
Electronique de puissance

Chapitre 1

DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES DE COMMUTATION



T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

| | |
|--|-----------|
| 1. DESCRIPTION DES PHENOMENES DE COMMUTATION..... | 1 |
| 1.1 GÉNÉRALITÉS..... | 1 |
| 1.1.1 <i>Nécessité de la commutation</i> | 1 |
| 1.2 FONCTION ÉLÉMENTAIRE DU TRAVAIL EN COMMUTATION..... | 1 |
| 1.2.1 <i>Définition</i> | 1 |
| 1.2.2 <i>Interrupteur idéal sous charge résistive</i> | 2 |
| 1.2.3 <i>Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge résistive</i> | 3 |
| 1.2.4 <i>Interrupteur avec capacité parasite sous charge résistive</i> | 4 |
| 1.2.5 <i>Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge inductive</i> | 7 |
| 1.2.6 <i>Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge capacitive</i> | 11 |
| 1.2.7 <i>Diagramme de fonctionnement, cas réel</i> | 14 |
| ANNEXE..... | 17 |
| A.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE..... | 17 |
| A.1.1 EXEMPLE THÉORIQUE..... | 17 |
| A.1.2 EXEMPLE : CIRCUIT RL..... | 18 |
| A.2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE..... | 19 |
| A.2.1 EXEMPLE THÉORIQUE..... | 19 |
| A.2.1.1 LES TERMES K_1 ET K_2 SONT RÉELS ET IDENTIQUES..... | 21 |
| A.2.1.2 LES TERMES K_1 ET K_2 SONT RÉELS ET DISTINCTS..... | 21 |
| A.2.1.3 LES TERMES K_1 ET K_2 SONT RÉELS ET DISTINCTS..... | 22 |
| A.2.2 EXEMPLE : CIRCUIT RLC..... | 23 |
| A.2.2.1 PREMIER CAS : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ | 24 |
| A.2.2.2 DEUXIÈME CAS : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$ | 25 |
| A.2.2.3 TROISIÈME CAS : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ | 26 |

Bibliographie

1. DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES DE COMMUTATION.

1.1 GÉNÉRALITÉS

1.1.1 Nécessité de la commutation

L'électronique de puissance a pour ambition la conversion des ondes électriques (de continu en continu, de continu en alternatif et inversement, d'alternatif en alternatif) et la commande de la puissance électrique ainsi convertie au moyen de composants électroniques, c'est-à-dire d'éléments de petites dimensions devant les systèmes alimentés.

Lorsque ces opérations s'effectuent à forte puissance (par rapport à celles facilement commandées en électronique linéaire) elles doivent obligatoirement l'être à très faibles pertes relatives, non seulement pour des raisons de rendement mais surtout parce qu'il est alors exclu que les composants électroniques utilisés puissent dissiper sans risque un pourcentage non négligeable de la puissance mise en jeu.

Autrement dit, pour les puissances (par exemple au-delà d'un kilowatt) nécessitant des tensions et des intensités élevées, un élément de convertisseur parcouru par une portion importante du courant nominal ne pourra provoquer qu'une chute de tension très faible pour que ses pertes soient compatibles avec ses dimensions et sa température maximale de travail, inversement, s'il supporte tout ou partie de la tension nominale il ne pourra être traversé que par un courant d'intensité négligeable.

En définitive, les composants électroniques ne pourront travailler que dans deux types d'états

- courant de l'ordre de grandeur du courant nominal, très faible tension,
- tension de l'ordre de grandeur de la tension nominale, très faible courant.

Pour réaliser les conversions recherchées il faudra de plus que les composants passent d'un type d'états à l'autre au cours de transitions rapides et peu dissipatrices (c'est-à-dire respectant leurs contraintes thermiques) ; on dira alors qu'ils commutent.

Ce mode de fonctionnement des composants électroniques ressemble à celui des interrupteurs mécaniques.

En conclusion, l'électronique de puissance est nécessairement une électronique de commutation et on peut l'analyser intégralement en remplaçant les composants électroniques par des interrupteurs électroniques (ou interrupteurs statiques) dont on définira plus loin les caractéristiques.

On adoptera désormais le vocabulaire relatif aux interrupteurs : état ouvert, état fermé, ouverture, fermeture.

1.2 FONCTION ÉLÉMENTAIRE DU TRAVAIL EN COMMUTATION

1.2.1 Définition

Les dispositifs qui vont servir d'interrupteur en électronique de puissance doivent travailler dans l'un des états stables suivant :

- état ouvert (ou bloqué) noté OFF
- état fermé (ou conducteur) noté ON

Soit Q un dipôle –interrupteur, u_Q la différence de potentiel et i_Q l'intensité du courant direct, ces états sont décrits, lorsque Q est alimenté par une source de tension en série avec une résistance par les relations

$$\begin{array}{ll} \text{Etat ouvert OFF :} & u_Q \cong U_s \\ & i_Q \cong 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Etat fermé ON :} & i_Q \cong \frac{U_s}{R_s} \\ & u_Q \cong 0 \end{array}$$

Il faut ajouter aux états statiques une caractéristique dynamique, c'est à dire la trajectoire suivie par le point de fonctionnement de l'interrupteur lors d'une commutation.

1.2.2 Interrupteur idéal sous charge résistive

La Figure 1-1 (b) présente la caractéristique d'un interrupteur idéal. A l'état bloqué (OFF), la résistance d'isolation est infinie et à l'état fermé (ON), la résistance de passage est nulle.

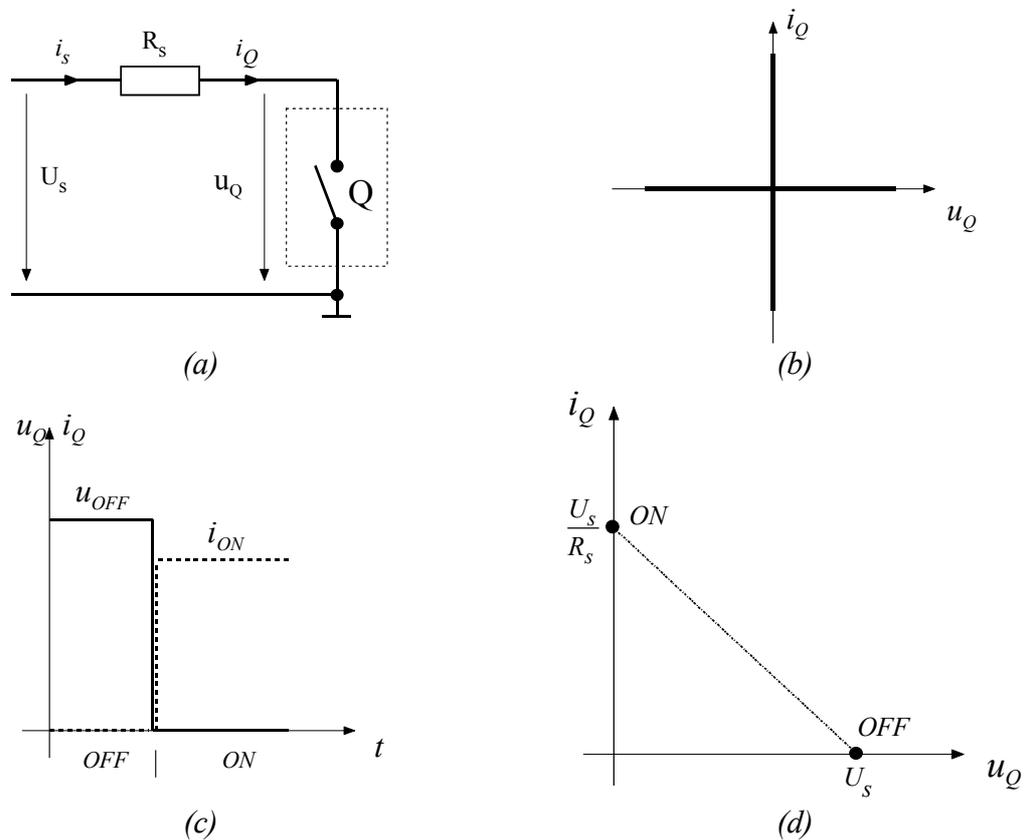


Figure 1-1 : Représentation schématique d'un interrupteur idéal

Interrupteur ouvert

$$i_{Q(OFF)} = 0$$

$$u_{Q(OFF)} = U_s$$

$$P_{Q(OFF)} = i_{Q(OFF)} \cdot u_{Q(OFF)} = 0$$

1.1

Interrupteur fermé

$$\begin{aligned}
 i_{Q(ON)} &= \frac{U_s}{R_s} \\
 u_{Q(ON)} &= 0 \\
 p_{Q(ON)} &= i_{Q(ON)} \cdot u_{Q(ON)} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Dans le cas de l'interrupteur idéal, la trajectoire suivie par le point de fonctionnement est telle que la commutation n'induit aucune perte.

1.2.3 Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge résistive

La Figure 1-2 (b) présente la caractéristique d'un interrupteur. A l'état bloqué (OFF), la résistance d'isolation prend la valeur R_{OFF} et à l'état fermé (ON), la résistance de passage est égale à $R_{ON} = r_{ON}/R_{OFF}$.

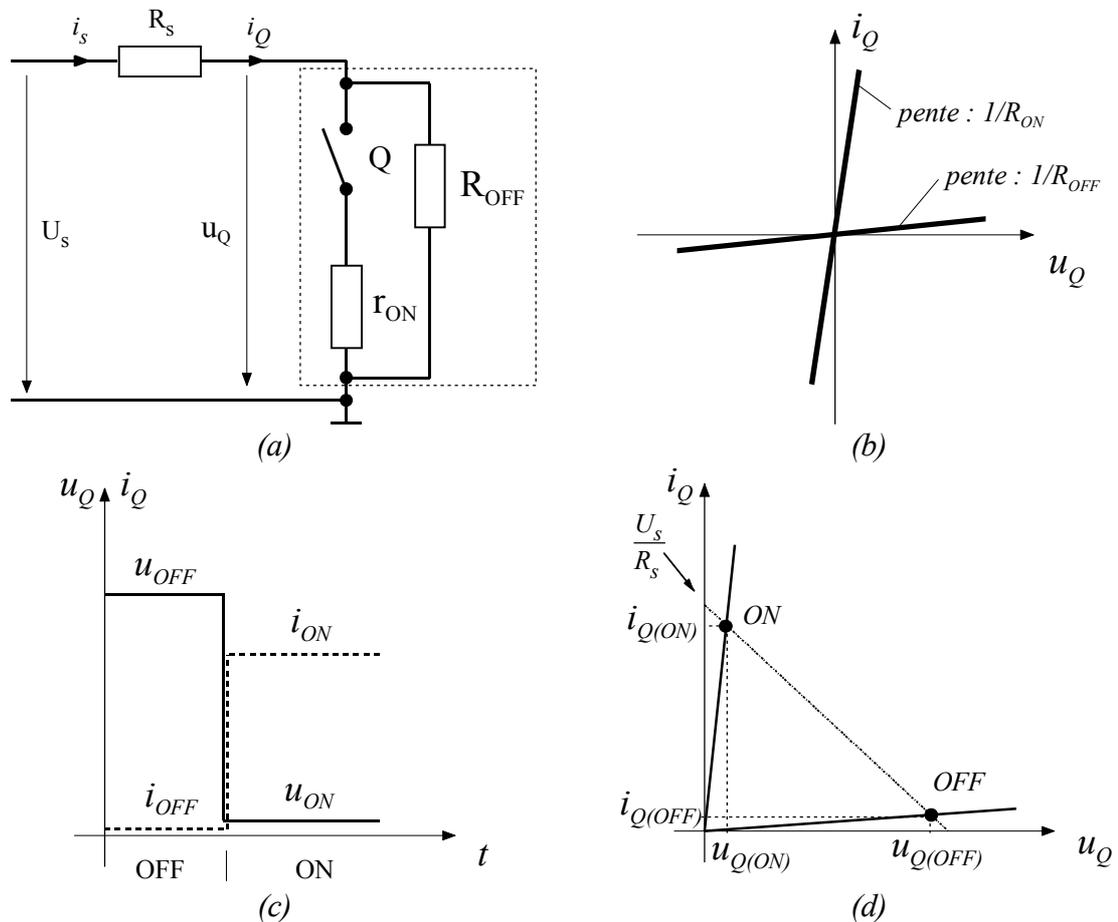


Figure 1-2 : Représentation schématique d'un interrupteur avec résistance de passage et d'isolation

Interrupteur ouvert

$$\begin{aligned}
 i_{Q(OFF)} &= \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}} \\
 u_{Q(OFF)} &= \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s \\
 p_{Q(OFF)} &= i_{Q(OFF)} \cdot u_{Q(OFF)} = \frac{R_{OFF}}{(R_s + R_{OFF})^2} \cdot U_s^2
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Interrupteur fermé

$$\begin{aligned}
 i_{Q(ON)} &= \frac{U_s}{R_s + R_{ON}} \\
 u_{Q(ON)} &= \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s \\
 p_{Q(ON)} &= i_{Q(ON)} \cdot u_{Q(ON)} = \frac{R_{ON}}{(R_s + R_{ON})^2} \cdot U_s^2
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Cet interrupteur, comme les précédents, ne possède pas de pertes de commutation. Par contre, il est le siège de pertes de conduction à l'état bloqué comme à l'état conducteur.

1.2.4 Interrupteur avec capacité parasite sous charge résistive

La Figure 1-3 (b) présente la caractéristique d'un interrupteur non idéal. A l'état bloqué (OFF), la résistance d'isolation prend la valeur R_{OFF} et à l'état fermé (ON), la résistance de passage est égale à

$R_{ON} = R_{OFF} / r_{ON}$. Une capacité parasite aux bornes de l'interrupteur modifie le comportement dynamique de ce dernier (durant les commutations).

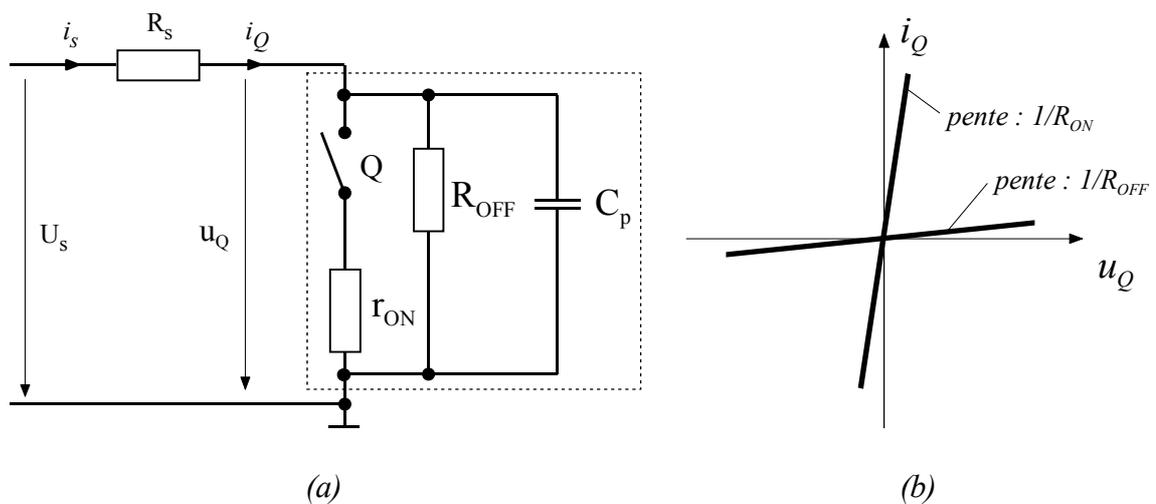


Figure 1-3 : Représentation schématique d'un interrupteur et de sa caractéristique statique

1.2.4.1 Caractéristiques dynamiques (OFF→ON)

Lorsque l'interrupteur est à l'état OFF, on peut définir le point de fonctionnement avant commutation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{Q(OFF)} &= \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s \\ i_{Q(OFF)} &= \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}} \end{aligned} \quad 1.5$$

Ces deux grandeurs représentent les conditions initiales lors de la commutation. A la fermeture de l'interrupteur, on peut écrire la relation liant les courants au nœud de la borne supérieure de l'interrupteur

$$\begin{aligned} i_Q(t) &= i_{R_{OFF}}(t) + i_{r_{ON}}(t) + i_{C_p}(t) = i_{R_{ON}}(t) + i_{C_p}(t) \\ \frac{U_s - u_c(t)}{R_s} &= \frac{u_c(t)}{R_{ON}} + C_p \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad 1.6$$

avec pour condition initiale:

$$u_c(0) = u_{Q(OFF)} = \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s$$

la solution générale de cette équation différentielle prend la forme

$$\begin{aligned} u_c(t) = u_Q(t) &= \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s \cdot (1 - e^{-t/(R_s // R_{ON}) \cdot C_p}) + \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s \cdot e^{-t/(R_s // R_{ON}) \cdot C_p} \\ i_Q(t) &= \frac{U_s - u_c(t)}{R_s} = \frac{U_s - u_Q(t)}{R_s} \end{aligned} \quad 1.7$$

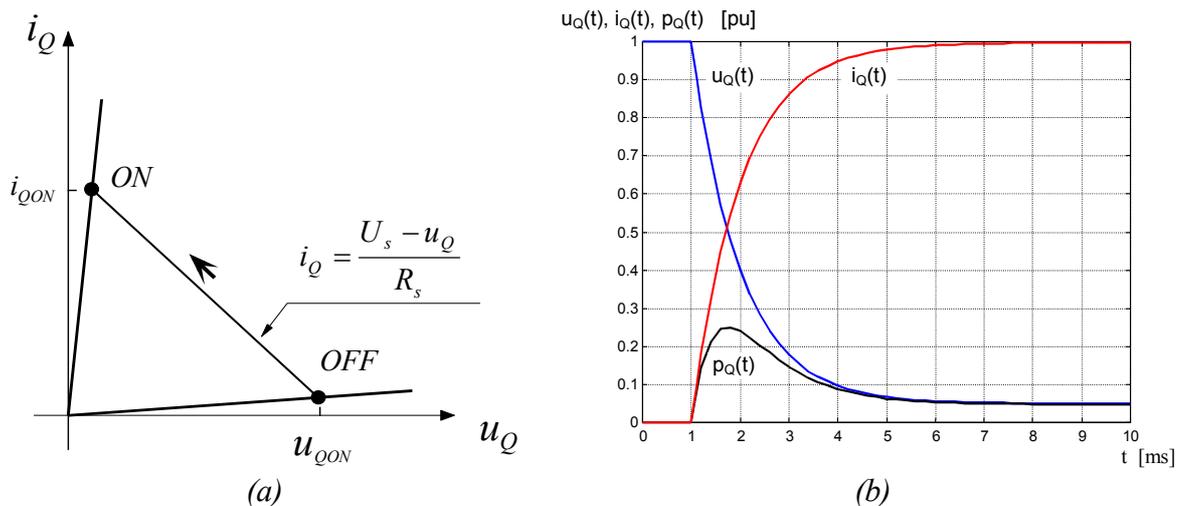


Figure 1-4 : Comportement dynamique de l'interrupteur à la fermeture

La seconde des relations 1.7 montre que la trajectoire du point de fonctionnement dans la phase dynamique est parfaitement définie. Il s'agit d'une droite. Le paramètre t donne la vitesse de déplacement de la paire u_Q, i_Q sur cette droite.

Les pertes de commutation correspondent à la décharge du condensateur C_p qui voit à ces bornes

la tension varier de $u_c(0) = \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} U_s \cong U_s$ jusqu'à $u_c(\infty) = \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s \cong \frac{R_{ON}}{R_s} \cdot U_s$.

1.2.4.2 Caractéristiques dynamiques (ON→OFF)

Lorsque l'interrupteur est à l'état ON, on peut définir le point de fonctionnement avant commutation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{Q(ON)} &= \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s \\ i_{Q(ON)} &= \frac{U_s}{R_s + R_{ON}} \end{aligned} \quad 1.8$$

Ces deux grandeurs représentent les conditions initiales lors de la commutation. A l'ouverture de l'interrupteur, on peut écrire la relation liant les courants au nœud de la borne supérieure de l'interrupteur

$$\begin{aligned} i_Q(t) &= i_{R_{OFF}}(t) + i_{C_p}(t) \\ \frac{U_s - u_c(t)}{R_s} &= \frac{u_c(t)}{R_{OFF}} + C_p \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad 1.9$$

avec pour condition initiale:

$$u_c(0) = u_{Q(ON)} = \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s$$

la solution générale de cette équation différentielle prend la forme

$$\begin{aligned} u_c(t) = u_Q(t) &= \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s \cdot (1 - e^{-t/(R_{OFF} // R_s C_p)}) + \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s \cdot e^{-t/(R_{OFF} // R_s C_p)} \\ i_Q(t) &= \frac{U_s - u_c(t)}{R_s} = \frac{U_s - u_Q(t)}{R_s} \end{aligned} \quad 1.10$$

Comme pour le cas de la commutation à la fermeture, la trajectoire du point de fonctionnement dans la phase dynamique est une droite. Le paramètre t donne la vitesse de déplacement de la paire u_Q, i_Q sur cette droite.

Les pertes de commutation sont en fait une accumulation d'énergie dans le condensateur C_p qui

voit la tension à ces bornes passer de $u_c(0) = \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s$ jusqu'à $u_c(\infty) = \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s$.

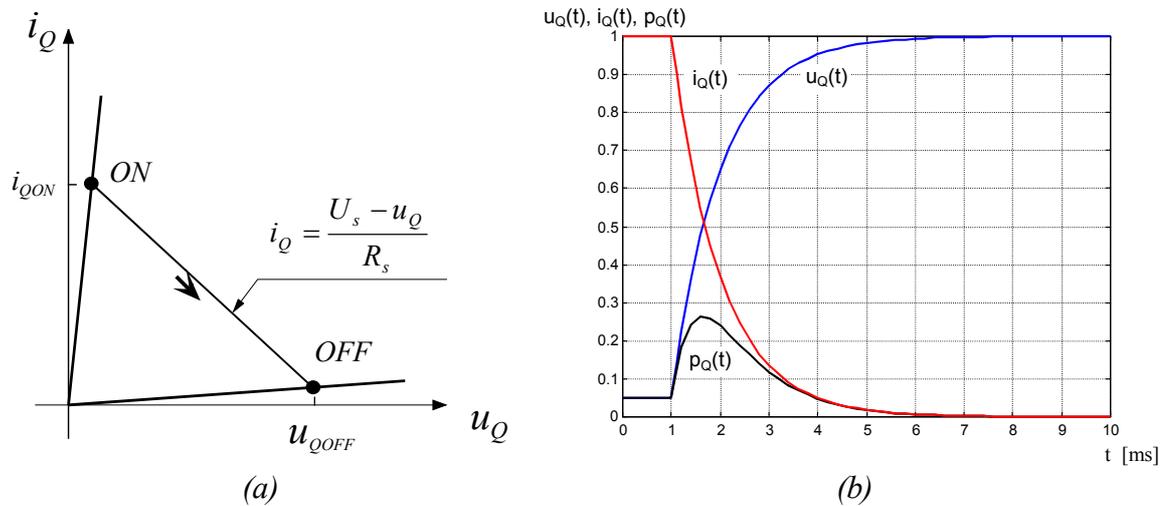


Figure 1-5 : Comportement dynamique de l'interrupteur à l'ouverture

1.2.5 Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge inductive

La Figure 1-6 (b) présente la caractéristique d'un interrupteur. A l'état bloqué (OFF), la résistance d'isolation prend la valeur R_{OFF} et à l'état fermé (ON), la résistance de passage est égale à $R_{ON} = R_{OFF} / r_{ON}$.

La charge connectée à cet interrupteur est de type inductif.

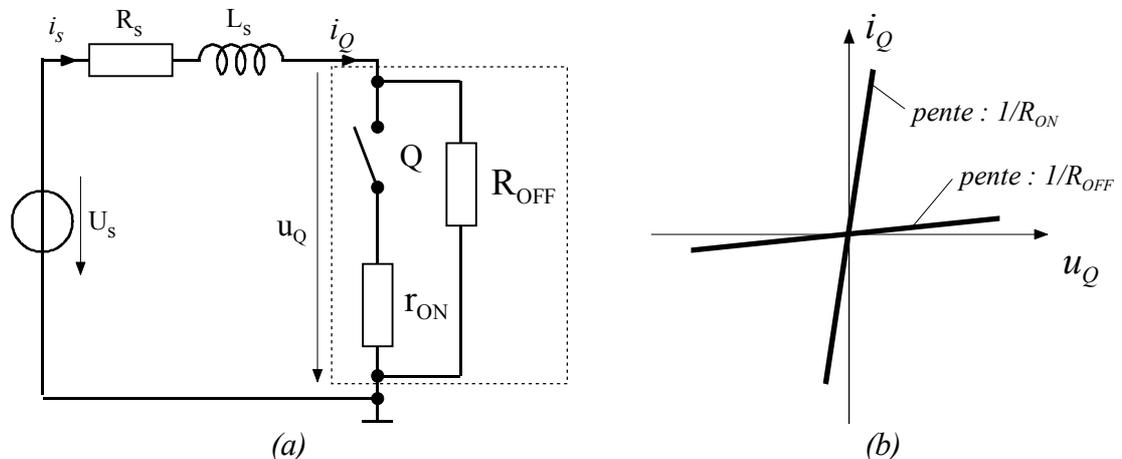


Figure 1-6 : Représentation schématique d'un interrupteur sur charge inductive

1.2.5.1 Caractéristiques dynamiques (OFF → ON)

Lorsque l'interrupteur est à l'état OFF, on peut définir le point de fonctionnement avant commutation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{Q(OFF)} &= \frac{R_{OFF}}{R_s + R_{OFF}} \cdot U_s \\ i_{Q(OFF)} &= \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}} \end{aligned} \quad 1.11$$

Ces deux grandeurs représentent les conditions initiales lors de la commutation. A la fermeture de l'interrupteur, on peut écrire la relation liant les tensions de la maille principale du montage.

$$U_s = u_{L_s}(t) + u_{R_s}(t) + u_Q(t)$$

$$U_s = L_s \cdot \frac{di_s(t)}{dt} + (R_s + R_{ON}) \cdot i_s(t)$$

avec pour condition initiale:

$$i_Q(0) = \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}}$$

la solution générale de cette équation différentielle prend la forme

$$i_Q(t) = \frac{U_s}{R_s + R_{ON}} \cdot (1 - e^{-t(R_s + R_{ON})/L}) + \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}} \cdot e^{-t(R_s + R_{ON})/L}$$

$$u_Q(t) = R_{ON} \cdot i_Q(t)$$

La seconde expression des relations 1.13 montre que la trajectoire du point de fonctionnement dans la phase dynamique est parfaitement définie. Il s'agit d'une droite confondue avec la caractéristique "ON" de l'interrupteur. Le paramètre t donne la vitesse de déplacement de la paire u_Q , i_Q sur cette droite.

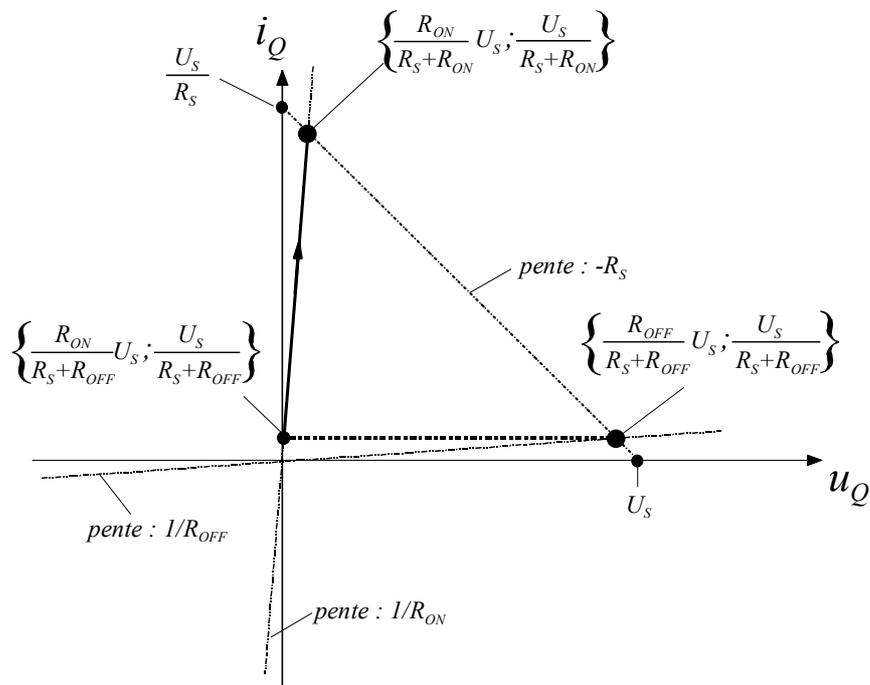
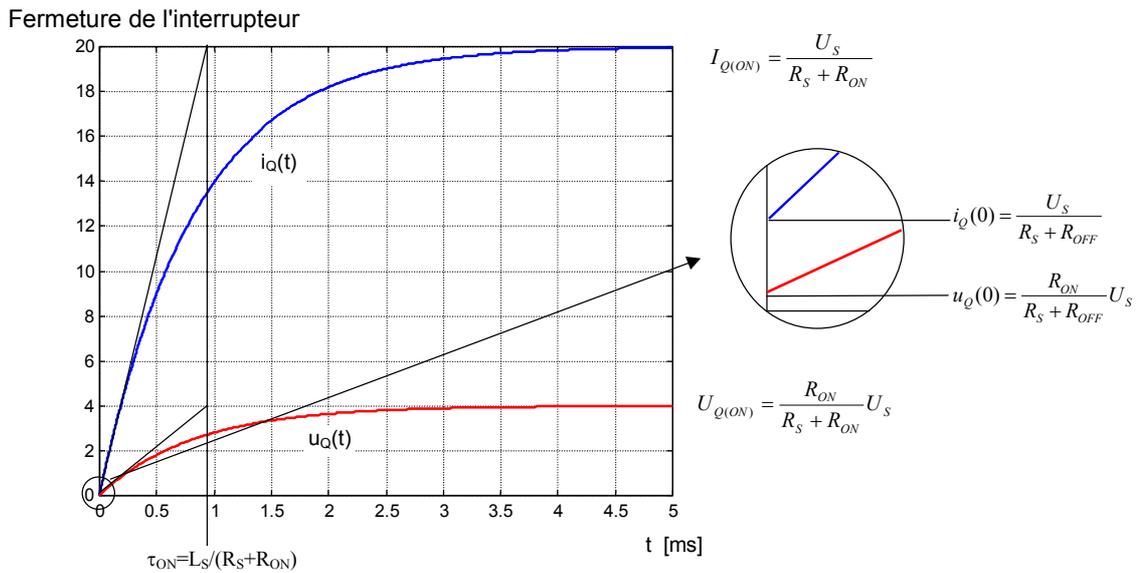


Diagramme de fonctionnement



Dans le cas de la fermeture de l'interrupteur sous charge inductive, il n'y a pas de perte de commutation pour un interrupteur sans capacité parasite.

1.2.5.2 Caractéristiques dynamiques (ON→OFF)

Lorsque l'interrupteur est à l'état ON, le point de fonctionnement avant commutation vaut :

$$u_{Q(ON)} = \frac{R_{ON}}{R_s + R_{ON}} \cdot U_s$$

$$i_{Q(ON)} = \frac{U_s}{R_s + R_{ON}}$$
1.14

Ces deux grandeurs représentent les conditions initiales lors de la commutation. A l'ouverture de l'interrupteur, on peut écrire la relation liant les courants au nœud d'une des bornes de l'interrupteur

$$U_s = u_{L_s}(t) + u_{R_s}(t) + u_Q(t)$$

$$U_s = L_s \cdot \frac{di_s(t)}{dt} + (R_s + R_{OFF}) \cdot i_s(t)$$

avec pour condition initiale:

$$i_Q(0) = \frac{U_s}{R_s + R_{ON}}$$
1.15

la solution générale de cette équation différentielle prend la forme

$$i_s(t) = i_Q(t) = \frac{U_s}{R_s + R_{OFF}} \cdot (1 - e^{-t(R_s + R_{OFF})/L}) + \frac{U_s}{R_s + R_{ON}} \cdot e^{-t(R_s + R_{OFF})/L}$$

$$u_Q(t) = R_{OFF} \cdot i_Q(t)$$
1.16

La seconde expression des relations 1.16 exprime la trajectoire du point de fonctionnement durant la phase dynamique. Il s'agit d'une droite confondue avec la caractéristique "OFF" de l'interrupteur. Le paramètre t donne la vitesse de déplacement de la paire u_Q, i_Q sur cette droite.

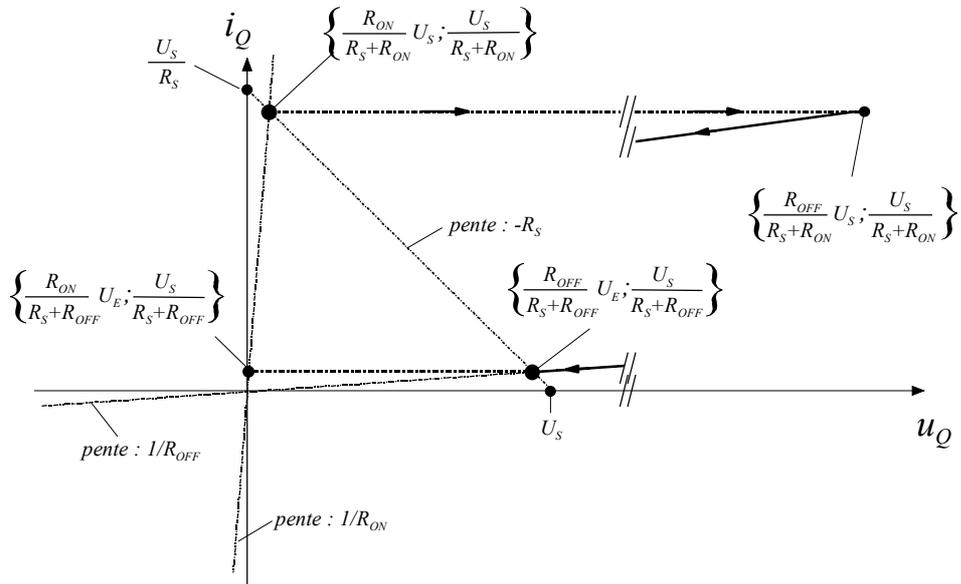
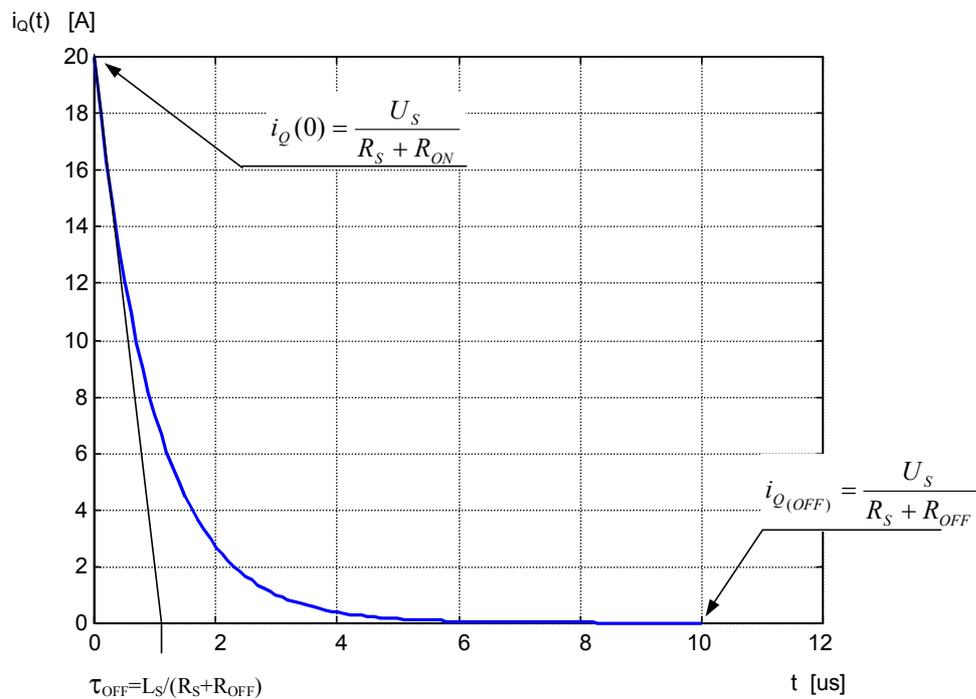


Figure 1-8 : Diagramme de fonctionnement de l'interrupteur à l'ouverture



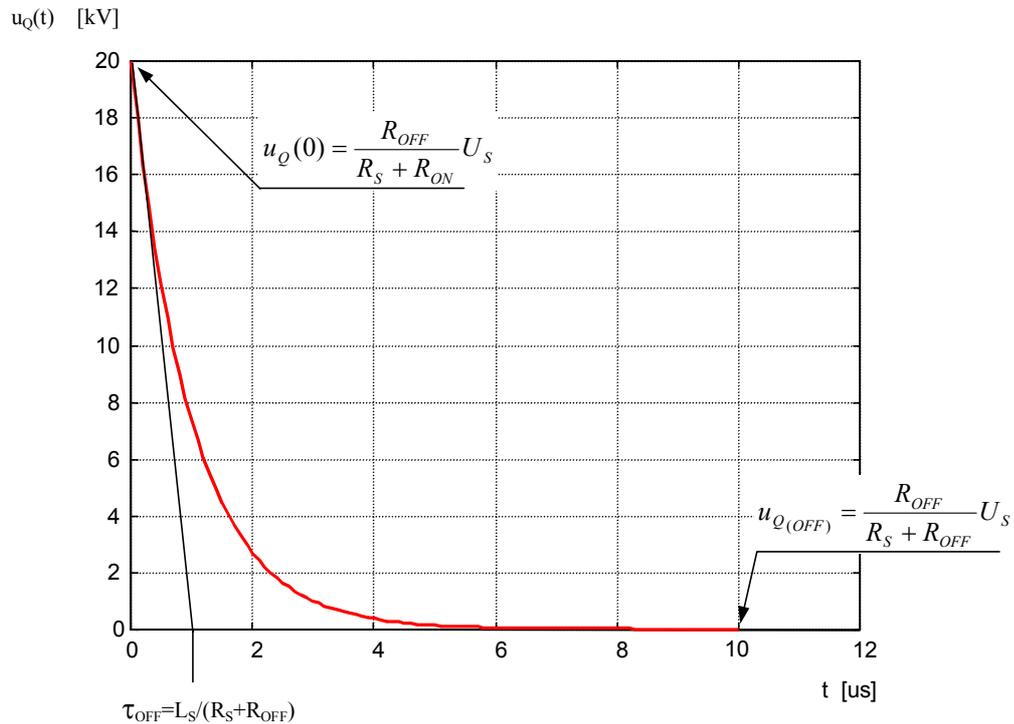


Figure 1-9 : Comportement dynamique de l'interrupteur à l'ouverture

Dans ce cas les pertes de commutation sont très importantes. En effet l'inductance L_s se comporte comme une source de courant. Lorsque l'on provoque une ouverture du circuit par l'interrupteur, le courant ne peut s'interrompre brusquement. Une surtension dépendant du produit de la résistance de fuite de l'interrupteur (R_{OFF}) et du courant circulant dans l'inductance au moment de l'ouverture de l'interrupteur.

1.2.6 Interrupteur avec résistance interne et résistance de fuite sous charge capacitive

En utilisant le principe de dualité, on peut transformer le schéma de la Figure 1-6 par celui de la Figure 1-10 (a). En effet en remplaçant la source de tension U_S par une source de courant I_S , les résistances R par des conductances G , l'inductance L par une capacité C , l'interrupteur avec les états inversés (fermé \leftrightarrow ouvert) on obtient une parfaite similitude entre les deux structures. En assignant les valeurs des éléments de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \{I_S\} &= \{U_S\} \\
 \{C_S\} &= \{L_S\} \\
 \{G_S\} &= \{R_S\} \\
 \{ON\} = \{OFF\} &\Rightarrow \begin{cases} \{G_{ON}\} = \{R_{OFF}\} \\ \{g_{OFF}\} = \{r_{ON}\} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

on peut simplement intervertir les valeurs de la tension u_Q avec le courant i_Q du cas de la charge de type inductive.

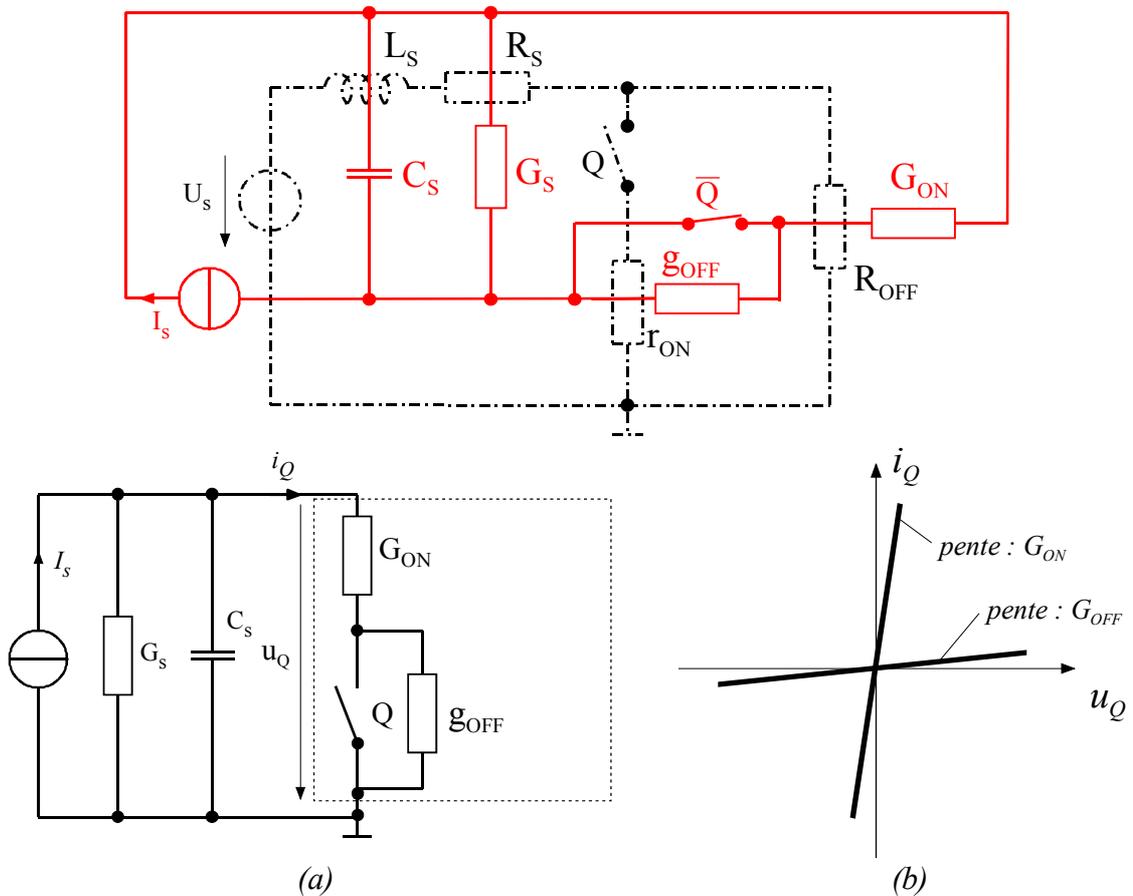


Figure 1-10 : Représentation schématique d'un interrupteur sur charge capacitive

avec

$$G_{OFF} = \frac{G_{ON} g_{OFF}}{G_{ON} + g_{OFF}} \quad 1.18$$

1.2.6.1 Caractéristiques dynamiques (OFF \rightarrow ON)

Par analogie avec la charge inductive définie au paragraphe précédent, on peut montrer que le diagramme de fonctionnement prendra l'allure de la Figure 1-11. Le soin est laissé au lecteur de vérifier la véracité du résultat.

Dans le cas de la fermeture de l'interrupteur sous charge capacitive, il y a de fortes pertes de commutation dues au courant capacitif limité que par la conductance G_{ON} .

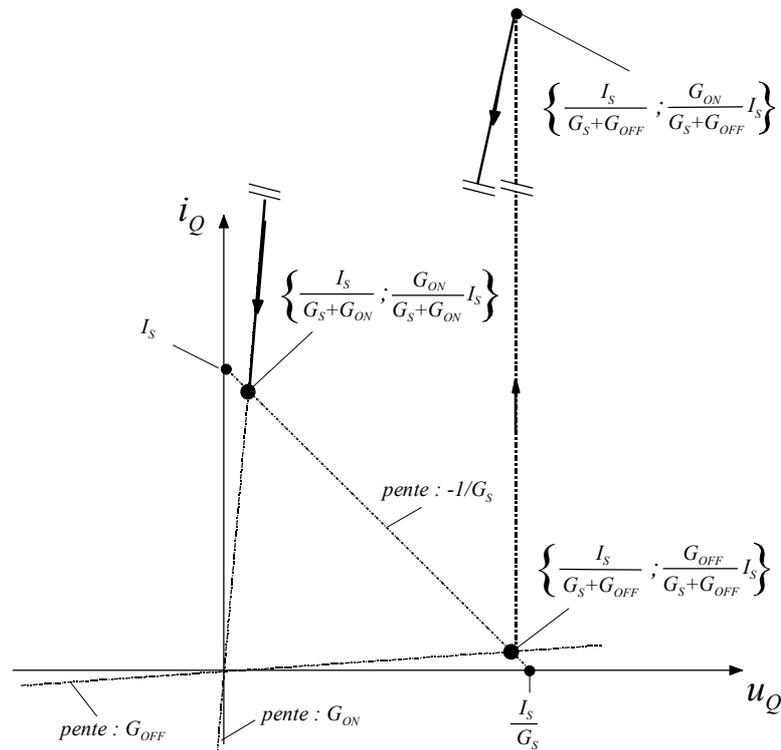


Figure 1-11 : Comportement dynamique de l'interrupteur à la fermeture : Diagramme de fonctionnement

1.2.6.2 Caractéristiques dynamiques (ON→OFF)

Toujours par analogie avec le cas de la charge inductive, on obtient pour le diagramme de fonctionnement l'allure de la Figure 1-12.

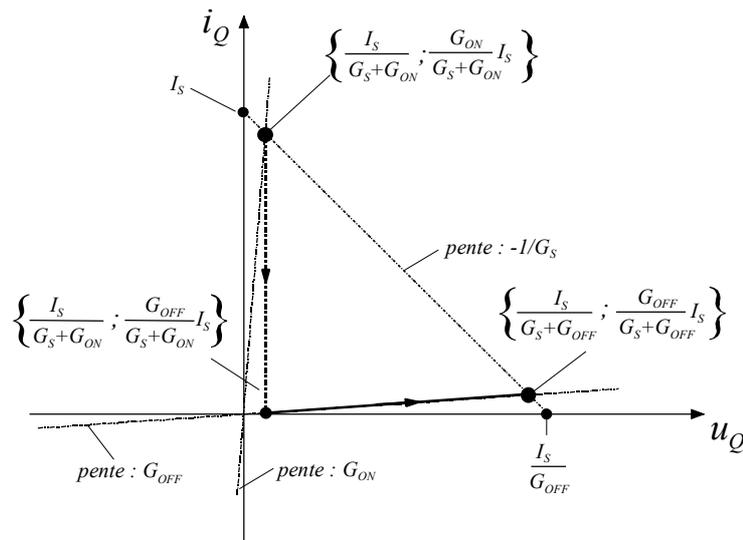


Figure 1-12 : Comportement dynamique de l'interrupteur à l'ouverture

Dans ce cas les pertes de commutation sont nulles, le courant aux bornes de l'interrupteur étant immédiatement limité.

1.2.7 Diagramme de fonctionnement, cas réel

On appelle diagramme de fonctionnement la trajectoire de la paire u_Q, i_Q lors d'un cycle de commutation. Dans les paragraphes précédents, nous avons vu une décomposition de cas simples. Dans la majorité des cas réels, la charge est inductive (moteur, transformateur, filtre, ...) et l'interrupteur possède une caractéristique complexe (MOSFET, IGBT, transistor bipolaire BJT, ...).

En superposant le diagramme de fonctionnement avec les aires de sécurité des composants semiconducteurs de puissance, on peut s'assurer que le composant choisi est apte à supporter les transitoires de commutation, notamment la surintensité à la fermeture et la surtension à l'ouverture. Ce point sera développé à la suite du cours.

Les diagrammes de fonctionnement pour les trois cas de charge que sont la résistance, la capacité et l'inductance prendront donc les allures définies aux paragraphes suivants:

1.2.7.1 Perte de commutation sur charge résistive

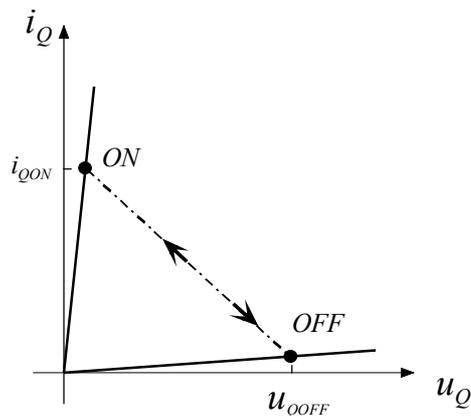


Figure 1-13 : Diagramme de fonctionnement réel pour une charge résistive

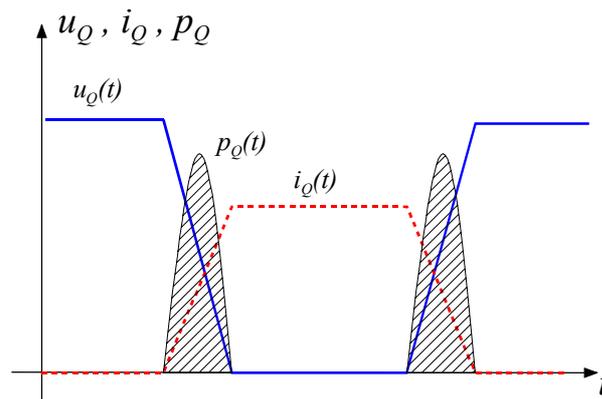


Figure 1-14 : Perte de commutation pour une charge résistive

Si les caractéristiques dynamiques de l'interrupteur sont identiques à la fermeture et à l'ouverture, les pertes de commutation OFF \rightarrow ON et ON \rightarrow OFF sont identiques dans le cas d'une charge résistive.

1.2.7.2 Perte de commutation sur charge inductive

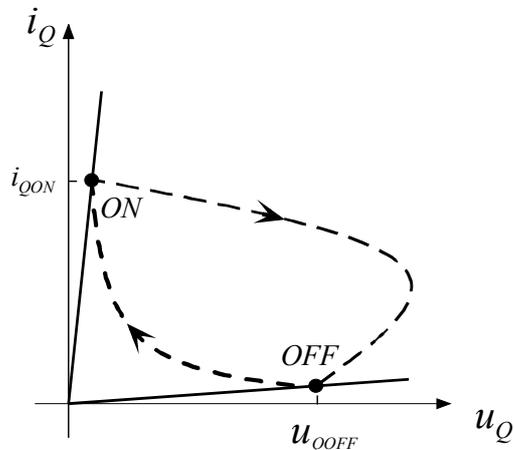


Figure 1-15 : Diagramme de fonctionnement réel pour une charge inductive

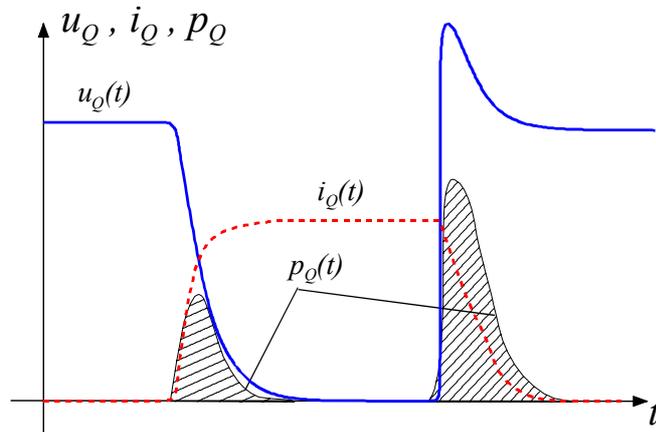


Figure 1-16 : Perte de commutation pour une charge inductive

Dans ce cas, l'inductance se comporte comme une source de courant. Lors de la fermeture de l'interrupteur, le courant ne peut croître instantanément, de ce fait les pertes de commutation OFF \rightarrow ON sont réduites (par rapport au cas d'une charge résistive). Par contre, lors de l'ouverture de l'interrupteur, le courant de la charge ne peut diminuer instantanément. Il y aura donc une forte augmentation de la tension aux bornes de l'interrupteur afin de forcer le passage du courant. Les pertes de commutation ON \rightarrow OFF seront donc augmentées (par rapport au cas d'une charge résistive)

1.2.7.3 Perte de commutation sur charge capacitive

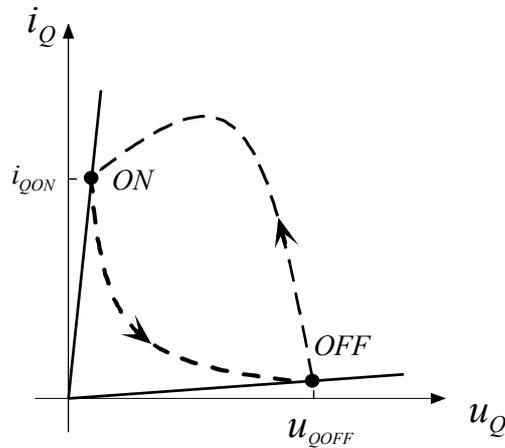


Figure 1-17 : Diagramme de fonctionnement réel pour une charge capacitive

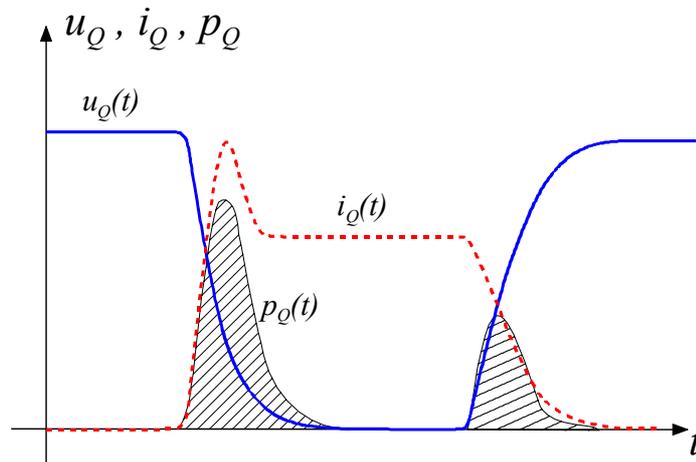


Figure 1-18 : Perte de commutation pour une charge capacitive

Dans ce cas, la capacité se comporte comme une source de tension. Lors de la fermeture de l'interrupteur, il y a une pointe de courant qui provoque une augmentation des pertes de commutation OFF \rightarrow ON (par rapport au cas d'une charge résistive). Par contre lors de l'ouverture de l'interrupteur, la tension aux bornes de celui-ci ne peut croître instantanément. De ce fait, les pertes de commutation ON \rightarrow OFF sont réduites (par rapport au cas d'une charge résistive)

1.2.7.4 Conclusion

En guise de conclusion, on dira que pour minimiser les pertes de commutation dans les semiconducteurs jouant le rôle d'interrupteur, il serait souhaitable de réaliser une fermeture sur charge à caractère inductif et une ouverture sur charge à caractère capacitif.

ANNEXE**A.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE**

Afin de clarifier l'utilisation des relations faisant intervenir les équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre à coefficients constants, des exemples théoriques et pratiques sont donnés dans cette annexe.

A.1.1 Exemple théorique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \quad \text{A. 1}$$

où a et b sont des constantes. Cherchons tout d'abord la solution de l'équation générale homogène

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \quad \text{A. 2}$$

En posant pour solution de l'équation homogène la forme générale

$$y_g = Ce^{kx} \quad \text{A. 3}$$

on obtient l'équation caractéristique

$$k + a = 0 \quad \text{A. 4}$$

Par suite la solution de l'équation homogène est

$$y_g = Ce^{-ax} \quad \text{A. 5}$$

Cherchons à présent la solution particulière y_p de l'équation non homogène sous la forme

$$y_p = B \quad \text{A. 6}$$

En substituant dans la relation A. 1, on obtient

$$B = \frac{b}{a} \quad \text{A. 7}$$

Et la solution générale de l'équation est

$$y = y_g + y_p = Ce^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{A. 8}$$

La constante C est obtenue par la connaissance de la condition initiale. En effet

$$y(0) = C + \frac{b}{a} \quad \text{A. 9}$$

et par conséquent

$$y(x) = \left(y(0) - \frac{b}{a} \right) \cdot e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{A. 10}$$

Dans le cadre de ce cours, on a pour habitude d'écrire cette relation sous une autre forme

$$y(x) = \frac{b}{a} \cdot (1 - e^{-ax}) + y(0) \cdot e^{-ax} \quad \text{A. 11}$$

Dans la plupart des cas, $a > 0$. La signification physique des divers termes est donc la suivante

$$y(x) = \underbrace{\frac{b}{a}}_{\text{Valeur finale}} \cdot (1 - e^{-ax}) + \underbrace{y(0)}_{\text{Valeur initiale}} \cdot e^{-ax} \quad \text{A. 12}$$

A.1.2 Exemple : Circuit RL

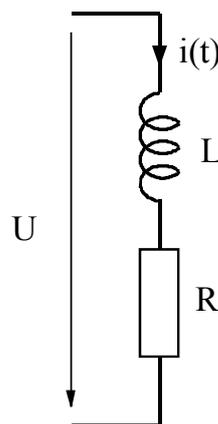


Figure A.1 : Inductance réelle soumise à une tension

$$i(t) = \underbrace{\frac{U}{R}}_{\text{Valeur finale}} \cdot \left(1 - e^{-t/L/R} \right) + \underbrace{i(0)}_{\text{Valeur initiale}} \cdot e^{-t/L/R} \quad \text{A. 13}$$

A.2 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE

Afin de clarifier l'utilisation des relations faisant intervenir les équations différentielles linéaires du 2^{ème} ordre à coefficients constants, des exemples théoriques et pratiques sont donnés dans cette annexe.

A.2.1 Exemple théorique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = c \quad \text{A. 14}$$

où a, b et c sont des constantes. Cherchons tout d'abord la solution de l'équation générale homogène

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad \text{A. 15}$$

En posant pour solution de l'équation homogène la forme générale

$$y_g = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad \text{A. 16}$$

on obtient l'équation caractéristique

$$k^2 + a \cdot k + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \\ k_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \end{cases} \quad \text{A. 17}$$

L'intégrale générale est donc de la forme:

$$y_g(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} \right) \quad \text{A. 18}$$

Cherchons à présent la solution particulière y_p de l'équation non homogène sous la forme

$$y_p = C \quad \text{A. 19}$$

En substituant dans la relation A. 1, on obtient

$$C = \frac{c}{b} \quad \text{A. 20}$$

Et la solution générale de l'équation est

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} + C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} \right) + \frac{c}{b} \quad \text{A. 21}$$

La constante C est obtenue par la connaissance des conditions initiales. En effet

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{c}{b} \quad \text{A. 22}$$

et pour la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} = & -\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(C_1 \cdot e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} \right) \\ & + e^{-\frac{a}{2}x} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot \left(C_1 \cdot e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} - C_2 \cdot e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \cdot x}} \right) \end{aligned} \quad \text{A. 23}$$

$$\frac{dy(0)}{dx} = -\frac{a}{2} \cdot (C_1 + C_2) + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot (C_1 - C_2) \quad \text{A. 24}$$

Les coefficients C_1 et C_2 prennent la forme suivante

$$C_1 = \frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(y(0) - \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \frac{dy(0)}{dx} \quad \text{A. 25}$$

$$C_2 = \frac{-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \left(y(0) - \frac{c}{b} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \frac{dy(0)}{dx} \quad \text{A. 26}$$

et par conséquent

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} - e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} + \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} + e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x}}{2} \right) \cdot y(0)$$

$$+ e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} - e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \right) \cdot \frac{dy(0)}{dx}$$

A. 27

$$\left(1 - e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} - e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} + \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x} + e^{-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x}}{2} \right) \right) \frac{c}{b}$$

Les trois cas qui peuvent se présenter sont décrits dans les paragraphes suivants.

A.2.1.1 Les termes k_1 et k_2 sont réels et identiques

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0$$

A. 28

sachant que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k} \right) = x \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{e^{(kx)} - e^{-(kx)}}{2(kx)} \right) = x$$

A. 29

on obtient finalement

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2} \cdot x + 1 \right) \cdot y(0) + x e^{-\frac{a}{2}x} \frac{dy(0)}{dx} + \left(1 - e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2} \cdot x + 1 \right) \right) \cdot \frac{c}{b}$$

A. 30

A.2.1.2 Les termes k_1 et k_2 sont réels et distincts

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0$$

A. 31

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x\right) + \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x\right) \right) \cdot y(0)$$

$$+ e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \right) \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x\right) \frac{dy(0)}{dx}$$

A. 32

$$\left(1 - e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x\right) + \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \cdot x\right) \right) \right) \frac{c}{b}$$

A.2.1.3 Les termes k_1 et k_2 sont réels et distincts

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0$$

A. 33

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) + \cos\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) \right) \cdot y(0)$$

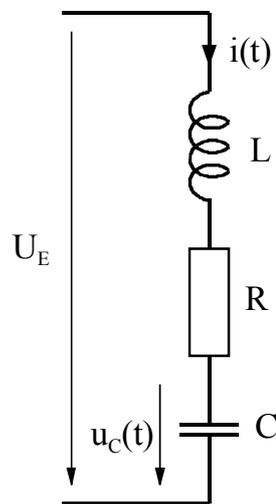
$$+ e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \right) \cdot \sin\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) \frac{dy(0)}{dx}$$

A. 34

$$\left(1 - e^{-\frac{a}{2}x} \left(\frac{a}{2\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) + \cos\left(\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x\right) \right) \right) \frac{c}{b}$$

A.2.2 Exemple : Circuit RLC

On prendra comme exemple un grand classique, soit le circuit RLC



Conditions initiales : $u_C(0)=10V$
 $i(0)=20A$

Valeurs des composants : $L=1mH$
 $C=1\mu F$
 $R=63\Omega$
 150Ω
 5Ω

Figure A.2 : Circuit RLC

Du circuit ci-dessus, on peut écrire l'équation différentielle

$$U_E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) \quad A. 35$$

Le courant circulant dans le condensateur a pour expression

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad A. 36$$

On arrive à une équation différentielle linéaire non homogène du 2^{ème} ordre

$$U_E = LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \quad A. 37$$

La condition initiale pour la tension aux bornes du condensateur vaut

$$u_C(0) = 0 \quad A. 38$$

La condition initiale pour le courant dans le condensateur vaut

$$\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{1}{C} i(0) \quad A. 39$$

En utilisant les résultats du paragraphe A.2.1, on obtient la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} & \left(\frac{R}{2L} \cdot \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t}}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} + \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t} + e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t}}{2} \right) \cdot u_C(0) \\
 & + \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{C} \cdot \left(\frac{e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t}}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \right) \cdot i(0) \\
 & \left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{R}{2L} \cdot \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t}}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} + \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t} + e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}t}}{2} \right) \right) \cdot U_E
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

que l'on peut subdiviser en trois cas distincts

A.2.2.1 Premier cas : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$u_C(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{R}{2L} \cdot t + 1 \right) \cdot u_C(0) + t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{1}{C} \cdot i(0) + \left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{R}{2L} \cdot t + 1 \right) \right) \cdot U_E \tag{A.41}$$

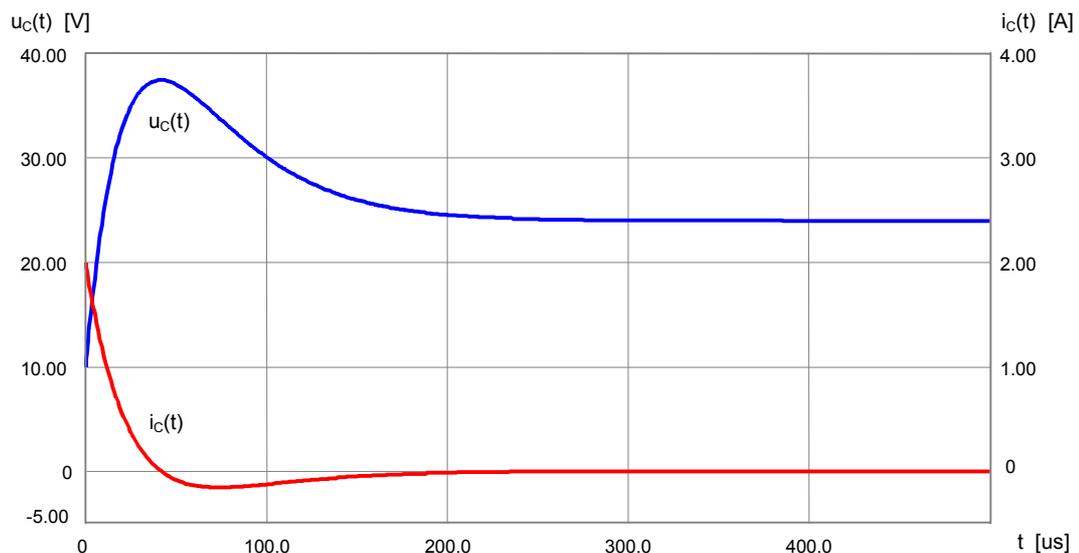


Figure A.3 : $C=1\mu F$, $L=1mH$, $R=63\Omega$

A.2.2.2 Deuxième cas : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$

$$u_c(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{R}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \cdot t\right) + \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \cdot t\right) \right) \cdot u_c(0)$$

$$+ e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \left(\frac{1}{C\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \cdot t\right) \right) \cdot i(0)$$

A. 42

$$\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{R}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \cdot t\right) + \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \cdot t\right) \right) \right) \cdot U_E$$

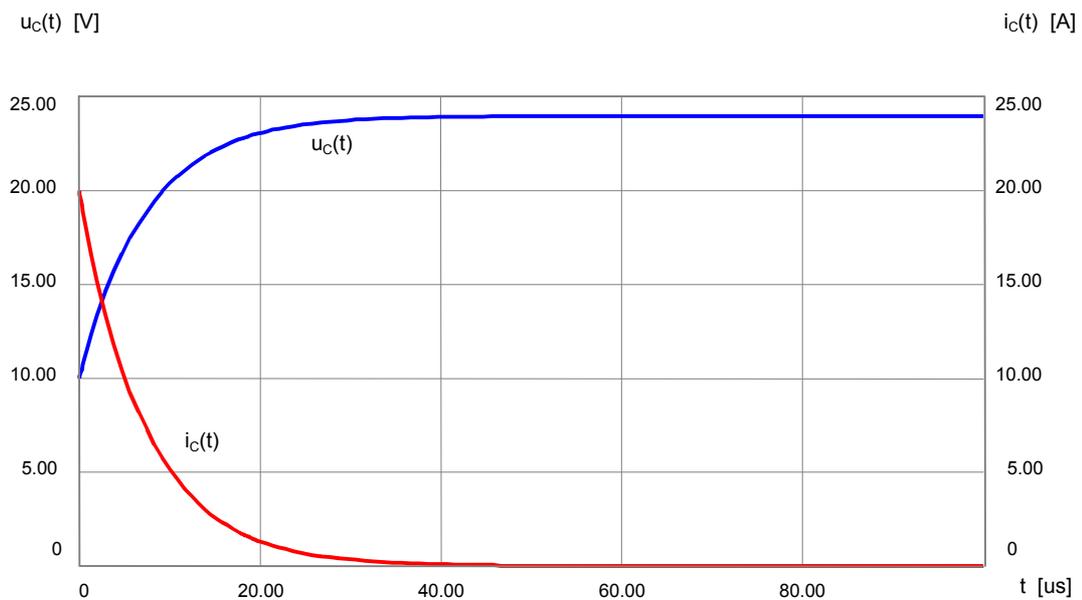


Figure A.4 : $C=1\mu F$, $L=1mH$, $R=150\Omega$

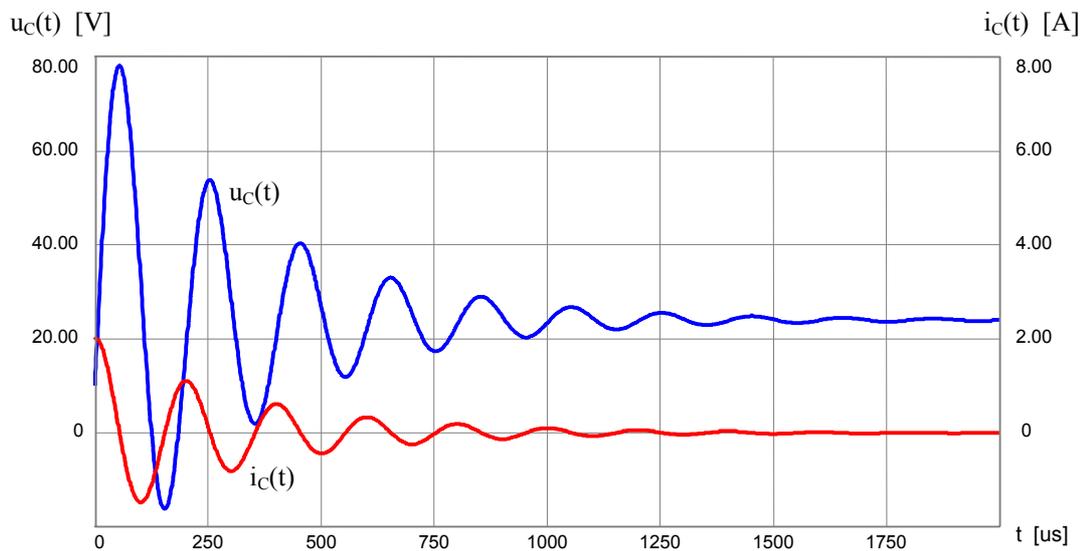
A.2.2.3 Troisième cas : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$

$$u_C(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t\right) \right] \cdot u_C(0)$$

$$+ e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \left[\frac{1}{C\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t\right) \right] \cdot i(0)$$

A. 43

$$\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \cdot t\right) \right] \right) \cdot U_E$$

Figure A.5 : $C=1\mu F$, $L=1mH$, $R=5\Omega$