta^s - u_\beta^s \cdot i_\alpha^s) \end{aligned} \quad 4.34$$

En reprenant la relation 4.16, on peut écrire pour un système sinusoïdal $\underline{u}^s = \hat{U} \cdot e^{j\omega t}$ et $\underline{i}^s = \hat{I} \cdot e^{j\omega t + \varphi}$. La puissance apparente résultante deviendra

$$\underline{s} = \frac{3}{2} \cdot \underline{u}^{s*} \cdot \underline{i}^s = \frac{3}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot e^{j\varphi} = \frac{3}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi) + j \cdot \frac{3}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\varphi) \quad 4.35$$

4.2.6 Transformation de coordonnées

Il est souvent judicieux de soumettre les phaseurs spatiaux à une transformée de coordonnées. Le choix du système de coordonnées dépend de l'application, le but général étant une

simplification des équations. En général cette transformation est utilisée dans le cas des entraînements réglés lors de la modélisation des machines à champ tournant. La Figure 4-7 présente deux systèmes de coordonnées, soit $\{\alpha^s, \beta^s\}$ et $\{\alpha^k, \beta^k\}$. Étant donné le décalage positif ($\theta_k > 0$) du système de coordonnées k par rapport au système de coordonnées s, on a

$$\underline{u}^s(t) = u(t) \cdot e^{j\rho_s} \quad 4.36$$

$$\underline{u}^k(t) = u(t) \cdot e^{j\rho_k} \quad 4.37$$

$$\rho_s = \rho_k + \mathcal{G}_{s-k} \quad 4.38$$

Et donc, sous forme complexe

$$\begin{aligned} \underline{u}^k(t) &= u(t) \cdot e^{j(\rho_s - \mathcal{G}_{s-k})} = u(t) \cdot e^{j\rho_s} \cdot e^{-j\mathcal{G}_{s-k}} \\ &= \underline{u}^s(t) \cdot e^{-j\mathcal{G}_{s-k}} \end{aligned} \quad 4.39$$

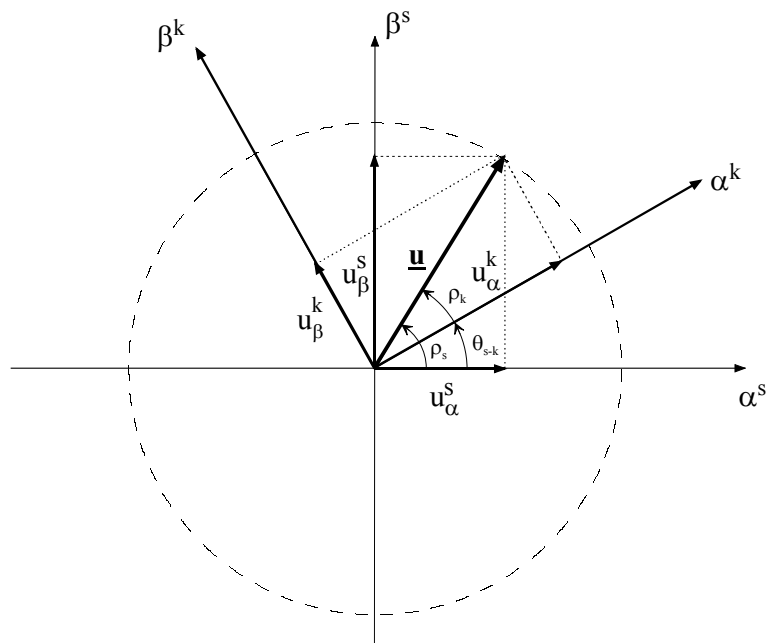


Figure 4-7 : Transformation de coordonnées

Pour des systèmes de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \underline{u}^k(t) &= (u_\alpha^s(t) + j \cdot u_\beta^s(t)) \cdot (\cos(-\mathcal{G}_{s-k}) + j \cdot \sin(-\mathcal{G}_{s-k})) \\ &= (u_\alpha^s(t) \cdot \cos(\mathcal{G}_{s-k}) + u_\beta^s(t) \cdot \sin(\mathcal{G}_{s-k})) + j \cdot (u_\beta^s(t) \cdot \cos(\mathcal{G}_{s-k}) - u_\alpha^s(t) \cdot \sin(\mathcal{G}_{s-k})) \quad 4.40 \\ &= u_\alpha^k(t) + j \cdot u_\beta^k(t) \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$\underline{\mathbf{u}}^k(t) = \begin{bmatrix} u_\alpha^k(t) \\ u_\beta^k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathcal{G}_{s-k}) & \sin(\mathcal{G}_{s-k}) \\ -\sin(\mathcal{G}_{s-k}) & \cos(\mathcal{G}_{s-k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha^s(t) \\ u_\beta^s(t) \end{bmatrix} \quad 4.41$$

Pour le traitement des circuits triphasés, il est judicieux de choisir un système de coordonnées qui tourne à la vitesse angulaire $\omega=2\pi f$ selon la fréquence imposée aux tensions du circuit triphasé. Si cette fréquence est constante, on a

$$\mathcal{G}_{s-k}(t) = \omega \cdot t + \mathcal{G}_{s-k}(0) \quad 4.42$$

Où $\mathcal{G}_{s-k}(0)$ est la position initiale de l'axe α^k à $t=0$. La relation 4.39 devient

$$\underline{\mathbf{u}}^k(t) = \underline{\mathbf{u}}^s(t) \cdot e^{-j(\omega t + \mathcal{G}_{s-k}(0))} \quad 4.43$$

Évidemment, il est possible de passer du système de coordonnées k au système de coordonnées s par une transformation de coordonnées inverses

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \underline{\mathbf{u}}^k(t) \cdot e^{j\mathcal{G}_{s-k}} \quad 4.44$$

Et pour les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^s &= (u_\alpha^k(t) + j \cdot u_\beta^k(t)) \cdot (\cos(\mathcal{G}_{s-k}) + j \cdot \sin(\mathcal{G}_{s-k})) \\ &= (u_\alpha^k(t) \cdot \cos(\mathcal{G}_{s-k}) - u_\beta^k(t) \cdot \sin(\mathcal{G}_{s-k})) + j \cdot (u_\beta^k(t) \cdot \cos(\mathcal{G}_{s-k}) + u_\alpha^k(t) \cdot \sin(\mathcal{G}_{s-k})) \quad 4.45 \\ &= u_\alpha^s(t) + j \cdot u_\beta^s(t) \end{aligned}$$

ou sous forme matricielle

$$\underline{\mathbf{u}}^s(t) = \begin{bmatrix} u_\alpha^s(t) \\ u_\beta^s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathcal{G}_{s-k}) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k}) \\ \sin(\mathcal{G}_{s-k}) & \cos(\mathcal{G}_{s-k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha^k(t) \\ u_\beta^k(t) \end{bmatrix} \quad 4.46$$

4.3 TRANSFORMATION DIRECTE

Il est possible de passer directement du système triphasé au vecteur spatial dans le référentiel tournant et inversement.

$$\underline{\mathbf{u}}^k(t) = \begin{bmatrix} u_\alpha^k(t) \\ u_\beta^k(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\mathcal{G}_{s-k}) & \cos(\mathcal{G}_{s-k} - 2\pi/3) & \cos(\mathcal{G}_{s-k} - 4\pi/3) \\ -\sin(\mathcal{G}_{s-k}) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k} - 2\pi/3) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k} - 4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad 4.47$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathcal{G}_{s-k}) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k}) \\ \cos(\mathcal{G}_{s-k} - 2\pi/3) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k} - 2\pi/3) \\ \cos(\mathcal{G}_{s-k} - 4\pi/3) & -\sin(\mathcal{G}_{s-k} - 4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha^k(t) \\ u_\beta^k(t) \end{bmatrix} \quad 4.48$$

4.4 EXEMPLE DE PHASEURS SPATIAUX EN RÉGIME STATIONNAIRE

A titre d'exemple, on traitera dans ce paragraphe quelques cas de régime stationnaire. Dans chaque cas, on montrera d'une part l'allure temporelle des composantes α et β et d'autre part l'allure du phaseur spatial dans le plan complexe et cela dans les systèmes de coordonnées fixe et tournant à la vitesse de rotation angulaire ω . Cette analyse est réalisée à l'aide de simulink, la Figure 4-8 illustre le schéma bloc à réaliser

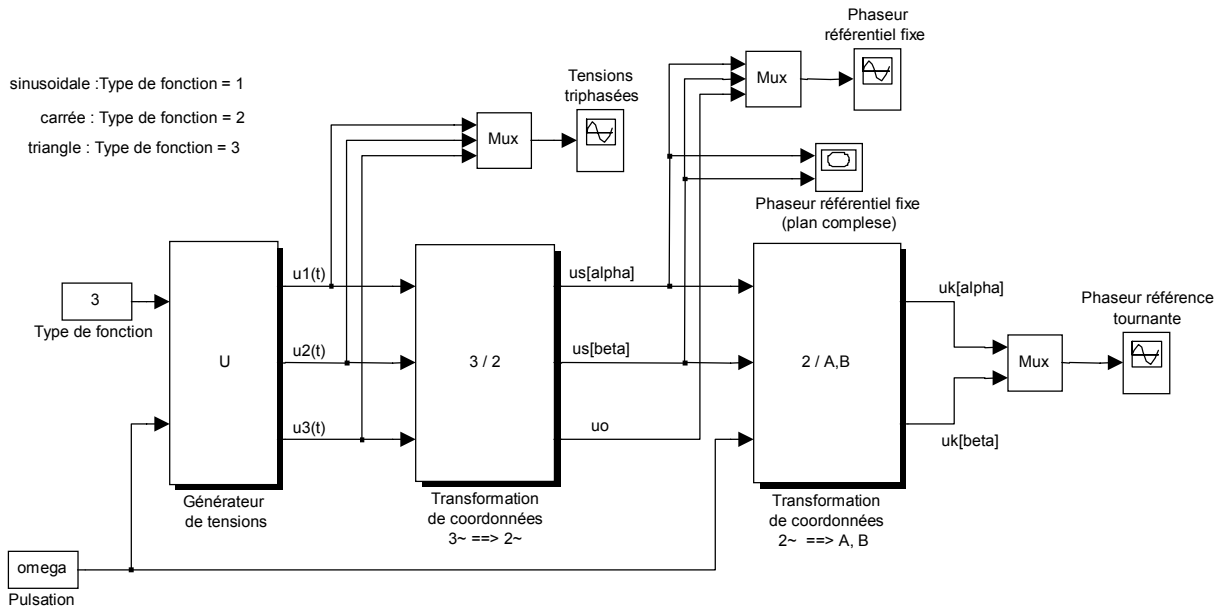


Figure 4-8 : Schéma bloc simulink

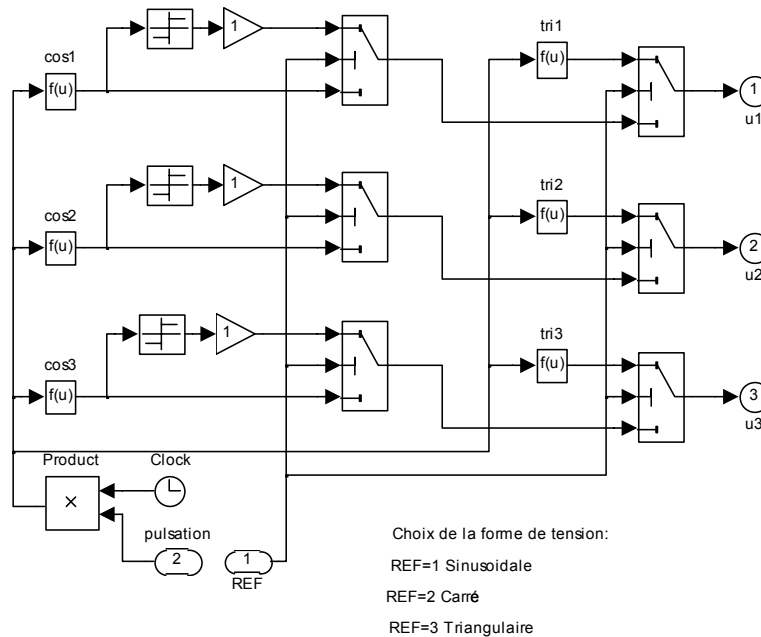


Figure 4-9 : Bloc U

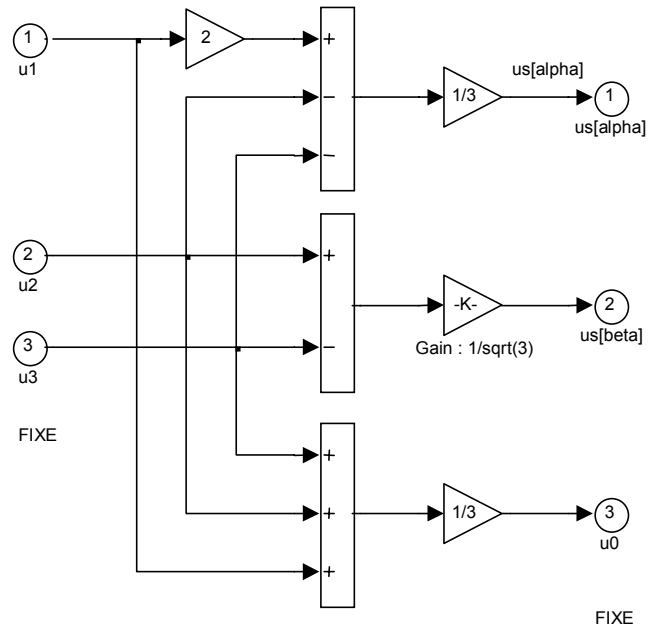


Figure 4-10 : Bloc 3 / 2

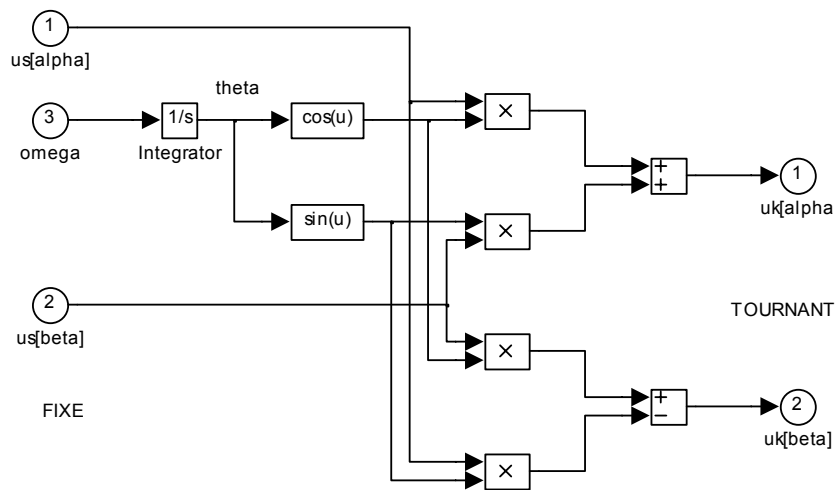


Figure 4-11 : Bloc 2 / A,B

4.4.1 Régime stationnaire sinusoïdal

Soit les trois tensions de phases :

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\u_2(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi) \\u_3(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi)\end{aligned}$$

Pour le phaseur spatial, on obtient

$$\begin{aligned}u_\alpha^s(t) &= u_1(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\u_\beta^s(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u_2(t) - u_3(t)) \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \hat{U} \cdot (\cos(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi) - \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t - 4 \cdot \frac{\pi}{3} + \varphi)) \\&= \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \\\underline{u}^s(t) &= u_\alpha^s + j \cdot u_\beta^s = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \\&= \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\end{aligned}$$

Transformation de coordonnées

$$\begin{aligned}\underline{u}^k(t) &= \underline{u}^s(t) \cdot e^{-j\omega t} \\&= \hat{U} \cdot e^{j\varphi}\end{aligned}$$

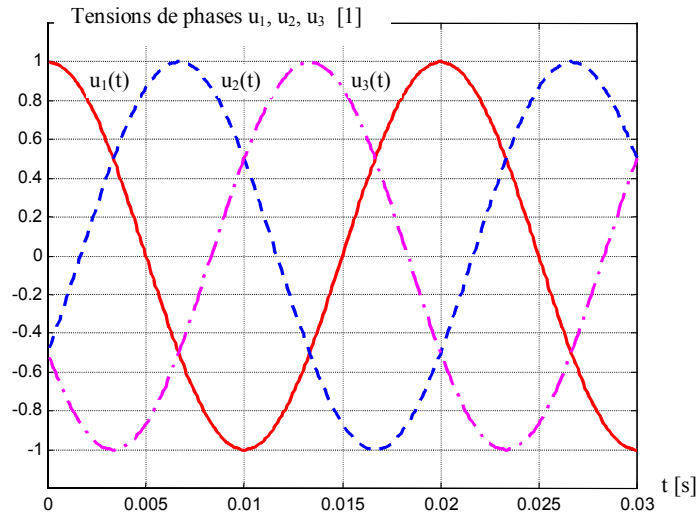
Pour la simulation, il a été posé :

- Pour les paramètres

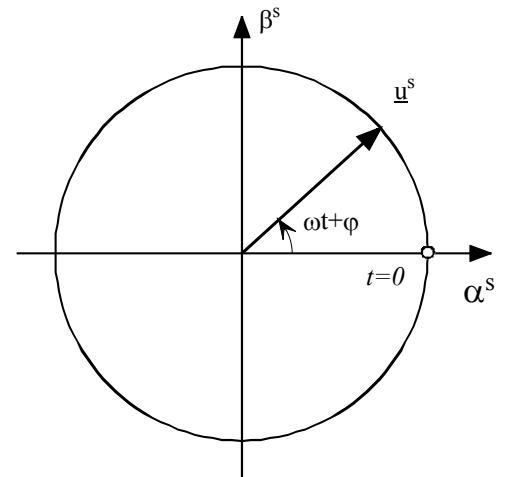
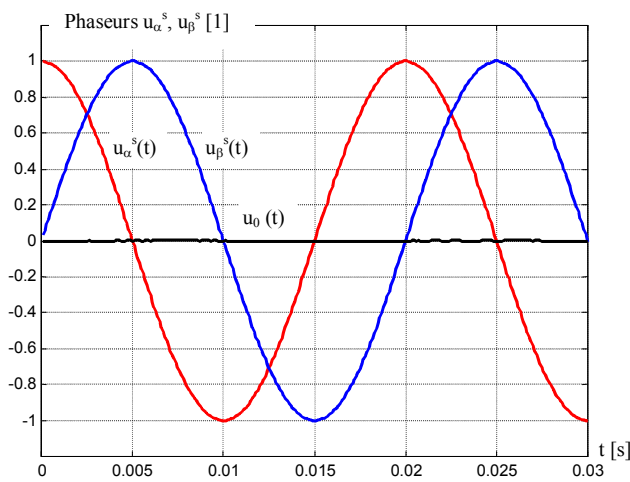
$$\begin{aligned}phi &= 0 \\omega &= 2 \cdot pi \cdot 50\end{aligned}$$

- Pour les fonctions

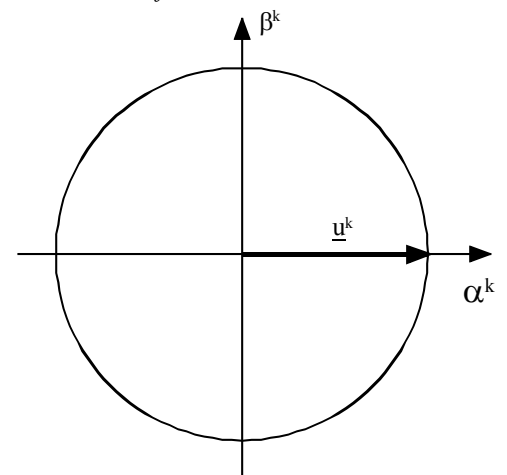
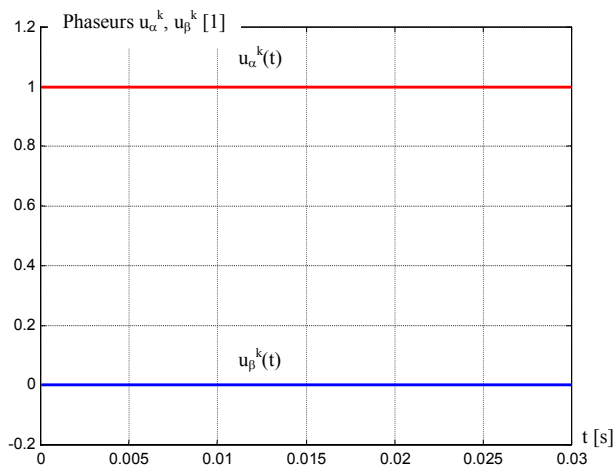
$$\begin{aligned}\cos 1 &= \cos(\omega \cdot u + phi) \\ \cos 2 &= \cos(\omega \cdot u - 2 \cdot pi / 3 + phi) \\ \cos 3 &= \cos(\omega \cdot u - 4 \cdot pi / 3 + phi)\end{aligned}$$



Tensions triphasées



Phaseur spatial dans le système de coordonnées fixe



Phaseur spatial dans le système de coordonnées tournant à la vitesse de rotation angulaire ω

Figure 4-12 : Régime stationnaire sinusoïdal

4.4.2 Régime stationnaire rectangulaire

Soit les trois tensions de phases :

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(1)
	$0 \dots \pi/6$	$\pi/6 \dots \pi/2$	$\pi/2 \dots 5\pi/6$	$5\pi/6 \dots 7\pi/6$	$7\pi/6 \dots 3\pi/2$	$3\pi/2 \dots 11\pi/6$	$11\pi/6 \dots 2\pi$
$u_1(t)$	U	U	-U	-U	-U	U	U
$u_2(t)$	-U	U	U	U	-U	-U	-U
$u_3(t)$	-U	-U	-U	U	U	U	-U
$u_0(t)$	-U/3	U/3	-U/3	U/3	-U/3	U/3	-U/3

Pour le phaseur spatial, on obtient

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(1)
	$0 \dots \pi/6$	$\pi/6 \dots \pi/2$	$\pi/2 \dots 5\pi/6$	$5\pi/6 \dots 7\pi/6$	$7\pi/6 \dots 3\pi/2$	$3\pi/2 \dots 11\pi/6$	$11\pi/6 \dots 2\pi$
$u_\alpha^s(t)$	$4\hat{U}/3$	$2\hat{U}/3$	$-2\hat{U}/3$	$-4\hat{U}/3$	$-2\hat{U}/3$	$2\hat{U}/3$	$4\hat{U}/3$
$u_\beta^s(t)$	0	$2\hat{U}/\sqrt{3}$	$2\hat{U}/\sqrt{3}$	0	$-2\hat{U}/\sqrt{3}$	$-2\hat{U}/\sqrt{3}$	0

Transformation de coordonnées

	(1)	(2)	(3)	(4)	...
	$0 \dots \pi/6$	$\pi/6 \dots \pi/2$	$\pi/2 \dots 5\pi/6$	$5\pi/6 \dots 7\pi/6$...
$u_\alpha^k(t)$	$\frac{4}{3}U \cos(\omega t)$	$\frac{4}{3}U \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$	$\frac{4}{3}U \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$	$\frac{4}{3}U \cos(\omega t - \pi)$...
$u_\beta^k(t)$	$-\frac{4}{3}U \sin(\omega t)$	$-\frac{4}{3}U \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$	$-\frac{4}{3}U \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$	$-\frac{4}{3}U \sin(\omega t - \pi)$...

Pour la simulation, il a été posé :

- Pour les paramètres

$$\phi = 0$$

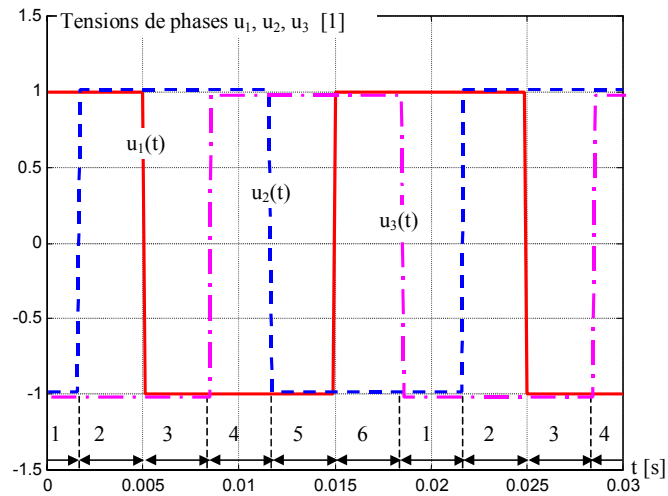
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50$$

- Pour les fonctions

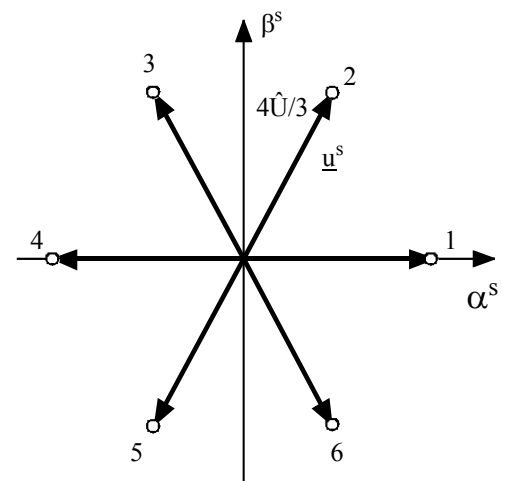
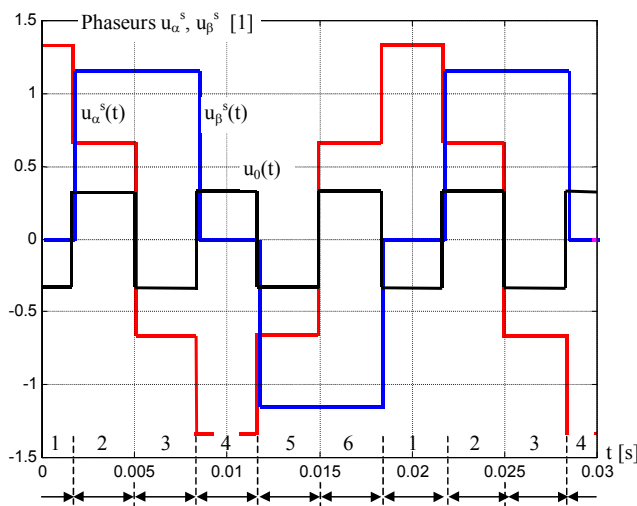
$$rect1 = \text{sign}(\cos(\omega \cdot u + \phi))$$

$$rect2 = \text{sign}(\cos(\omega \cdot u - 2 \cdot \pi / 3 + \phi))$$

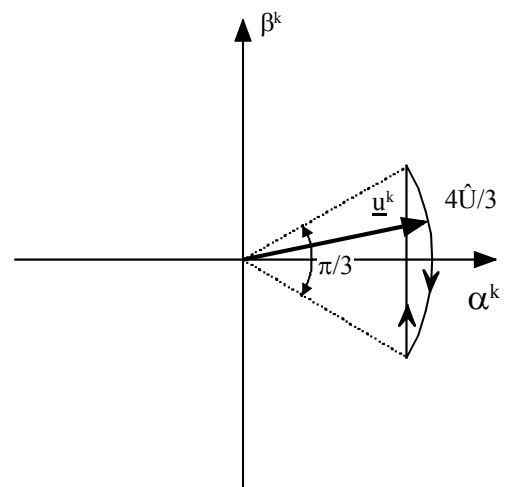
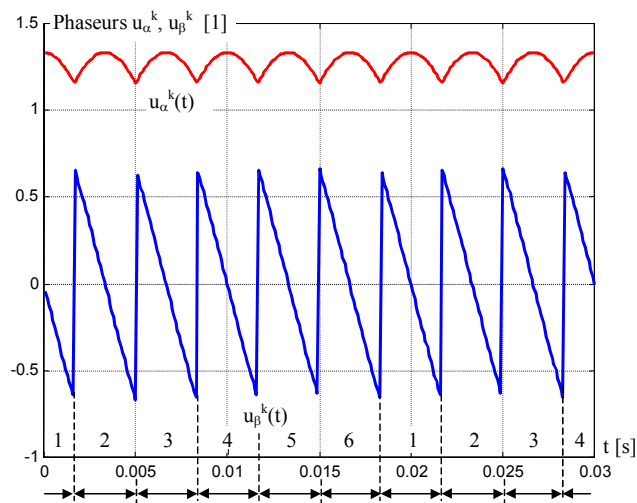
$$rect3 = \text{sign}(\cos(\omega \cdot u - 4 \cdot \pi / 3 + \phi))$$



Tensions triphasées



Phaseur spatial dans le système de coordonnées fixe



Phaseur spatial dans le système de coordonnées tournant à la vitesse de rotation angulaire ω

Figure 4-13 : Régime stationnaire rectangulaire

4.4.3 Régime stationnaire triangulaire

Dans ce cas il existe également une composante homopolaire d'amplitude $U/9$ et de fréquence triple par rapport aux tensions de phases. On renonce ici à détailler les diverses courbes par des relations mathématiques. On peut simplement affirmer que le phaseur \underline{u}^s se déplace sur un hexagone à une vitesse angulaire non constante. L'amplitude maximum du vecteur est donné par la relation au temps $t=0$

$$\begin{aligned} |\underline{u}^s| = \underline{u}^s(0) &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot u_1(0) - u_2(0) - u_3(0)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \hat{U} \cdot (2 - (-\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{3})) = \frac{8}{9} \cdot \hat{U} \end{aligned}$$

La non constance de la vitesse de rotation du phaseur \underline{u}^s est apportée par la position non constante du phaseur \underline{u}^k correspondant au référentiel tournant à une vitesse angulaire constante ω .

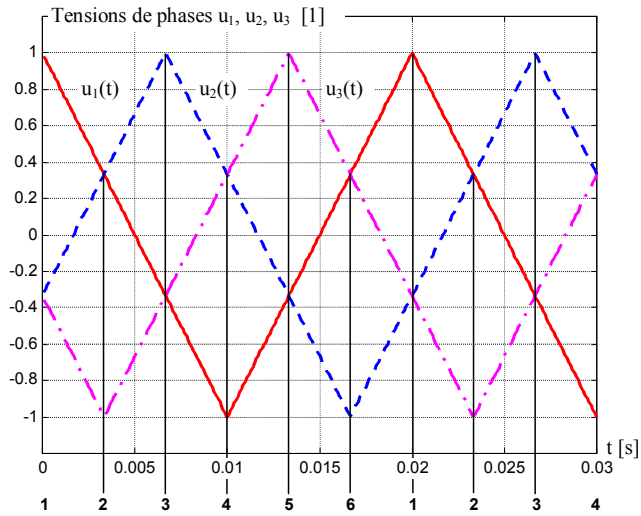
Pour la simulation, il a été posé :

- Pour les paramètres

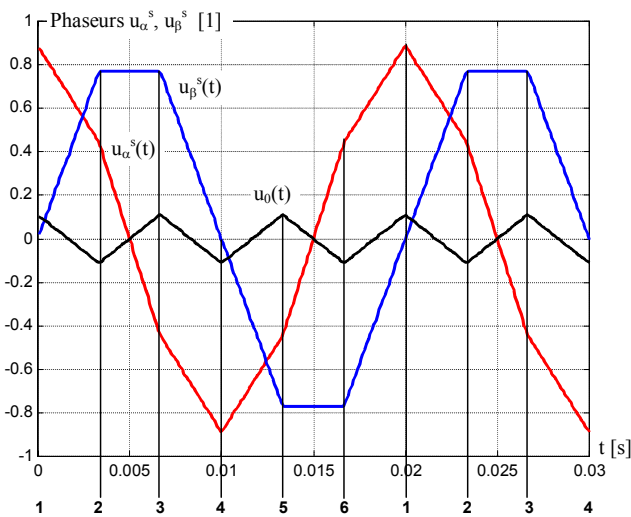
$$\begin{aligned} phi &= \pi / 2 \\ omega &= 2 \cdot \pi \cdot 50 \end{aligned}$$

- Pour les fonctions

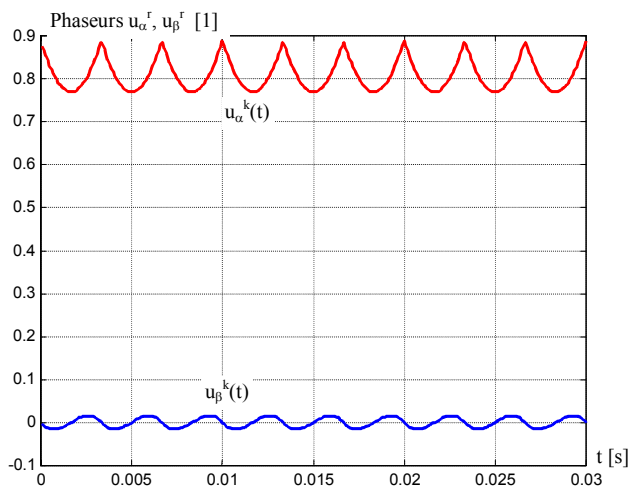
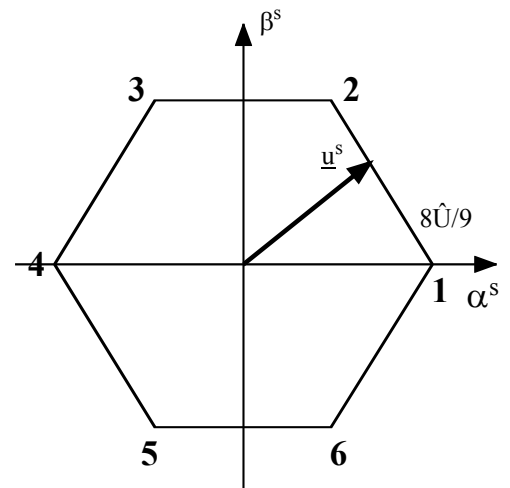
$$\begin{aligned} tri1 &= U \cdot 2 \cdot \pi \cdot \arcsin(\sin(omega \cdot u + phi)) \\ tri2 &= U \cdot 2 \cdot \pi \cdot \arcsin(\sin(omega \cdot u - 2 \cdot \pi / 3 + phi)) \\ tri3 &= U \cdot 2 \cdot \pi \cdot \arcsin(\sin(omega \cdot u - 4 \cdot \pi / 3 + phi)) \end{aligned}$$



Tensions triphasées



Phaseur spatial dans le système de coordonnées fixe



Phaseur spatial dans le système de coordonnées tournant à la vitesse de rotation ω

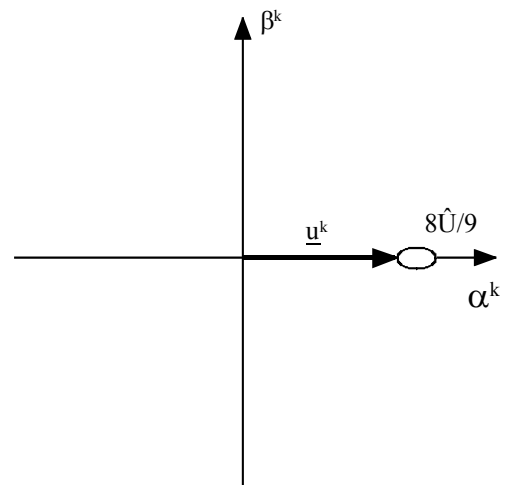


Figure 4-14 : Régime stationnaire triangulaire

4.4.4 Transformation inverse

En réalisant la transformation directe suivie d'une transformation inverse, il est possible de mettre en évidence l'importance de la composante homopolaire lors de la transformation inverse si l'on veut une reconstitution sans perte d'information

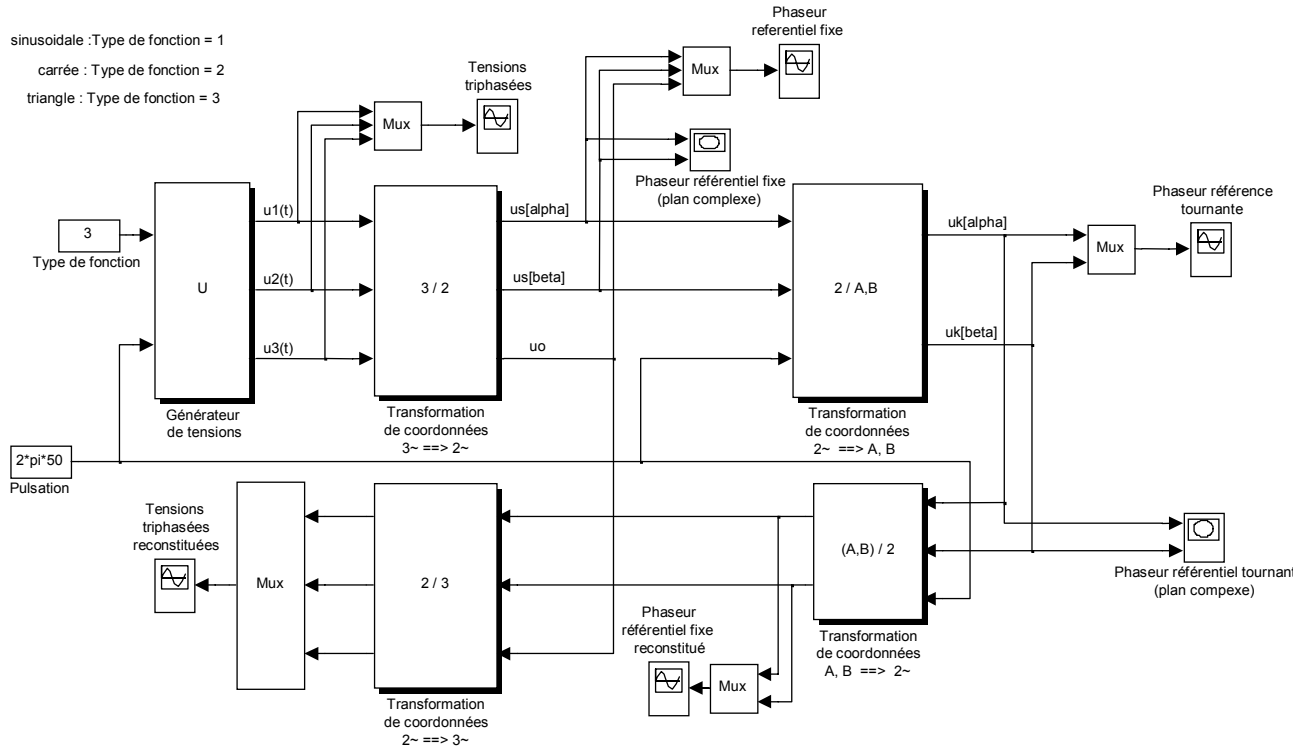


Figure 4-15 : Schéma bloc simulink

Les deux blocs de transformation inverses sont représentés par les deux figures qui suivent. La transformation de coordonnées 2/3 montrent la nécessité de l'utilisation de la composante homopolaire.

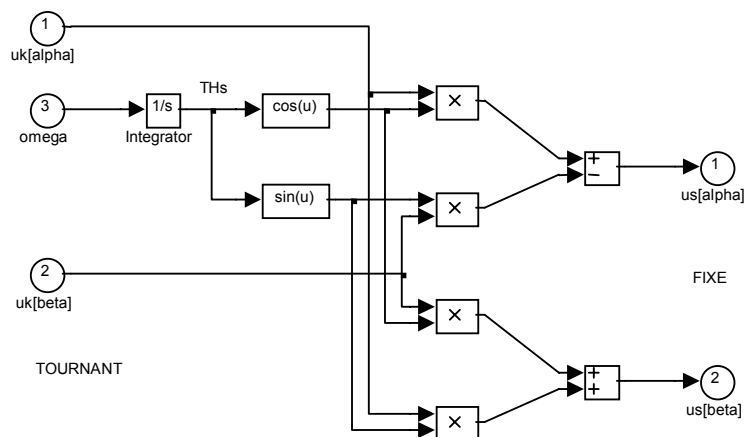


Figure 4-16 : Bloc A, B / 2

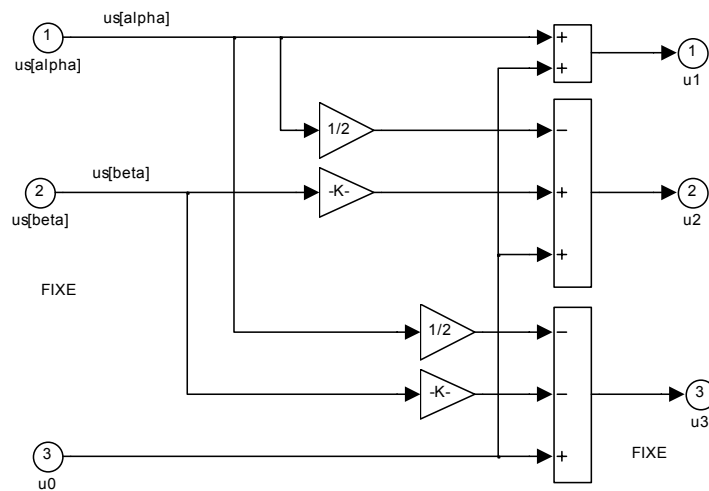


Figure 4-17 : Bloc 2 / 3

4.5 PHASEURS SPATIAUX APPLIQUÉS AUX CIRCUITS TRIPHASÉS

Circuit triphasé

Soit le système triphasé dont la seule contrainte est le neutre flottant. Les tensions u_{10} , u_{20} et u_{30} correspondent aux tensions de branches de l'onduleur triphasé. Les tensions u_1 , u_2 et u_3 sont les tensions de phases du système triphasé. La Figure 4-18 illustre la topologie du circuit

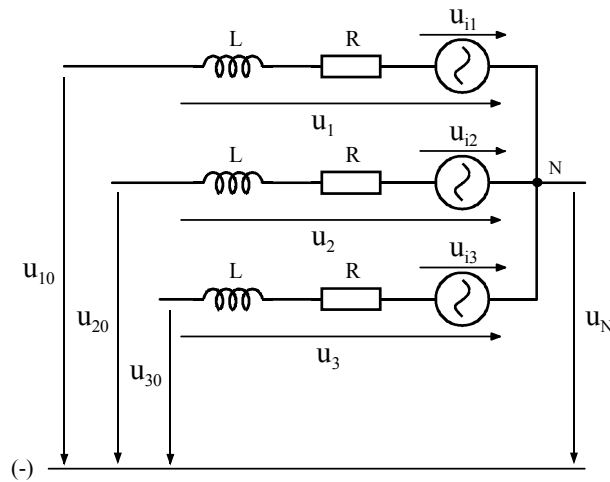


Figure 4-18 : Système triphasé

Pour les trois tensions de phases du circuit, on a les équations

$$u_1(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + R \cdot i_1(t) + u_{i1}(t) \tag{4.49}$$

$$u_2(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) + R \cdot i_2(t) + u_{i2}(t) \tag{4.50}$$

$$u_3(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_3(t) + R \cdot i_3(t) + u_{i3}(t) \tag{4.51}$$

Le neutre flottant impose une somme des courants de phases nulle

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad 4.52$$

On peut également écrire les relations liant les tensions de branches, les tensions de phases et la tension du point neutre

$$u_{10}(t) - u_1(t) = u_N(t) \quad 4.53$$

$$u_{20}(t) - u_2(t) = u_N(t) \quad 4.54$$

$$u_{30}(t) - u_3(t) = u_N(t) \quad 4.55$$

4.5.1 Circuit équivalent pour les phaseurs spatiaux

En multipliant $u_2(t)$ par \underline{a} et $u_3(t)$ par \underline{a}^2 , on obtient

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + R \cdot i_1(t) + u_{i1}(t) \\ \underline{a} \cdot u_2(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} (\underline{a} \cdot i_2(t)) + R \cdot \underline{a} \cdot i_2(t) + \underline{a} \cdot u_{i2}(t) \\ \underline{a}^2 \cdot u_3(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} (\underline{a}^2 \cdot i_3(t)) + R \cdot \underline{a}^2 \cdot i_3(t) + \underline{a}^2 \cdot u_{i3}(t) \end{aligned} \quad 4.56$$

Soit, en utilisant la définition du phaseur spatial

$$\begin{aligned} \underline{u}^s(t) &= \frac{2}{3} \cdot (u_1(t) + \underline{a} \cdot u_2(t) + \underline{a}^2 \cdot u_3(t)) = \frac{2}{3} \cdot \left(L \cdot \frac{d}{dt} (i_1(t) + \underline{a} \cdot i_2(t) + \underline{a}^2 \cdot i_3(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \cdot R \cdot (i_1(t) + \underline{a} \cdot i_2(t) + \underline{a}^2 \cdot i_3(t)) \right) \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \cdot (u_{i1}(t) + \underline{a} \cdot u_{i2}(t) + \underline{a}^2 \cdot u_{i3}(t)) \right) \end{aligned} \quad 4.57$$

Sachant que

$$\underline{u}^s(t) = \frac{2}{3} \cdot (u_1(t) + \underline{a} \cdot u_2(t) + \underline{a}^2 \cdot u_3(t)) \quad 4.58$$

$$\underline{u}_i^s(t) = \frac{2}{3} \cdot (u_{i1}(t) + \underline{a} \cdot u_{i2}(t) + \underline{a}^2 \cdot u_{i3}(t)) \quad 4.59$$

$$\underline{i}^s(t) = \frac{2}{3} \cdot (i_1(t) + \underline{a} \cdot i_2(t) + \underline{a}^2 \cdot i_3(t)) \quad 4.60$$

On peut écrire la relation générale

$$\underline{u}^s(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \underline{i}^s(t) + R \cdot \underline{i}^s(t) + \underline{u}_i^s(t) \quad 4.61$$

En pratique de même avec les relations 4.53, 4.54 et 4.55, on obtient

$$\begin{aligned}
 u_{10}(t) - u_1(t) &= u_N(t) \\
 \underline{\mathbf{a}} \cdot u_{20}(t) - \underline{\mathbf{a}} \cdot u_2(t) &= \underline{\mathbf{a}} \cdot u_N(t) \\
 \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_{30}(t) - \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_3(t) &= \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_N(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

et sachant que

$$\underline{\mathbf{u}}_0^s(t) = \frac{2}{3} \cdot (u_{10}(t) + \underline{\mathbf{a}} \cdot u_{20}(t) + \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot u_{30}(t))
 \tag{4.63}$$

$$1 + \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}^2 = 0
 \tag{4.64}$$

on a la relation

$$\underline{\mathbf{u}}_0^s(t) - \underline{\mathbf{u}}^s(t) = 0
 \tag{4.65}$$

La Figure 4-19 donne le schéma équivalent valable pour les phaseurs spatiaux. On voit que ce circuit équivalent correspond formellement à celui d'une phase

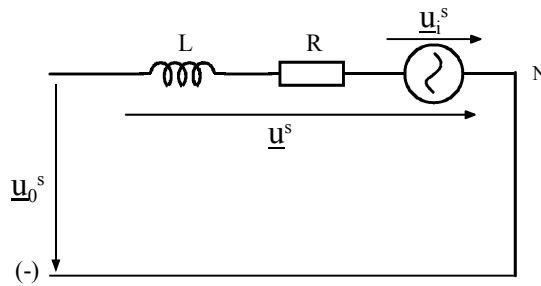


Figure 4-19 : Schéma équivalent pour les phaseurs spatiaux

Pour le traitement numérique, il est possible de décomposer le schéma équivalent de la Figure 4-19 en une représentation cartésienne composée des tensions et courants selon les axes α et β

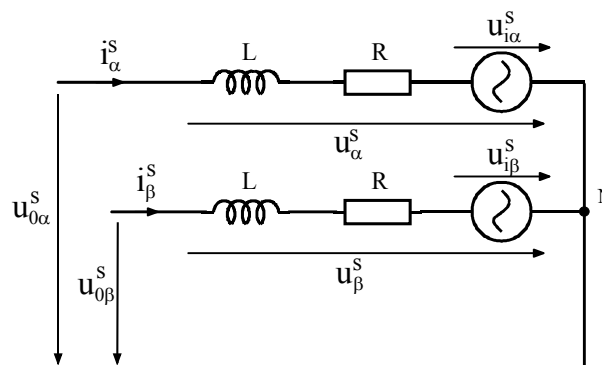


Figure 4-20 : Schéma équivalent pour les phaseurs spatiaux, représentation cartésienne

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha}^s(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_{\alpha}^s(t) + R \cdot i_{\alpha}^s(t) + u_{i\alpha}^s(t) \\
 u_{\beta}^s(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_{\beta}^s(t) + R \cdot i_{\beta}^s(t) + u_{i\beta}^s(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.66}$$

La Figure 4-21 illustre le diagramme structurel d'une telle représentation. En effet, on peut écrire la relation 4.67 sous la forme

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_{\alpha}^s(t) &= \frac{1}{L} \cdot (u_{\alpha}^s(t) - u_{i\alpha}^s(t) - R \cdot i_{\alpha}^s(t)) \xrightarrow{L} i_{\alpha}^s = \frac{1}{sL} \cdot (u_{\alpha}^s - u_{i\alpha}^s - R \cdot i_{\alpha}^s) \\
 \frac{d}{dt} i_{\beta}^s(t) &= \frac{1}{L} \cdot (u_{\beta}^s(t) - u_{i\beta}^s(t) - R \cdot i_{\beta}^s(t)) \xrightarrow{L} i_{\beta}^s = \frac{1}{sL} \cdot (u_{\beta}^s - u_{i\beta}^s - R \cdot i_{\beta}^s)
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

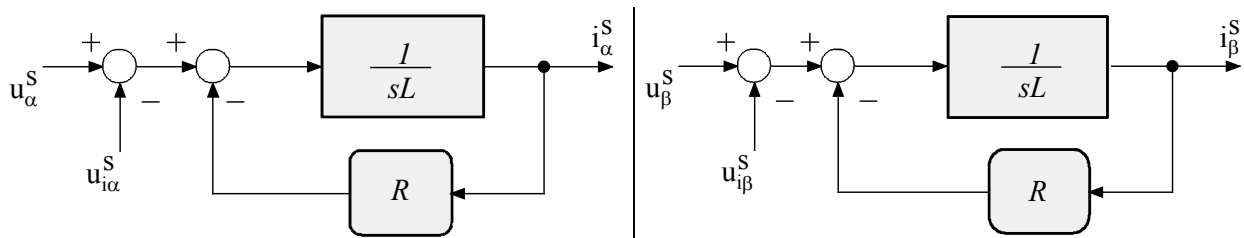


Figure 4-21 : Diagramme structurel pour les axes α et β

4.5.2 Circuit équivalent pour les composantes homopolaires

En additionnant les relations 4.49, 4.50, 4.51 et en tenant compte de la relation 4.52, on peut écrire la relation

$$u_0(t) = u_{i0}(t) = \frac{1}{3} \cdot (u_{i1}(t) + u_{i2}(t) + u_{i3}(t))
 \tag{4.68}$$

où $u_0(t)$ est la composante homopolaire des tensions de phases et $u_{i0}(t)$ la composante homopolaire des tensions internes. Par sommation des relations 4.53, 4.54, 4.55 on obtient

$$u_N(t) = u_{00}(t) - u_0(t) = u_{00}(t) - u_{i0}(t)
 \tag{4.69}$$

où $u_{00}(t)$ est la composante homopolaire des tensions de branches.

Le circuit équivalent pour les composantes homopolaires prend la forme suivante

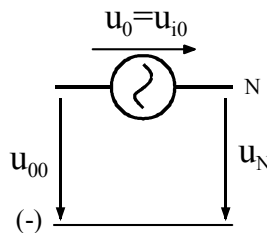


Figure 4-22 : Schéma équivalent pour les composants homopolaires

4.5.3 Transformation de coordonnées

Il est possible de soumettre la relation 4.61 à une transformation de coordonnées, en particulier dans le système de coordonnées tournant à vitesse de rotation angulaire ω en concordance avec la pulsation $\omega=2\pi f$ des tensions d'alimentation. Dans ce but, on doit remplacer $\underline{\mathbf{u}}^s$ et $\underline{\mathbf{i}}^s$ par

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}^s(t) &= \underline{\mathbf{u}}^k(t) \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{\mathbf{i}}^s(t) &= \underline{\mathbf{i}}^k(t) \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}\quad 4.70$$

ou l'on a posé $\mathcal{G}_{k0} = 0$. A partir de la relation 4.61, il est possible de faire les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}^k(t) \cdot e^{j\omega t} &= L \cdot \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{i}}^k(t) \cdot e^{j\omega t}) + R \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) \cdot e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{u}}_i^k(t) \cdot e^{j\omega t} \\ &= L \cdot \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{i}}^k(t)) \cdot e^{j\omega t} + j\omega L \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) \cdot e^{j\omega t} + R \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) \cdot e^{j\omega t} + \underline{\mathbf{u}}_i^k(t) \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}\quad 4.71$$

après division par $e^{j\omega t}$, il reste

$$\underline{\mathbf{u}}^k(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{i}}^k(t) + j\omega L \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) + R \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) + \underline{\mathbf{u}}_i^k(t)\quad 4.72$$

A noter que le troisième terme $j\omega L \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t)$ est dû à la rotation du système de coordonnées. Il correspond en principe à la chute de tension inductive lors du calcul complexe avec les phaseurs. Cependant, dans le cas présent, ce terme est valable non seulement pour le régime établi, mais aussi pour le régime transitoire. On rappelle qu'en régime stationnaire sinusoïdal, le phaseur spatial $\underline{\mathbf{i}}^k$ est constant. Par conséquent la dérivée $\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{i}}^k(t)$ est nulle. Pour la relation 4.72 il n'existe pas de circuit équivalent. Par contre, il est possible d'établir un schéma structurel. En effet cette relation peut être décomposée en parties réelle et imaginaire. On obtient alors

$$\begin{aligned}u_\alpha^k(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_\alpha^k(t) - \omega L \cdot i_\beta^k(t) + R \cdot i_\alpha^k(t) + u_{i\alpha}^k(t) \\ u_\beta^k(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_\beta^k(t) + \omega L \cdot i_\alpha^k(t) + R \cdot i_\beta^k(t) + u_{i\beta}^k(t)\end{aligned}\quad 4.73$$

Comme le montre la relation 4.73, il y a un couplage entre les axes α et β par les termes $-\omega L \cdot i_\beta^k(t)$ et $\omega L \cdot i_\alpha^k(t)$. Ce couplage est dû au système de coordonnées tournant.

Apparemment, il s'agit d'un inconvénient pour le traitement des circuits triphasés. Cependant cet inconvénient est largement compensé par le fait que les composantes α et β sont constantes en régime stationnaire et sinusoïdal.

4.5.3.1 Diagramme structurel

Afin d'établir un diagramme structurel pour les relations du circuit triphasé exprimé dans le système de coordonnées tournant, on va mettre en évidence la dérivée $\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{i}}^k$ dans la relation 4.72.

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{i}}^k(t) = \frac{1}{L} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^k(t) - R \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(t) - \underline{\mathbf{u}}_i^k(t) - j\omega L \underline{\mathbf{i}}^k) \xrightarrow{L} \underline{\mathbf{i}}^k = \frac{1}{sL} \cdot (\underline{\mathbf{u}}^k - R \cdot \underline{\mathbf{i}}^k - \underline{\mathbf{u}}_i^k - j\omega L \underline{\mathbf{i}}^k) \quad 4.74$$

De cette relation, il en résulte le diagramme structurel suivant

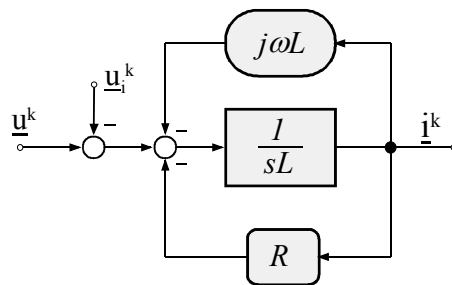


Figure 4-23 : Diagramme structurel du circuit triphasé dans le système de coordonnées tournant

Le phaseur spatial $\underline{\mathbf{u}}^k$ des tensions de phase forme la grandeur d'entrée tandis que $\underline{\mathbf{u}}_i^k$ peut-être considéré comme grandeur de perturbation. La grandeur de sortie est donnée par le phaseur spatial $\underline{\mathbf{i}}^k$ des courants. Sur le bloc d'intégration $1/sL$, il y a deux contre-réactions. La première, réelle, est due à la résistance ohmique R , tandis que la deuxième, imaginaire, est liée à la chute de tension inductive, représentée par le facteur $j\omega L$. Grâce à l'emploi de phaseurs spatiaux pour les variables, le diagramme structurel se présente sous une forme très compacte. Il est également possible d'établir un diagramme structurel pour les relations décomposées en parties réelle et imaginaire. Dans ce but on écrit les équations sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\alpha^k(t) &= \frac{1}{L} \cdot (u_\alpha^k(t) - R \cdot i_\alpha^k(t) - u_{i\alpha}^k(t) + \omega L i_\beta^k(t)) \xrightarrow{L} i_\alpha^k = \frac{1}{sL} \cdot (u_\alpha^k - R \cdot i_\alpha^k - u_{i\alpha}^k + \omega L i_\beta^k) \\ \frac{d}{dt}i_\beta^k(t) &= \frac{1}{L} \cdot (u_\beta^k(t) - R \cdot i_\beta^k(t) - u_{i\beta}^k(t) - \omega L i_\alpha^k(t)) \xrightarrow{L} i_\beta^k = \frac{1}{sL} \cdot (u_\beta^k - R \cdot i_\beta^k - u_{i\beta}^k - \omega L i_\alpha^k) \end{aligned} \quad 4.75$$

On obtient alors le diagramme structurel suivant

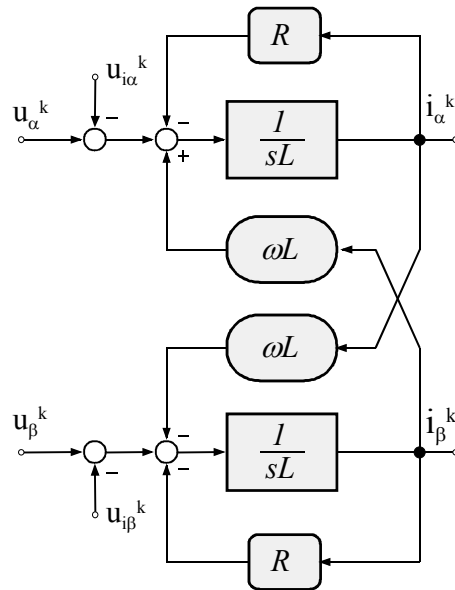


Figure 4-24 : Diagramme structurel dans le système de coordonnées tournant par les composantes α et β

De cette figure apparaît clairement le couplage entre les axes α et β dû au terme inductif ωL . A noter que l'intervention réciproque a lieu avec un signe opposé. Lors de la décomposition en partie réelle et imaginaire la structure devient plus complexe.

4.6 PHASEURS SPATIAUX EN RÉGIME TRANSITOIRE

4.6.1 Généralités

L'utilisation de phaseur spatial convient particulièrement bien pour traiter des phénomènes en régime transitoire. Il est possible d'intégrer les équations différentielles exprimées à l'aide des phaseurs spatiaux (forme complexe), soit de manière analytique ou de manière numérique. Dans le second cas, il est nécessaire de disposer d'un programme qui permet l'intégration de variables complexes (Matlab par exemple). Le cas échéant, on doit effectuer une décomposition en parties réelle et imaginaire, afin d'intégrer des variables réelles. La structure devient évidemment plus compliquée, mais elle peut être traitée à l'aide de programmes de simulation standard. Dans cette section, on traitera, à titre d'exemple, les phénomènes transitoires lors de l'enclenchement d'un circuit triphasé dont la structure de chaque phase est identique au cas monophasé étudié dans le chapitre 3 (Variateur de courant continu à pulsation).

4.6.2 Structure de la charge.

Par la suite on déterminera les phénomènes transitoires lors de l'enclenchement d'un circuit triphasé donc la structure est rappelée à la Figure 4-25

On déduit l'équation différentielle suivante

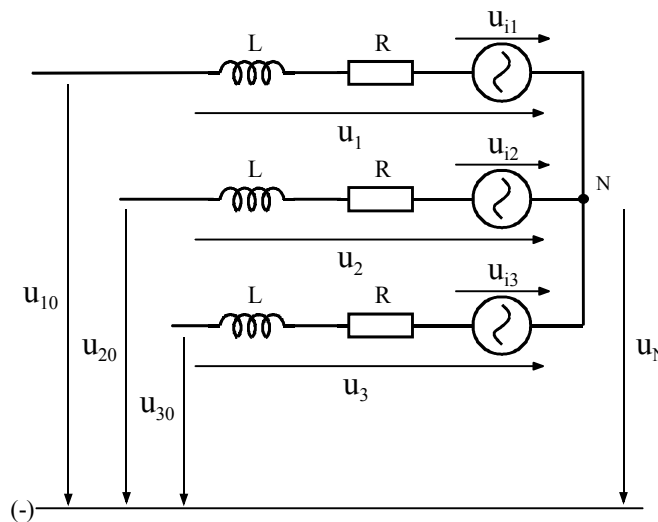
$$\underline{u}^s(t) = R\underline{i}^s(t) + L \frac{d\underline{i}^s(t)}{dt} + \underline{u}_i^s(t) \quad 4.76$$

On peut soumettre cette équation différentielle à une transformation de coordonnées dont le référentiel tourne à une vitesse angulaire ω en concordance avec la pulsation $\omega=2\pi f$ des tensions d'alimentation

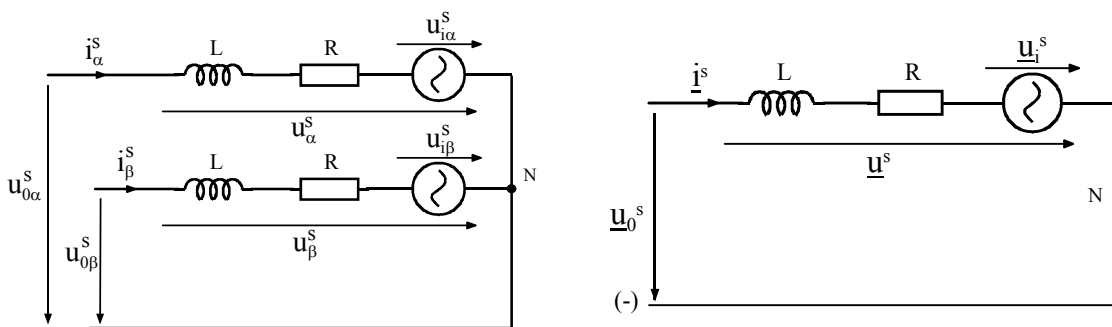
$$\begin{aligned} \underline{u}^s(t) &= \underline{u}^k(t) \cdot e^{j(\omega t + \vartheta_0)} \\ \underline{i}^s(t) &= \underline{i}^k(t) \cdot e^{j(\omega t + \vartheta_0)} \end{aligned} \tag{4.77}$$

pour simplifier les calculs, nous admettrons que le déphasage initial est nul $\vartheta_0=0$

$$\begin{aligned} \underline{u}^s(t) &= \underline{u}^k(t) \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i}^s(t) &= \underline{i}^k(t) \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{4.78}$$



(a) : Charge triphasée symétrique



(b) Charge équivalent pour phaseurs spatiaux

Figure 4-25 : Système triphasé

4.6.3 Solution analytique de l'équation différentielle

Tenant compte de ce qui a été dit au paragraphe précédent et à l'aide de la condition suivante

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mathbf{u}}^k(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \\ \underline{\mathbf{u}}^k(t) = \hat{U} \quad \text{pour } t > 0 \end{array} \right\} \quad 4.79$$

et sachant que le système de coordonnées tournant est orienté sur le phaseur spatial de la tension d'alimentation ($\vartheta_0=0$) de sorte que ce dernier est purement réel et égal à la tension de crête \hat{U} , on trouve

$$\underline{\mathbf{u}}^k(t) = R\underline{\mathbf{i}}^k(t) + L \frac{d\underline{\mathbf{i}}^k(t)}{dt} + j\omega L \underline{\mathbf{i}}^k(t) + \underline{\mathbf{u}}_i^k(t) \quad 4.80$$

Lorsque l'on soumet cette équation différentielle à une transformation de Laplace, et en posant une condition initiale nulle pour le courant, on obtient

$$\underline{\mathbf{u}}^k(s) = R\underline{\mathbf{i}}^k(s) + sL\underline{\mathbf{i}}^k(s) + j\omega L\underline{\mathbf{i}}^k(s) + \underline{\mathbf{u}}_i^k(s) \quad 4.81$$

et enfin pour un saut indiciel de la tension $\underline{\mathbf{u}}(s)$

$$\underline{\mathbf{u}}^k(s) = \frac{\hat{U}}{s} = R + L(s + j\omega) \cdot \underline{\mathbf{i}}^k(s) + \frac{\hat{U}_i}{s} \cdot e^{j\varphi} \quad 4.82$$

On peut mettre en évidence le phaseur spatial de courant, à savoir

$$\underline{\mathbf{i}}^k(s) = \frac{\hat{U}}{s \cdot (R + L \cdot (s + j\omega))} - \frac{\hat{U}_i}{s \cdot (R + L \cdot (s + j\omega))} \cdot e^{j\varphi} \quad 4.83$$

Pour déterminer la transformation de Laplace inverse, il faut décomposer les quotients en fraction simple

$$\frac{1}{s \cdot (R + L \cdot (s + j\omega))} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L} + j\omega} \right) \frac{1}{R + j\omega L} \quad 4.84$$

Ce qui permet d'écrire à l'aide du dictionnaire des transformées

$$\frac{1}{s} \xrightarrow{L} 1 \quad 4.85$$

et

$$\frac{1}{s + \frac{R}{L} + j\omega} \xrightarrow{L} e^{-\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t} \quad 4.86$$

Finalement on obtient

$$\underline{\mathbf{i}}^k(t) = \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t} \right) \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_i e^{j\varphi}}{R + j\omega L} \quad 4.87$$

Les conditions aux limites sont définies de la manière suivante

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\underline{\mathbf{i}}^k(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t} \right) \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_i e^{j\varphi}}{R + j\omega L} \right) = 0 \quad 4.88$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{\mathbf{i}}^k(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t} \right) \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_i e^{j\varphi}}{R + j\omega L} \right) = \frac{\hat{U} - \hat{U}_i e^{j\varphi}}{R + j\omega L} \quad 4.89$$

En remplaçant dans 4.87 $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$, on peut écrire

$$\underline{\mathbf{i}}^k(t) = \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) \right) \cdot \left(\frac{\hat{U}}{R + j\omega L} - \frac{\hat{U}_i (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))}{R + j\omega L} \right) \quad 4.90$$

ou sous une autre forme

$$\underline{\mathbf{i}}^k(t) = \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) \right) \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot (\hat{U} - \hat{U}_i (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))) \quad 4.91$$

$$\underline{\mathbf{i}}^k(t) = \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} \begin{bmatrix} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \cos(\omega t) \right) (\hat{U}R - \hat{U}_i (R \cos(\varphi) + \omega L \sin(\varphi))) \\ + e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega t) (\hat{U}\omega L - \hat{U}_i (\omega L \cos(\varphi) - R \sin(\varphi))) \\ - \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \cos(\omega t) \right) (\hat{U}\omega L - \hat{U}_i (\omega L \cos(\varphi) - R \sin(\varphi))) \\ + e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\omega t) (\hat{U}R - \hat{U}_i (R \cos(\varphi) + \omega L \sin(\varphi))) \end{bmatrix} \quad 4.92$$

Si le programme de calcul utilisé traite les fonctions complexes, on utilisera la relation 4.87, si ce n'est pas le cas, on prendra la relation 4.92. Dans les deux cas, on obtiendra la trajectoire du phaseur spatial de courant dans le système de coordonnées tournant à la vitesse angulaire ω illustré à la Figure 4-26. Dans cet exemple, on a choisi les valeurs numériques suivantes

- $\hat{U} = 311\text{V}$ ($U = 220\text{V}$)
- $R = 12.5\Omega$
- $L = 50\text{mH}$
- $\hat{U}_i = 150\text{V}$
- $\varphi = -\pi/6$
- $\omega = 100\pi$ ($f = 50\text{Hz}$)

En régime stationnaire, on a $\hat{I} = 9.76\text{A}$ et $\phi = -29^\circ$. On voit bien que la trajectoire s'approche du point de fonctionnement stationnaire sur une spirale. Le phaseur spatial du courant est retardé par rapport à l'axe réel sur lequel est orienté le phaseur spatial de la tension d'alimentation

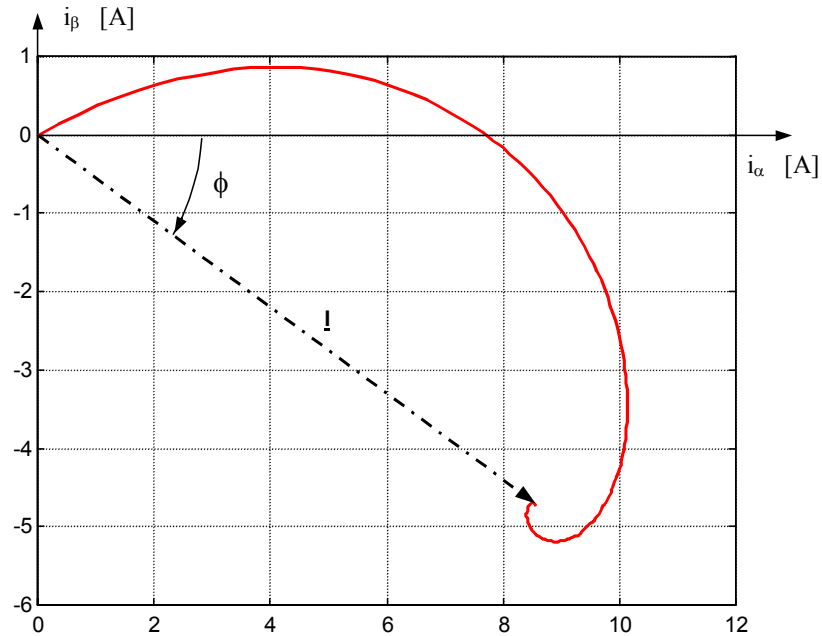


Figure 4-26 Trajectoire du phaseur spatial de courant $\hat{i}(t)$ dans le système de coordonnées tournant

L'allure temporelle des composantes i_α et i_β est représenté à la Figure 4-27. On voit bien sur cette figure l'oscillation amortie des réponses indicielles

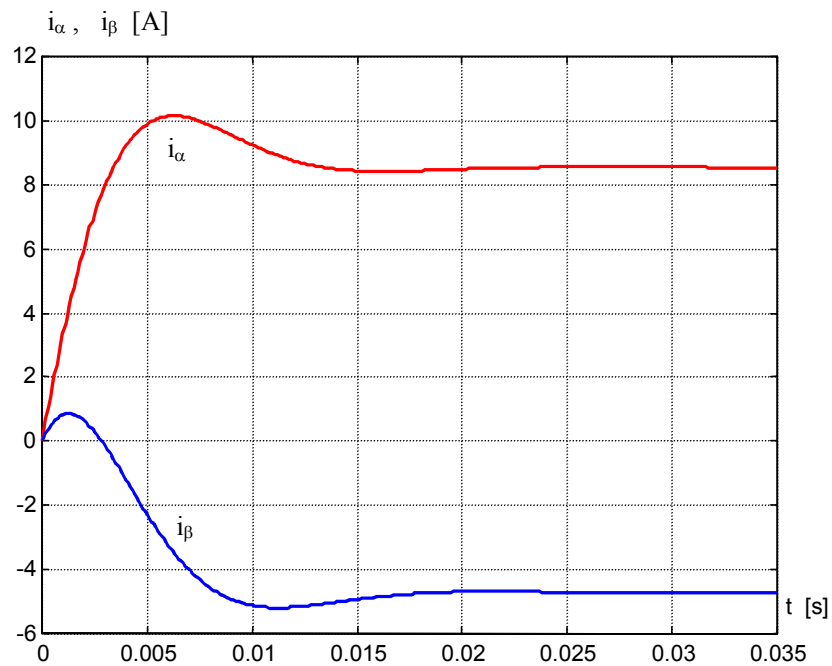


Figure 4-27 Allure temporelle des composantes i_α et i_β dans le système de coordonnées tournant

4.6.4 Transformation de coordonnées

La solution obtenue dans le système de coordonnées tournant à la vitesse angulaire ω peut être soumise à une transformation de coordonnées. On obtient alors facilement la trajectoire de phaseur spatial $\underline{\mathbf{i}}^s(t)$ du courant dans le système de coordonnées fixe. A l'aide de la relation 4.78 et 4.87, on peut écrire

$$\underline{\mathbf{i}}^s(t) = \left(e^{j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_i e^{j\varphi}}{R + j\omega L} \quad 4.93$$

puis utilisant la relation $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$

$$\underline{\mathbf{i}}^s(t) = \left(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t) - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot (\hat{U} - \hat{U}_i (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))) \quad 4.94$$

et enfin en séparant les parties réelle et imaginaire

$$\underline{\mathbf{i}}^s(t) = \begin{bmatrix} i_\alpha^s(t) \\ i_\beta^s(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} \begin{bmatrix} \left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{R}{L}t} \right) (\hat{U}R - \hat{U}_i (R \cos(\varphi) + \omega L \sin(\varphi))) \\ + \sin(\omega t) (\hat{U}\omega L - \hat{U}_i (\omega L \cos(\varphi) - R \sin(\varphi))) \\ - \left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{R}{L}t} \right) (\hat{U}\omega L - \hat{U}_i (\omega L \cos(\varphi) - R \sin(\varphi))) \\ + \sin(\omega t) (\hat{U}R - \hat{U}_i (R \cos(\varphi) + \omega L \sin(\varphi))) \end{bmatrix} \quad 4.95$$

4.6.5 Trajectoire et allure temporelle dans le système de coordonnées fixe

En utilisant les relations 4.93 ou 4.95, on peut tracer la trajectoire du phaseur spatial $\underline{\mathbf{i}}^s$ dans le plan complexe (i_α^s, i_β^s) , on obtient la Figure 4-28

Dans cet exemple, les tensions d'alimentation triphasées sont enclenchées à l'instant où la tension de la première phase u_1 a atteint la valeur de crête. On voit que la trajectoire s'approche d'un cercle avec un retard qui est accumulé tout de suite après l'enclenchement. Le cercle est déterminé par le régime stationnaire et possède un rayon égal à $\hat{I} = 9.76A$.

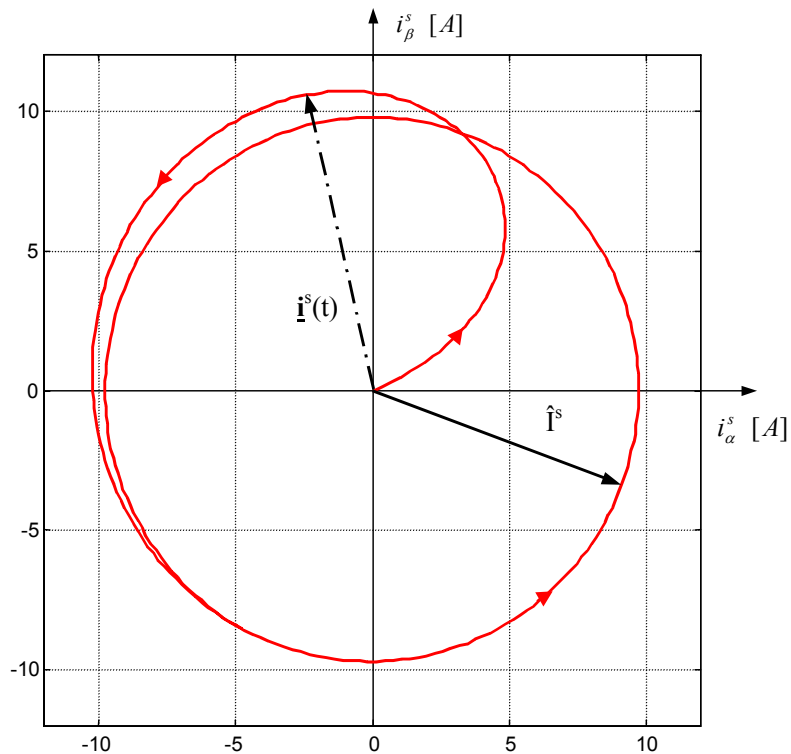


Figure 4-28 Trajectoire du phaseur spatial \underline{i}^s dans le système de coordonnées fixe

4.6.6 Reconstitution des courants de phase

Comme on l'a démontré au paragraphe 4.2.4, il est possible de reconstruire les courants triphasés $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ à partir des composantes i_α^s et i_β^s . On peut donc écrire

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ \cos(4\pi/3) & \sin(4\pi/3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha^s(t) \\ i_\beta^s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_0(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix} \quad 4.96$$

en sachant que $i_0(t)=0$. Sous forme algébrique, la relation matricielle 4.96 devient

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_\alpha^s(t) \\ i_2(t) &= -\frac{1}{2}i_\alpha^s(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta^s(t) \\ i_3(t) &= -\frac{1}{2}i_\alpha^s(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}i_\beta^s(t) \end{aligned} \quad 4.97$$

La Figure 4-29 montre l'allure temporelle des trois courants de phase $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$. On y voit le phénomène transitoire après enclenchement. Une fois le régime stationnaire établi, le courant évolue de manière sinusoïdale.

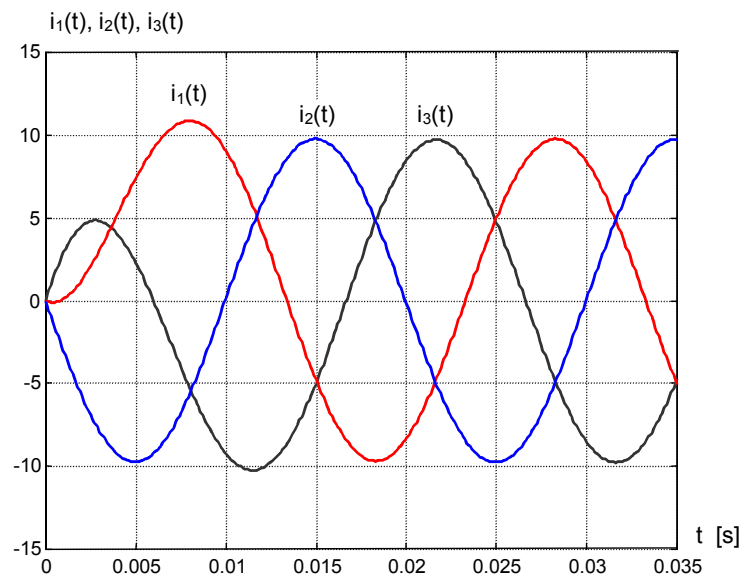


Figure 4-29 Allure temporelle des courants de phase $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CONVERTISSEURS STATIQUES
Auteur : Hansruedi Bühler
Chapitre 1
Presses Polytechniques et Universitaires Romandes
ISBN : 2-88074-230-7
- [2] **Réglage de systèmes d'électronique de puissance**
VOLUME 1 : THÉORIE
Auteur : Hansruedi Bühler
Annexe
ISBN : 2-88074-341-9