

ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE - Partie D

ELEMENTS D'INFORMATION SUR LES DISPOSITIFS DE RECONSTRUCTION TRIDIMENSIONNELLE

Temps de préparation :2 h 15 minutes

Temps de présentation devant le jury :10 minutes

Entretien avec le jury :10 minutes

GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 15 pages

Document principal (15 pages) : Times New Roman 12

Travail suggéré au candidat :

Le candidat lira attentivement le dossier et devra être en mesure de faire une synthèse en mettant en évidence les différents points abordés dans l'étude.

Par ailleurs, le candidat devra être capable de bien différencier les différentes méthodes de reconstruction tridimensionnelle. En particulier, il devra être capable de préciser quelles sont les sources d'erreurs dans chaque cas et comment on peut les réduire.

Enfin, le candidat devra aussi être capable d'envisager d'autres applications que celles proposées à la fin du document.

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

ELEMENTS D'INFORMATION SUR LES DISPOSITIFS DE RECONSTRUCTION TRIDIMENSIONNELLE

Introduction

5 Les dispositifs optiques de reconstruction tridimensionnelle permettent d'analyser le déplacement de solides poly-articulés au cours du temps. Les lois de la mécanique imposent alors d'analyser le déplacement de 3 points au minimum sur chaque solide pour déterminer intégralement sa position tridimensionnelle au cours du temps. Dans ce document, nous présenterons le principe de fonctionnement des dispositifs qui permettent de réaliser cette analyse des déplacements tridimensionnels d'un ou de plusieurs solides. Les applications seront présentées à la fin de ce document.

Principe général

15 Les dispositifs optiques d'analyse du mouvement sont composés de caméras (2 au minimum) qui filment la position de repères précis sur les solides à étudier au cours du mouvement. Ces points précis sont repérés généralement par des marqueurs sphériques placés sur les solides à étudier et qui présentent un contraste important avec le reste de l'image afin de les détecter aisément. Une station de données enregistre la position successive des marqueurs pour chaque caméra. Une station de calcul (micro-ordinateur, calculateurs) permet ensuite la reconstruction tridimensionnelle de la position des marqueurs à partir des informations de chaque caméra (fig.1).

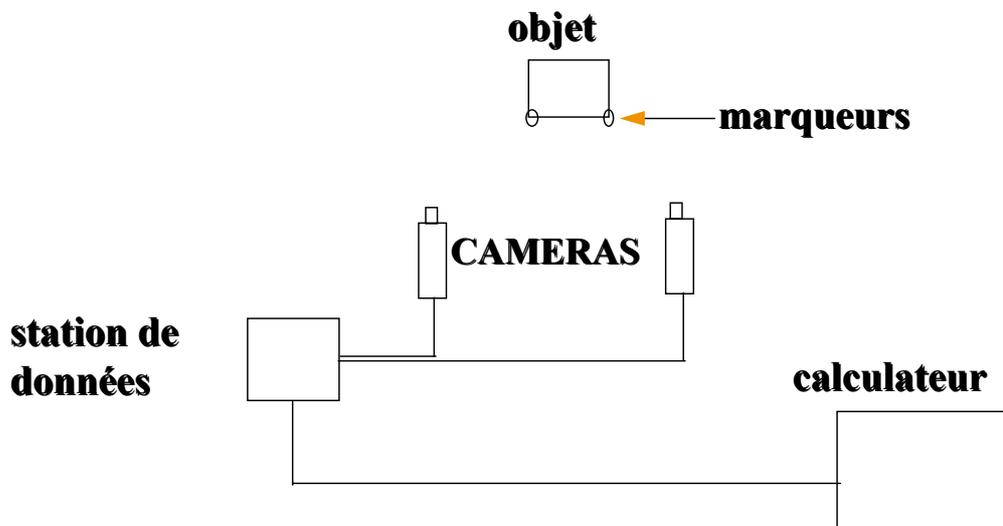


Figure 1 : configuration générale d'un système d'analyse du mouvement tridimensionnel

25 Caméras

Les caméras utilisées actuellement par ces dispositifs optiques d'analyse du mouvement, sont des caméras numériques. Ces caméras fonctionnent à différentes fréquences d'échantillonnage selon les applications. Les caméras standards enregistrent 25 images par seconde (25 Hz.) Mais si l'on souhaite étudier plus précisément des déplacements rapides (i.e. choc automobile, contact

30 balle/raquette, ...) on utilise des caméras cadencées plus rapidement. Ainsi, aujourd'hui certaines caméras fonctionnent jusqu'à 5000Hz.

Très schématiquement, une caméra fonctionne de la façon suivante (voir figure 2). Le point O désignant le centre optique de la caméra, l'image géométrique du point P de coordonnées X, Y et Z se trouve dans le plan focal image, à l'intersection du rayon issu de P et passant par O. Le plan

35 représenté grisé sur la figure 2 est le symétrique par rapport à O du plan focal image. Comme ce dernier, il est situé à la distance focale c du point O selon l'axe optique de la caméra, mais du même côté que P. Le point p_1 , intersection du plan grisé et du rayon PO, est appelé image de P et le plan grisé, plan image. Le modèle présenté ici permet de travailler sur des images non renversées. La numérisation de l'image de la caméra permet alors de déterminer sur quel pixel est

40 situé le point p_1 et on peut récupérer les coordonnées de ce point, soit x_1 et y_1 (coordonnées en pixels : ce sont donc des nombres entiers).

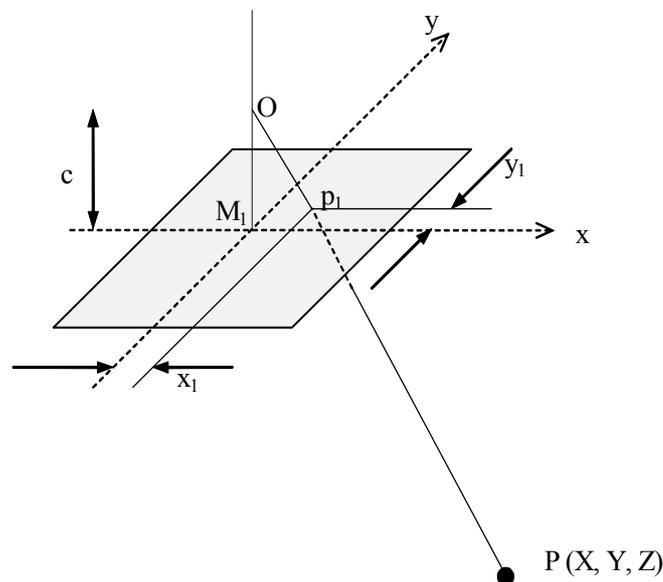


Figure 2 : schéma de principe d'une caméra

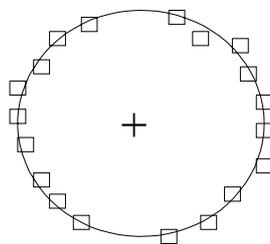
Détection et localisation des marqueurs sur le plan image de la caméra

45 Les marqueurs sont recouverts le plus souvent de ruban adhésif réfléchissant ce qui permet un contraste important avec le reste de l'image (figure 3). Ils sont généralement sphériques ; ainsi, quel que soit l'angle fait par la caméra avec l'objet, le marqueur a toujours la même image.



50 Figure 3 : Marqueurs et exemple de détection sur un mouvement de pédalage

Le dispositif enregistre ensuite sur chaque image le contour du marqueur (figure 4). Généralement, il faut que le marqueur intercepte une grille d'au moins 4 sur 4 pixels pour pouvoir calculer suffisamment précisément son centre. Ensuite, on trouve différentes méthodes
55 permettant de localiser le centre du marqueur. Un des algorithmes permettant la localisation du marqueur, superpose à la tâche un cercle plein de dimension égale à celle du marqueur: le centre est ensuite assimilé au centre du cercle. Avec cette technique, le centre est localisé avec une résolution inférieure au pixel : les coordonnées du centre sont fournies avec 1 ou 2 chiffres après la virgule.



60 Figure 4 : + Centre du cercle corrélé à la tâche = centre du marqueur

Naturellement, on voit ici que la précision de la localisation du centre du marqueur est simultanément liée à la résolution de la caméra ainsi qu'à la taille du marqueur.

Principe général de la reconstruction 3D

70 *Etude du cas normal*

La figure 5 schématise la configuration générale d'un dispositif de reconstruction 3D. Dans cette première représentation, les deux caméras sont dans le même plan (on parle de "cas normal"), ce qui est pratiquement irréalisable.

- 75
- Soit \mathfrak{R} le repère (O, X, Y, Z) , le repère global de l'espace.
 - Soient \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 les repères (M_1, x, y, Z) et (M_2, x, y, Z) des images 1 et 2.
 - On note c_1 et c_2 les distances focales respectives des caméras 1 et 2.
 - B est la coordonnée sur X du centre optique O_2 de la caméra 2 (écartement entre les deux
- 80 caméras). B s'appelle aussi la base du dispositif.
- Les points O_1 et O_2 sont les centres optiques des caméras 1 et 2. Ces points ont pour coordonnées respectives (x_{01}, y_{01}, c_1) dans \mathfrak{R}_1 et (x_{02}, y_{02}, c_2) dans \mathfrak{R}_2 . Sur notre schéma, puisque les points M_1 et O_1 sont alignés sur l'axe des Z, on a $x_{01} = y_{01} = 0$. De même, $x_{02} = y_{02} = 0$.
- 85
- Z est la coordonnée suivant l'axe Z dans \mathfrak{R} des points focaux O_1 et O_2 des caméras 1 et 2.
 - Le point P de coordonnées X, Y et 0 dans \mathfrak{R} est le point de l'espace dont on recherche les coordonnées. Les points p_1 de coordonnées $x_1, y_1, 0$ dans \mathfrak{R}_1 et p_2 de coordonnée $x_2, y_2, 0$ dans \mathfrak{R}_2 sont les images du point P dans les plans images des caméras 1 et 2. Dans la réalité les coordonnées X, Y et 0 sont celles du centre du marqueur situé au niveau du
- 90 point P (voir plus haut).

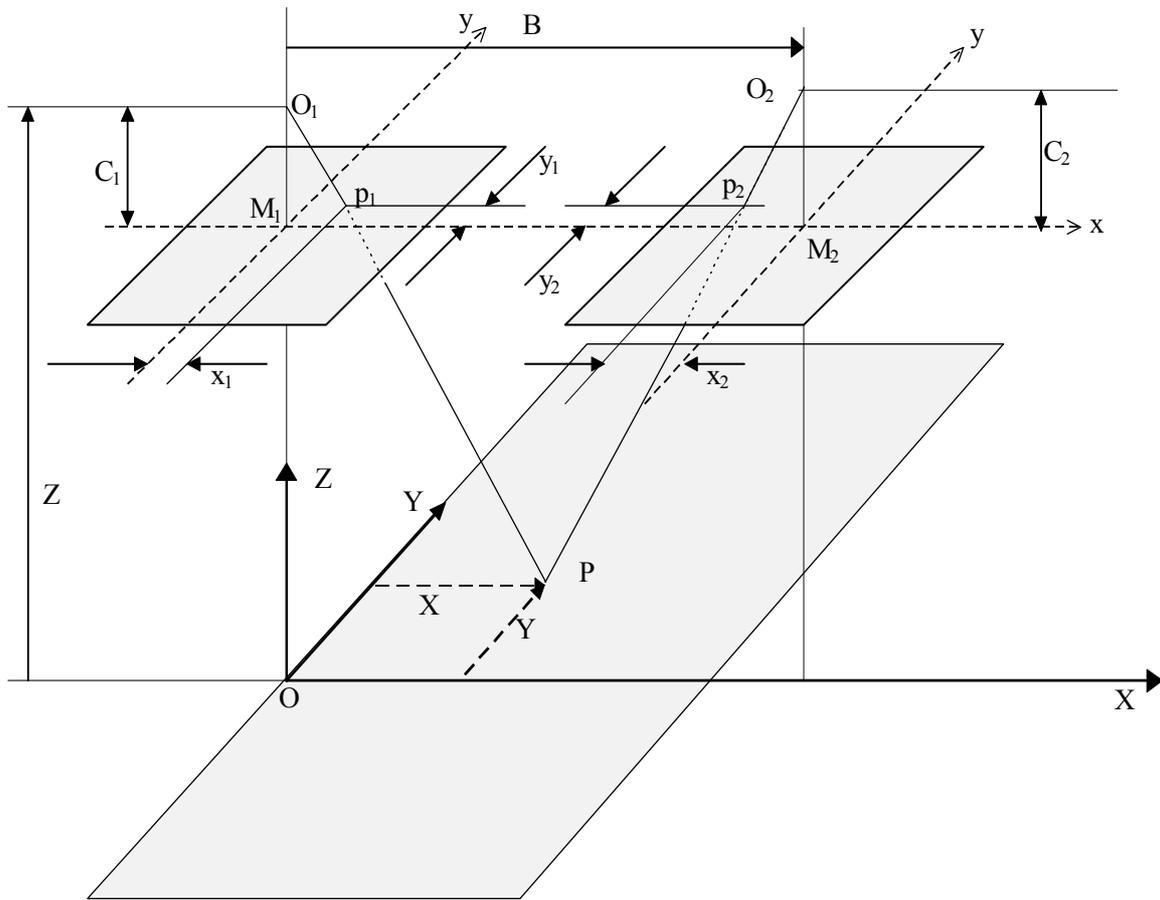


Figure 5 : schéma de principe d'un système vidéo

95

Dans le cas général, on obtient par simple utilisation des caractéristiques géométriques du schéma précédent, les relations suivantes:

$$x_1 = \frac{X}{Z} c_1 \quad (a)$$

$$x_2 = \frac{X - B}{Z} c_2 \quad (b)$$

100

(1.1)

$$y_1 = \frac{Y}{Z} c_1 \quad (c)$$

$$y_2 = \frac{Y}{Z} c_2 \quad (d)$$

Dans le cas général où $c_1 = c_2 = c$ (utilisation de caméras identiques), les équations précédentes deviennent après simplification:

105

$$X = B \frac{x_1}{x_1 - x_2} \quad (\text{D'après 1.1.a et 1.1.b})$$

$$Y = Z \frac{y_1 + y_2}{2c} \quad (\text{D'après 1.1.c et 1.1.d}) \quad (1.2)$$

$$Z = B \frac{c}{x_1 - x_2} \quad (\text{D'après 1.1.a et 1.1.b})$$

110 Ces relations sont les formules de base permettant de relier les coordonnées bidimensionnelles des caméras aux coordonnées tridimensionnelles. Cependant, comme on l'a déjà vu, il est dans la pratique impossible d'aligner les deux caméras dans le même plan.

Par ailleurs, les caméras sont des dispositifs optiques présentant certaines déformations de l'image (on parle de distorsion : voir ligne 202). Ces déformations optiques (liées à la qualité des lentilles du dispositif) amènent une erreur sur le positionnement du marqueur. Ces erreurs créent automatiquement une imprécision sur le positionnement 3D de l'objet. Soit donc, m l'écart type
115 commis sur chaque coordonnée des points p_1 et p_2 . Soit m_X , m_Y , m_Z les écarts types que cela induit sur les coordonnées X, Y et Z du point P. La position optimale des caméras est atteinte lorsque, par définition, l'erreur de positionnement de l'objet est minimale. Soit, lorsque:

$$m_T = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2} \text{ est minimal.}$$

120 On s'aperçoit alors dans le cas normal que les valeurs d'erreur résiduelle sur les coordonnées tridimensionnelles (m_T) sont encore trop importantes. En effet, supposons dans le cas normal une base B et une « profondeur » Z de 2m et une distance focale c de 8mm. A l'aide de calculs relativement complexes, on montre que l'on obtient alors une erreur m_T sur la position du point central de la configuration ($X=B/2$ et $Y=0$) m_T 700 fois plus grande que m.

125 Les valeurs de m s'échelonnant entre 1,9 et 15,2 μ m pour des caméras numériques, on obtient donc des valeurs de m_T entre 1,4 et 10,7mm. Ces erreurs sont encore trop importantes pour la plupart des applications.

On ne peut donc pas utiliser directement les formules 1.2 pour calculer les coordonnées spatiales. On utilise donc la technique dite DLT (Direct Linear Transformation), qui permet de minimiser les erreurs systématiques dans toutes les phases de reconstruction.

130 **Technique DLT**

Ce principe de reconstruction tridimensionnelle a été présenté pour la première fois en 1971. Sur la figure 7 on a représenté la configuration de mesure avec une seule caméra.

Sur cette figure, on a représenté les éléments suivants:

- $\mathfrak{R} (O,X,Y,Z)$ est le repère global de l'espace,
- 135 - $\mathfrak{R}_p (M,x,y,z)$ est le repère de la caméra,
- c est la distance focale de la caméra,
- O_p est le centre optique de la caméra et a pour coordonnées X_0, Y_0, Z_0 dans \mathfrak{R} et x_p, y_p, c dans \mathfrak{R}_p ,
- O'_p est la projection de O_p sur le plan image de la caméra et a pour coordonnées $x_p, y_p, 0$ dans \mathfrak{R}_p ,
- 140 - P est un point de l'espace dont on recherche les coordonnées X, Y, Z dans \mathfrak{R} ,
- p est l'image du point P sur l'image de la caméra de coordonnées $x, y, 0$ dans \mathfrak{R}_p .

Dans la technique DLT, contrairement à la représentation ci-dessus, on ne suppose pas que les différents axes des repères sont colinéaires. Cela correspond à la réalité : les caméras sont placées de façon quelconque dans l'espace autour de l'objet. Pour passer du repère $\mathfrak{R} (O,X,Y,Z)$ au repère $\mathfrak{R}_p (M,x,y,z)$, il est nécessaire de définir une matrice de changement de base (matrice de rotation).

145

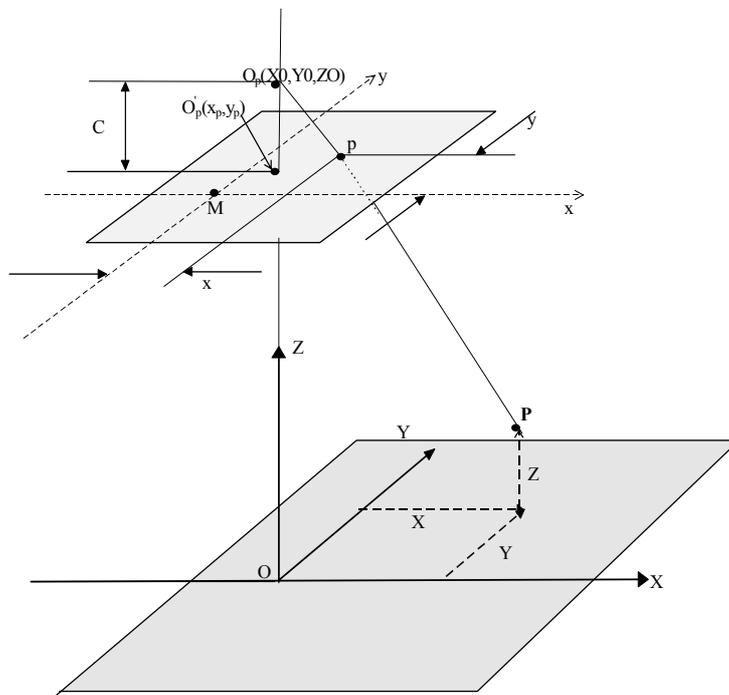


Figure 6 : schéma de principe d'une mesure avec une caméra

150 Le principe du calcul DLT est d'obtenir pour chaque image une relation linéaire entre les coordonnées 3D d'un point et ses coordonnées 2D sur chaque image. On cherche donc une relation vectorielle du type suivant **pour chaque caméra**:

$$\begin{bmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ -c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \vec{O_p P} \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}_1} = \lambda [M] \begin{pmatrix} \vec{O_p P} \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}} \quad (1.3)$$

155 où m_{ij} : éléments de la matrice de passage, λ : facteur d'échelle, les autres termes sont ceux explicités plus haut.

Le facteur d'échelle λ permet d'avoir une échelle différente sur \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R} (ce qui est souvent le cas car on a généralement \mathfrak{R} en mètres et \mathfrak{R}_1 en pixels).

160 Cette procédure de calcul nécessite dans un premier temps une phase de calibration, consistant à visualiser un objet aux dimensions connues et permettant de calculer les variables internes au dispositif (m_{ij} , X_0 , Y_0 , Z_0 , x_p , y_p , c et λ). Cette étape de calibration permet par la suite la phase de reconstruction et donc de mesure.

165 **Phase de calibration**

Résolution du cas "simple"

Dans la phase de calibration, on filme un objet de dimensions parfaitement connues (calibrateur). On connaît ainsi les coordonnées X , Y et Z de certains points caractéristiques du calibrateur. Après digitalisation de l'image on connaît aussi les coordonnées x et y de l'image de chacun de ces points. Pour résoudre le système précédent, il faut donc calculer les inconnues de la matrice M , ainsi que la focale c , le facteur d'échelle λ , les coordonnées x_p , y_p , X_0 , Y_0 et Z_0 . Pour cela, on transforme l'équation matricielle précédente de la façon suivante (en divisant les 2 premières équations par la troisième):

$$\begin{aligned} x - x_p &= -c_x \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y - y_p &= -c_y \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

175 Les facteurs c_x et c_y rajoutés ici permettent de pallier le problème de repère non orthonormé sur la caméra. Effectivement, on constate souvent que sur les caméras numériques, les tailles des pixels ne sont pas les mêmes suivant l'axe des x et l'axe des y .

En simplifiant l'équation 1.4 on peut obtenir l'écriture suivante:

$$\begin{aligned} x &= \frac{L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \\ y &= \frac{L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8}{L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

180 Où les paramètres L_1 à L_{11} qui s'expriment en fonction des 11 variables internes du dispositif, sont les inconnues du problème. Ces 11 paramètres sont appelés paramètres DLT du système. La résolution du système 1.5 permet d'obtenir les 11 paramètres DLT puis de remonter aux variables internes du dispositif.

Pour résoudre le système 1.5 on réécrit, les équations sous la forme suivante:

185

$$\begin{aligned} x(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1) &= (L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4) \\ y(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1) &= (L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ou encore:

$$\begin{aligned} XL_1 + YL_2 + ZL_3 + L_4 - xXL_9 - xYL_{10} - xZL_{11} - x &= 0 \\ XL_5 + YL_6 + ZL_7 + L_8 - yXL_9 - yYL_{10} - yZL_{11} - y &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sous forme matricielle, on peut donc écrire:

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -xX & -xY & -xZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & -yX & -yY & -yZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

En posant: $B = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -xX & -xY & -xZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & -yX & -yY & -yZ \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_{11} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

190 Δ est la matrice des inconnues. Le système devient: $B\Delta + D = 0$ (1.9)

Pour chaque point du calibrateur dont les coordonnées sont connues au préalable, on obtient ainsi 2 équations avec 11 inconnues. Pour résoudre totalement le système, il faut donc au moins 6 points sur le calibrateur (12 équations et 11 inconnues). Avec n points de contrôle ($n \geq 6$) sur le calibrateur, on peut résoudre le système à l'aide d'une méthode des moindres carrés visant à minimiser les erreurs résiduelles de calcul. Ces erreurs de calcul apparaissent dans la matrice V de l'équation 1.11 ci-dessous: $\boxed{\mathbf{B}\Delta + \mathbf{D} = \mathbf{V}}$ (V est la matrice des erreurs résiduelles) (1.10)

Pour minimiser ces erreurs, on minimise la somme des carrés des erreurs résiduelles, soit le produit: $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = (\Delta^T \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{D}^T) (\mathbf{B} \cdot \Delta + \mathbf{D})$

Pour minimiser ce produit, il faut annuler sa dérivée, soit:

$$\frac{\partial \mathbf{V}^T \mathbf{V}}{\partial \Delta} = \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \Delta + \mathbf{D}) + (\Delta^T \mathbf{B}^T + \mathbf{D}^T) \mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

Ce qui donne après simplification: $\boxed{\Delta = -(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}}$ (1.12)

Cependant, on constate expérimentalement que cette technique de résolution n'apporte pas encore une précision optimale. Il est donc nécessaire de caractériser encore un certain nombre d'erreurs systématiques qui peuvent être corrigées.

Prise en compte des erreurs sur les coordonnées bidimensionnelles - Résolution

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas tenu compte des erreurs systématiques que l'on pouvait obtenir sur les coordonnées bidimensionnelles x , y , x_p et y_p . Cependant, on montre expérimentalement qu'il existe des erreurs systématiques sur ces coordonnées. Ces erreurs proviennent essentiellement du matériel optique utilisé et des distorsions des images. En vue d'améliorer encore la précision on peut prendre en compte dans la résolution du système ces erreurs systématiques. Pour cela on montre que l'on peut rajouter ces erreurs systématiques sous

la forme suivante:
$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{x}_p &= x + \Delta x - x_p \\ \bar{y} - \bar{y}_p &= y + \Delta y - y_p \end{aligned}$$

avec \bar{x} , \bar{y} : coordonnées 2D corrigées sur chaque image,

\bar{x}_p , \bar{y}_p : coordonnées 2D corrigées de O'_p ,

x , y : coordonnées 2D "brutes" sur chaque image,

x_p , y_p : coordonnées 2D "brutes" de O'_p ,

Δx , Δy : erreurs systématiques de distorsion de la caméra.

Ces erreurs systématiques sont principalement dues aux distorsions des lentilles des caméras. Lorsque l'on compare l'image d'une grille donnée par une caméra à la grille réelle, on constate que le centre de l'image est correct alors que ses côtés sont déformés par des effets de bords (figure 7).

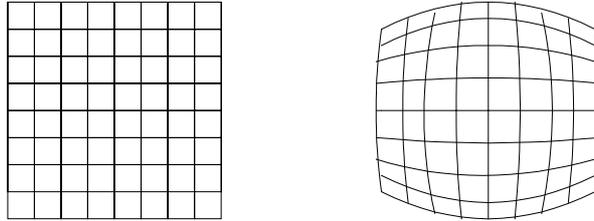


figure 7 : Grille réelle et grille déformée par effets de bord

Il existe aussi des caméras dont les déformations sont centrales. On montre que l'on peut approximer l'ensemble des erreurs de distorsion dues aux lentilles par des fonctions du type suivant:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x'(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) + P_1(r^2 + 2x'^2) + 2P_2 x' y' \\ \Delta y &= y'(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) + P_2(r^2 + 2y'^2) + 2P_1 x' y'\end{aligned}\quad (1.13)$$

Avec $x' = x - x_p$; $y' = y - y_p$; $r^2 = x'^2 + y'^2$; K_1, K_2, K_3, \dots : coefficients de distorsion symétrique des lentilles ; P_1, P_2 : coefficients de distorsion asymétrique des lentilles. On rajoute donc ici 5 inconnus supplémentaires à déterminer (K_1, K_2, K_3, P_1, P_2).

L'équation matricielle initiale devient alors:

$$\begin{bmatrix} x + \Delta x - x_p \\ y + \Delta y - y_p \\ -c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}\quad (1.14)$$

Soit, en simplifiant, comme dans le paragraphe précédent, on obtient:

$$\begin{aligned}x + \Delta x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ y + \Delta y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1}\end{aligned}\quad (1.15)$$

$$\text{En reprenant les notations introduites plus haut, on obtient de nouveau : } \mathbf{B}\Delta + \mathbf{D} = 0 \quad (1.16)$$

$$\text{Avec : } \Delta^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_{11} \quad K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad P_1 \quad P_2]$$

Pour chaque point du calibrateur dont les coordonnées sont connues au préalable, on obtient ainsi 2 équations avec ici 16 inconnues (11 paramètres DLT plus 5 paramètres de distorsion). Pour

résoudre totalement le système, il faut donc au moins 8 points sur le calibrateur (16 équations et 16 inconnus). Avec n points de contrôle ($n \geq 8$) sur le calibrateur, on peut résoudre le système à l'aide d'une méthode des moindres carrés visant à minimiser les erreurs résiduelles de calcul. Ces erreurs de calcul apparaissent dans la matrice V de l'équation 1.22 ci-dessous. Ces erreurs sont cette fois aléatoires et à la différence des erreurs systématiques de distorsion, il n'existe pas de modèle pour les minimiser. $\boxed{\mathbf{B}\Delta + \mathbf{D} = \mathbf{V}}$ (V est la matrice des erreurs résiduelles) (1.21)

On résout alors le système comme dans le cas précédent et l'on trouve:

$$\boxed{\Delta = -(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}} \quad (1.22)$$

250 II-3-Phase de reconstruction

Comme précédemment, on repart des équations 1.15:

$$\begin{aligned} (x + \Delta x)(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1) - (L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4) &= 0 \\ (y + \Delta y)(L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1) - (L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8) &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Donc en posant:
$$\begin{cases} \bar{x} = x + \Delta x \\ \bar{y} = y + \Delta y \end{cases}, \text{ on a:}$$

(Si on se situe dans le cas simple où l'on ne prend pas en compte les distorsions des éléments sensibles de la caméra, on a alors: $\Delta x = \Delta y = 0$.)

$$\begin{aligned} (\bar{x}L_9 - L_1)X + (\bar{x}L_{10} - L_2)Y + (\bar{x}L_{11} - L_3)Z + (\bar{x} - L_4) &= 0 \\ (\bar{y}L_9 - L_5)X + (\bar{y}L_{10} - L_6)Y + (\bar{y}L_{11} - L_7)Z + (\bar{y} - L_8) &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} (\bar{x}L_9 - L_1) & (\bar{x}L_{10} - L_2) & (\bar{x}L_{11} - L_3) \\ (\bar{y}L_9 - L_5) & (\bar{y}L_{10} - L_6) & (\bar{y}L_{11} - L_7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x} - L_4 \\ \bar{y} - L_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

ou: $\mathbf{B}\Delta + \mathbf{C} = 0 \quad (1.30)$

260 Avec: $\Delta = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; B^T = \begin{bmatrix} (\bar{x}L_9 - L_1) & (\bar{y}L_9 - L_5) \\ (\bar{x}L_{10} - L_2) & (\bar{y}L_{10} - L_6) \\ (\bar{x}L_{11} - L_3) & (\bar{y}L_{11} - L_7) \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} \bar{x} - L_4 \\ \bar{y} - L_8 \end{bmatrix}$

Pour chaque caméra, on obtient ainsi 2 équations et 3 inconnues, en assemblant les informations provenant des n caméras ($n \geq 2$) du dispositif, on obtient 2n équations pour 3 inconnues. On peut alors calculer une solution aux moindres carrés. On calcule donc comme précédemment :

$$\Delta = -[B^T B]^{-1} B^T C \quad (1.31)$$

265

Applications

Les applications de tels dispositifs se situent essentiellement dans le domaine biomédical : ils permettent d'analyser la cinématique du corps humain et/ou animal et éventuellement de détecter des pathologies locomotrices précoces. Sur les figures ci-dessous, on voit les marqueurs positionnés sur l'objet, puis l'image tridimensionnelle reconstruite.

270



Figure 8 : Exemples d'application dans le domaine biomédical

Dans le domaine industriel, on trouve aussi de nombreuses applications en ergonomie. L'objectif est d'optimiser les espaces offerts sur les postes de travail. Un exemple est illustré ci-dessous dans le domaine de la conception automobile : on observe les espaces occupés par les segments du corps humain en phase de conduite ce qui permet ensuite de récupérer les espaces vides.

275

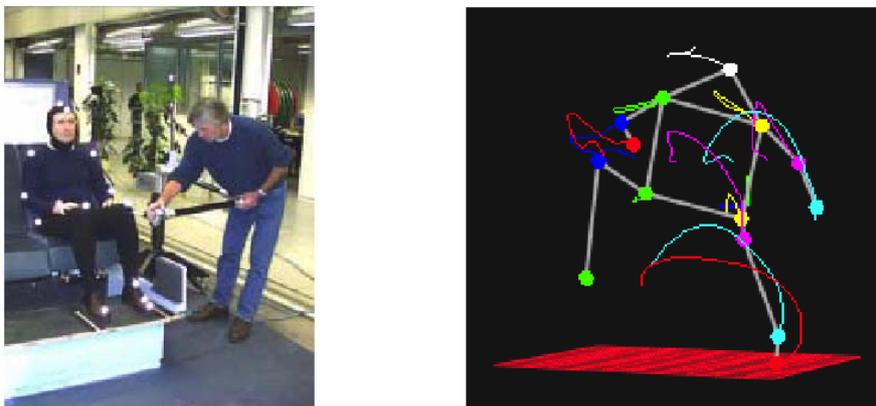
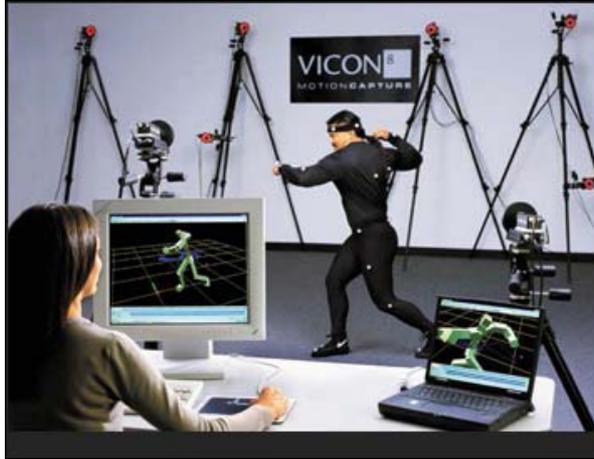


Figure 9: Etude ergonomique en automobile

280

Enfin dans le domaine des jeux vidéo l'essor de ces techniques est important. Les exploits sportifs sont comme précédemment filmés, numérisés puis reconstruits. Les jeux de simulation n'en sont ainsi que plus réels.



285

Figure 10 : Exemple de numérisation d'un geste sportif

Aussi, on utilise cette technique dans l'imagerie médicale pour reconstruire l'image tridimensionnelle de la colonne vertébrale à partir de 2 radiographies prises dans des plans différents. On trouve encore de nombreuses applications de ces dispositifs en robotique, simulation virtuelle, contrôle, etc...

290