

## ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2010 - Partie D

### TITRE :

### Pierre Bézier et les courbes qui portent son nom

Temps de préparation : .....2 h 15 minutes

Temps de présentation devant les examinateurs : .....10 minutes

Entretien avec les examinateurs : .....10 minutes

### GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 13 pages.

Document principal (11 pages, dont celle-ci) ; annexe : 2 pages.

Travail **suggéré** au candidat :

Le candidat pourra exposer ce document de deux façons différentes, qui privilégient soit la partie A soit la partie B. Plus précisément, il est demandé d'effectuer :

- 1) Soit une synthèse de la partie A, à laquelle sera adjointe une restitution très simplifiée de la partie B. En ce qui concerne la partie A, les résultats seront présentés sous formes de théorèmes (ou algorithmes) accompagnés des liaisons qu'ils ont entre eux (en ne mentionnant les preuves que succinctement). En ce qui concerne la partie B, une restitution sommaire consiste à en faire une synthèse soit globale soit en synthétisant chaque paragraphe, ou groupe de paragraphes, par une idée et/ou une phrase).
- 2) Soit une synthèse structurée de la partie B, non nécessairement linéaire, en adjoignant, en fin d'exposé, la restitution de l'un seulement des thèmes, jugé important, de la partie A.

Dans les deux cas, il sera apprécié que le candidat fasse des connexions entre les 2 parties A et B, au moins au niveau de la conclusion. Le jury sera toutefois ouvert à des restitutions d'une autre forme que les deux précédentes. Dans tous les cas, il est demandé au candidat/à la candidate, avant de commencer son exposé, d'informer le jury de l'option prise.

**Attention :** si le candidat préfère effectuer un autre travail sur le dossier, il lui est **expressément recommandé** d'en informer le jury avant de commencer l'exposé.

### CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

\* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.

\* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper ... mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, etc.) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débiter votre exposé.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre aux examinateurs le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

# Partie A : Une présentation succincte des courbes de Bézier (C.B.)

## Le calcul barycentrique et ses notations

La présentation la plus directe des courbes de Bézier (que nous abrègerons fréquemment en C.B.) repose sur ce que l'on appelle le "calcul barycentrique" ; il s'agit d'un système de notations très pratique, qui englobe à la fois points et vecteurs. Comme il est rarement employé en classes préparatoires, nous allons en donner brièvement les principes, au travers de quelques exemples, ce qui suffira pour l'utilisation que nous en ferons.

On définit classiquement le barycentre  $G$  de 2 points pondérés  $(A, a)$  et  $(B, b)$  (au sens où les points  $A$  et  $B$  sont resp. affectés de "poids"  $a$  et  $b$ ), par l'identité vectorielle

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = (a + b)\overrightarrow{OG} \quad (1)$$

Puis, dans un deuxième temps, on montre que c'est une notion indépendante du choix de l'origine  $O$ .

Ceci autorise l'écriture suivante

$$aA + bB = (a + b)G$$

Par ailleurs, en ce qui concerne les vecteurs, dans le même esprit, il n'y a qu'un pas entre l'écriture  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  et l'écriture intrinsèque :

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Les deux égalités précédentes sont typiques de ce "calcul barycentrique". Toute combinaison linéaire  $\sum_i a_i P_i$  de points pondérés par des coefficients positifs ou négatifs  $a_i$  a un sens, soit en tant que point pondéré, soit en tant que vecteur, selon la condition suivante :

$$\sum_i a_i P_i = \begin{cases} sG & \text{si } s \neq 0 \\ \vec{v} & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

(où  $G$  est le barycentre classique des  $(P_i, a_i)$  et  $s = \sum_i a_i$ ).

Si la somme des poids est non-nulle, on doit donc retrouver ce poids total  $s$  comme coefficient du point-barycentre. On dira alors que l'on a une écriture "licite"<sup>1</sup>.

Sinon, si la somme des poids est nulle, on peut toujours, par dissociations et/ou regroupements, faire en sorte d'avoir un résultat vectoriel. Plutôt que de donner un algorithme général pour cela, illustrons cette propriété par un exemple, celui de  $A - 2B + 3C - 2D$  ; cette expression se réécrit effectivement sous forme vectorielle en la transformant comme suit :  $(A - B) + (C - B) + 2(C - D) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{DC}$ .

---

<sup>1</sup>Par exemple, les deux écritures équivalentes suivantes sont licites :  $G = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B$  et  $4G = A + 3B$  ;  $G$  est le point situé aux  $3/4$  du segment  $[AB]$  en partant de  $A$  ("G est attiré 3 fois plus par  $B$  que par  $A$ ").

Ces nouvelles notations permettent, avec les opérations algébriques quasi-habituelles, de jongler entre différentes représentations. Prenons un exemple, celui de  $P = M + B - A$ , qui est une écriture licite puisque la somme des poids est 1. Cette écriture peut aussi bien se transformer en  $P = M + \overrightarrow{AB}$ , qu'en  $\frac{1}{2}(A + P) = \frac{1}{2}(B + M)$ . On a ainsi prouvé l'équivalence entre les deux assertions suivantes "  $P$  est le translaté de  $M$  dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ " et "le milieu du segment  $[AP]$  coïncide avec le milieu du segment  $[BM]$ ".

## Les polynômes de Bernstein

Pour un "degré"  $n$  fixé, le  $k$ -ième polynôme de Bernstein  $\beta_{n,k}(t)$  est défini par <sup>2</sup> :

$$\beta_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k s^{n-k} \quad k = 0 \dots n \quad \text{en posant } s = 1 - t. \quad (2)$$

La matrice des coefficients de ces polynômes étant inversible, ils constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $n$ . L'une des propriétés essentielles des  $\beta_{n,k}$  est la suivante <sup>3 4</sup> :

$$\text{pour tout } n, \quad \text{pour tout } t, \quad \sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(t) = 1 \quad (3)$$

Cette base des  $\beta_{n,k}$  a permis à Bernstein de donner (en 1913) le théorème suivant :

Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , la suite de fonctions polynômes définies par :

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \beta_{n,k}(t) \quad \text{est telle que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f) = f \quad (4)$$

cette limite étant prise au sens de la norme "uniforme"  $\|g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|$ .

En conséquence, on a une preuve "constructive" du théorème de Weierstrass, énonçant que toute fonction continue sur  $[a, b]$  est limite uniforme d'une suite de polynômes.

## Les courbes de Bézier cubiques et l'algorithme de P. de Casteljaou

Ce que nous allons voir maintenant est valable pour n'importe quel degré  $n$ . Cependant, nous allons spécialiser notre explication au degré  $n = 3$  qui constitue un bon compromis entre souplesse d'utilisation et simplicité de calculs. Le cas  $n = 2$  sera considéré, isolément, un peu plus loin. Le lecteur verra de lui-même que pratiquement tous les résultats énoncés s'étendent facilement au degré général  $n$ .

La base des  $\beta_{3,k}$  est précisément constituée des polynômes <sup>5</sup> :

---

<sup>2</sup>Rappel :  $\binom{n}{k}$  désigne le coefficient binomial de la  $n$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne du triangle de Pascal, encore noté  $C_n^k$ , donné par la formule  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

<sup>3</sup>Voir Fig. 4, illustrant le cas  $n = 3$ .

<sup>4</sup>Les  $\beta_{n,k}$  sont généralement considérées sur le domaine  $[0, 1]$ .

<sup>5</sup>Insistons sur le rôle complémentaire de  $t$  et  $s = 1 - t$  avec  $s, t \in [0, 1]$ .

$$\beta_{3,0}(t) = s^3, \quad \beta_{3,1}(t) = 3s^2t, \quad \beta_{3,2}(t) = 3st^2, \quad \beta_{3,3}(t) = t^3 \quad (5)$$

Ce qui permet, d'après (3), d'écrire la formule licite suivante pour décrire la C.B.<sup>6</sup> définie par le quadruplet  $(A, B, C, D)$  :

$$M = M_t = s^3A + 3s^2tB + 3st^2C + t^3D \quad (6)$$

Une manière de lire cette formule consiste à dire que les  $\beta_{3,k}$  servent de "poids variables au cours du temps  $t$ " à 4 points fixés  $A, B, C, D$ . Les points  $A$  et  $D$  font partie de la courbe :  $M_0 = A$  en est le point initial et  $M_1 = D$  le point final ; les points  $B$  et  $C$ , eux, n'en font, en général, pas partie ; ce sont des "points de contrôle".

Un résultat essentiel, dû à Paul de Casteljaou, est que la formule (6) résulte de la "cascade" suivante de barycentrations élémentaires :

$$\begin{array}{lll} E = sA + tB & F = sB + tC & G = sC + tD \\ H = sE + tF & I = sF + tG & \\ M = sH + tI & & \end{array}$$

Reportons-nous à la Fig. 1, où ces opérations sont représentées à la fois sous forme algorithmique, sous forme graphique et sous forme analytique. On passe de la version algorithmique (de P. de Casteljaou) à la version analytique en étudiant les contributions des différents points ; par exemple, en ce qui concerne la contribution de  $B$ , on considère les trois trajets de  $B$  à  $M$ , à savoir  $BEHM$ ,  $BFHM$  et  $BFIM$ , affectés resp. des multiplicateurs  $\times t \times s \times s$ ,  $\times s \times t \times s$  et  $\times s \times s \times t$ , la somme des contributions,  $3s^2t$ , constitue le coefficient du point  $B$ .

L'aspect géométrique de la construction consiste, à partir de la ligne brisée  $ABCD$ , que l'on peut appeler l' "armature fixe", à construire des armatures mobiles, dépendant d'une valeur donnée de  $t$ . D'abord la ligne brisée  $EFG = E_tF_tG_t$ , sur laquelle on "greffe"  $HI = H_tI_t$ , permettant finalement de placer le point "courant"  $M = M_t$ .

Si, dans la formule (6), on remplace  $s$  par  $1-t$  et que l'on développe par rapport à  $t$ , on obtient :

$$M_t = A + 3(B-A)t + 3(A-2B+C)t^2 + (-A+3B-3C+D)t^3 \quad (7)$$

ce qui prouve en particulier, par unicité du développement de Taylor de  $M_t$ , que <sup>7</sup> :

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=0} = 3\overrightarrow{AB} \quad (8)$$

Plus généralement, le vecteur vitesse au point générique  $M = M_t$  est tout simplement :

$$\frac{dM_t}{dt} = 3\overrightarrow{HI} \quad (9)$$

(rappelons que  $HI$  dépend du paramètre  $t$ ).

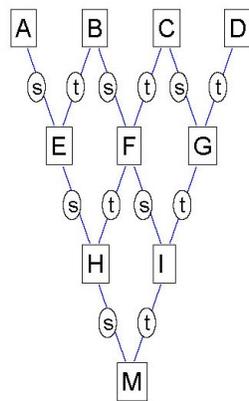
En effet, si l'on dérive les deux membres de (6) par rapport à  $t$  (compte tenu de ce que  $ds/dt = -1$ ) :

$$3(-s^2A + (-2st + s^2)B + (-t^2 + 2st)C + t^2D) = \underbrace{3((s^2B + 2stC + t^2D))}_I - \underbrace{(s^2A + 2stB + t^2C)}_H \quad (10)$$

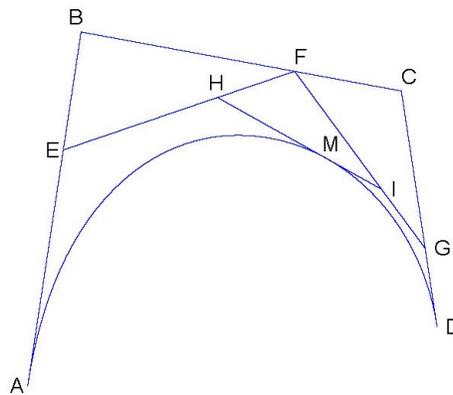
<sup>6</sup>Rappelons que C.B. est un acronyme pour "Courbe de Bézier".

<sup>7</sup>On convient de noter  $|_{t=0}$  l'évaluation en  $t = 0$ .

Version  
algorithmique



Version graphique  
avec  $t = 2/3$  et  $s = 1/3$



Version analytique (diverses formes)

$$M = s^3 A + 3s^2 t B + 3st^2 C + t^3 D$$

$$M = (1 - 3t + 3t^2 - t^3)A + 3(t - 2t^2 + t^3)B + 3(t^2 - t^3)C + t^3 D$$

$$M_t = M_0 + 3A\vec{B}t + \frac{1}{2}6(\vec{B}\vec{A} + \vec{B}\vec{C})t^2 + (\dots)t^3$$

FIG. 1 – Trois façons de voir une C.B. cubique ayant pour points de passage  $A$  et  $D$  et pour points de contrôle  $B$  et  $C$ .

## Le cas particulier des courbes de Bézier quadratiques

Une C.B. *quadratique* est définie comme lieu <sup>8</sup> des barycentres de 3 points  $A, B, C$  affectés des poids (variables au cours du temps) :  $\beta_{2,k}$  <sup>9</sup>, ce qui donne :

$$M = s^2 A + 2stB + t^2 C \quad s, t \in [0, 1], s = 1 - t \quad (11)$$

( $A$  en est l'origine,  $C$  l'extrémité, et  $B$  l'unique point de contrôle).

Soit encore, en développant par rapport à  $t$  comme cela avait été fait pour les C.B. cubiques :

$$M = A + 2(B - A)t + (A - 2B + C)t^2 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} t + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) t^2 \quad (12)$$

L'écriture  $M = A + t\vec{i} + t^2\vec{j}$  prouve en particulier que les C.B. quadratiques sont des paraboles.

Inversement, toute courbe paramétrique 2D définie par un couple d'équations du second degré est une C.B. quadratique, donc une parabole ; en effet, de l'écriture :

$$x(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \quad (13)$$

on déduit, en passant de la base  $1, t, t^2$  à la base des  $\beta_{2,k}(t)$ , l'existence de coefficients  $a_3, \dots, c_4$  tels que :

$$x(t) = a_3 s^2 + b_3 2st + c_3 t^2, \quad y(t) = a_4 s^2 + b_4 2st + c_4 t^2 \quad (14)$$

qui est (voir (11)) l'écriture de la C.B. quadratique associée à  $A(a_3, a_4), B(b_3, b_4), C(c_3, c_4)$ .

Les C.B. cubiques ont supplanté les C.B. quadratiques, pourtant plus simples, donc théoriquement plus maniables. L'une des raisons principales tient à leur raccordement (ce qui donne les courbes dites "splines") : on ne peut faire que des raccordements  $C^1$  mais non  $C^2$  de C.B. quadratiques <sup>10</sup>, ce qui est insuffisant pour beaucoup d'applications. Mentionnons cependant le domaine des polices de caractères où les deux types (C.B. quadratique et cubique) coexistent. Le système "TrueType" développé par la société Apple utilise des C.B. quadratiques alors que les polices développées par la société Adobe, liées au langage de description de page PostScript <sup>11</sup>, utilisent des C.B. cubiques.

---

<sup>8</sup>On appelle "lieu" un ensemble de points vérifiant une certaine propriété.

<sup>9</sup>Voir (2).

<sup>10</sup>Rappelons que la notation  $C^k$  signifie " $k$  fois continument différentiable".

<sup>11</sup>qui apparaît, par exemple, sous forme abrégée dans l'extension de fichier ".eps", acronyme de "Extended PostScript".

## Partie B : La lettre de P. Bézier

*Précisons tout d'abord le cadre dans lequel cette lettre a été écrite. Christophe Rabut, enseignant-chercheur à l'INSA de Toulouse, avait adressé un courrier à Pierre Bézier lui disant, en substance, qu'il aimerait connaître et comprendre dans quel contexte étaient nées les courbes portant son nom. Pierre Bézier lui a répondu par une lettre de 10 pages dont nous reproduisons de larges extraits.*

*Les passages supprimés sont d'intérêt marginal dans le contexte de cette épreuve et leur mise à l'écart ne dénature en aucun cas le sens général du texte. La lettre comportait également des titres de paragraphes que nous avons cru bon de supprimer. Toutes les notes de bas de page sont ajoutées par nos soins.*

Lettre datée du 5 Novembre 1999.

Monsieur et cher collègue,

D'abord, je dois préciser que j'ai été formé aux Arts et Métiers<sup>12</sup> Promo 1927 en vue de devenir ingénieur mécanicien – c'était une vocation héréditaire –, que j'ai passé ensuite un an à SupElec<sup>13</sup> (Promo 1931) et que mon comportement en est resté imprégné. Cela peut expliquer dans une certaine mesure ma façon de raisonner et de réagir.

En 1933, la crise de 1929 n'était pas terminée ; après mon service militaire, j'ai été embauché par Renault comme ajusteur-outilleur ; je suis ensuite passé au bureau d'études des outillages, qui faisait partie du service des méthodes. Ce service avait à choisir, à concevoir et à mettre en œuvre les moyens de production des pièces mécaniques ; toutes les surfaces qui nécessitaient une certaine précision étaient des plans, des cylindres ou des cônes, c'est-à-dire qu'il suffisait de droites et de cercles pour les définir.

Les limites étaient exprimées en millièmes de mm car les tolérances étaient de l'ordre du centième, et parfois moins.

Au contraire, pour la carrosserie, tout baignait dans un flou artistique ; le styliste était l'arbitre ; son jugement ne pouvait être que subjectif et variait parfois avec le temps ; on ne demandait à personne d'avoir des connaissances mathématiques, exception faite des dessinateurs, qui étaient de vrais acrobates de la [géométrie] descriptive<sup>14</sup> ; leurs instruments étaient des gabarits, des pistolets, des lattes flexibles, des compas à pointes sèches et des réglets gradués.

Les plans étaient médiocrement précis, et l'on citait le cas d'une voiture, pas plus laide qu'une autre d'ailleurs, dont les deux flancs différaient entre eux de plusieurs millimètres : pour l'esthétique et l'aérodynamisme, c'était sans importance, mais en cours de fabrication il n'en allait pas de même ; entre des pièces qui auraient dû s'assembler bord à bord il restait parfois des vides de plusieurs millimètres qu'il fallait combler avec de la soudure à l'étain, et cela coûtait cher.

Schématiquement, lorsque l'on étudiait un nouveau véhicule, le procédé classique était d'abord de charger un styliste de tracer plusieurs croquis entre lesquels on faisait un choix puis de modeler des maquettes en cire à l'échelle 1/8 ou 1/10 ; ensuite, en plusieurs étapes, on en tirait un

---

<sup>12</sup>Il s'agit d'une Ecole d'Ingénieurs en Mécanique.

<sup>13</sup>Ecole Supérieure d'Electricité.

<sup>14</sup>Ensemble de méthodes graphiques permettant de représenter de manière bijective des figures 3D par des paires de figures 2D résultant de projections sur 2 plans perpendiculaires.

plâtre en grandeur nature qui était soumis au jugement d'un aréopage constitué par la Grande Direction, le Style, le Service Commercial et différents conseillers supposés qualifiés ; quand, au bout de plusieurs mois, et après maintes retouches et modifications, un accord était atteint, le bureau de dessin étudiait chacune des pièces intérieures de la caisse ; il fallait, pendant ce temps, tenir compte des impératifs de la fabrication : emboutissage, soudure, peinture, sellerie, fixation des organes mécaniques, assemblage général, entretien et réparation ; on construisait plus tard un maître-modèle dans un matériau assez stable, acajou ou résine organique, qui servait de référence pendant toute la production du véhicule, mais sa précision n'était pas parfaite et même, avec le temps, pouvait parfois subir une distorsion, ce qui est fâcheux pour un étalon.

Il y avait dans cet état de choses quelque chose de choquant pour un mécanicien habitué à une rigueur sans concession ; il me semblait qu'il faudrait parvenir à utiliser une définition indiscutable, exempte de distorsion et facile à communiquer, établie par le styliste lui-même et transmise ensuite sous forme numérique à tous les groupes, y compris les sous-traitants et les fournisseurs, intervenant dans le processus, depuis le styliste jusqu'au contrôleur opérant à la sortie de la chaîne de fabrication, et même aux ateliers d'entretien du réseau des agents et des concessionnaires.

L'ordinateur, apparu dans l'industrie vers 1950, travaillait naturellement en priorité pour les services administratifs ; quand il lui restait du temps, et c'était rare, il exécutait en mode différé quelques travaux à la demande des services scientifiques ou techniques. Sa rapidité de calcul nous semblait fabuleuse ; en 1955 sont apparues aux USA les premières machines-outils<sup>15</sup> à commande numérique<sup>16</sup> ; au début, c'était pour effectuer de point en point des perçages, des taraudages et des alésages ; plus tard on est passé au fraisage suivant des droites, puis des arcs de cercle ; cela suffisait aux mécaniciens et l'on pouvait même placer bout à bout des arcs de cercles ou de paraboles pour imiter d'autres courbes. Bref, il n'était plus insensé de songer à s'attaquer au problème du tracé des carrosseries.

Le tracé de courbes était la première étape à franchir, car ce sont les courbes dites "de construction" qui servent de guide pour représenter les surfaces ; ce sont des courbes gauches<sup>17</sup> et il faut plusieurs projections pour les définir, en assurant leur compatibilité. Il n'aurait pas été bon de les constituer en mettant bout à bout beaucoup de petits arcs de cercle ou de paraboles parce que toute modification n'aurait pu être que locale alors qu'il fallait, au contraire, conserver l'allure générale de la courbe à corriger et que l'altération soit répartie progressivement sur toute sa longueur ; il était impératif de réduire au minimum le nombre des arcs à juxtaposer ; on a donc inscrit dans un cube une courbe dite "de base", de forme bien adaptée<sup>18</sup>, et l'on a pensé à déformer celui-ci pour en faire un parallélépipède, autrement dit on lui a fait subir une transformation linéaire<sup>19</sup> ; pour définir celui-ci, au lieu de donner une origine commune aux trois vecteurs-unités du parallélépipède, on les a mis bout à bout ; la forme du polygone ainsi constitué évoque vaguement celle que prendra la courbe de base après avoir subi la même transformation.

A première vue, il semble moins logique de déformer tout un référentiel plutôt qu'une seule ligne<sup>20</sup>, mais il faut considérer que l'on a besoin, dans la suite des travaux, de modifier l'ensemble d'un

---

<sup>15</sup>Dispositif mécanique couplé à une source de puissance permettant à un opérateur des opérations d' "usinage" telles que perçage, alésage, fraisage...

<sup>16</sup>Dans ce cas, la machine est essentiellement pilotée par un programme informatique ; l'homme n'intervient plus qu'en amont pour concevoir le programme, ou en aval pour contrôler la bonne exécution de la tâche.

<sup>17</sup>Courbes de l'espace qui ne sont contenues dans aucun plan.

<sup>18</sup>Voir Fig. 2, retracée par nos soins.

<sup>19</sup>Ici, au sens restreint de "transformation à matrice diagonale".

<sup>20</sup>"ligne" est à prendre ici au sens de "courbe dans l'espace".

tracé composé de plusieurs arcs de courbes et qu'alors il sera plus simple de le faire d'un seul coup en agissant sur leur espace commun plutôt que sur chacun séparément<sup>21</sup>.

Plus tard, on a pensé aussi qu'au lieu d'effectuer seulement une transformation linéaire, on pourrait imposer au cube une distorsion générale<sup>22</sup>, au prix d'un accroissement de la quantité des calculs qu'entraînerait l'usage simultané de trois paramètres.

J'avais choisi comme courbe de base, c'était une idée de mécanicien, l'intersection de deux quarts de cylindres circulaires (Fig. 1<sup>23</sup>); l'ordinateur aurait développé les fonctions harmoniques<sup>24</sup> pour calculer les points courants; mais les opérations se sont compliquées dès que l'on a voulu utiliser des référentiels ayant plus de trois dimensions; l'emploi des fonctions algébriques<sup>25</sup> s'est alors naturellement imposé<sup>26</sup>.

En son origine  $(0, 0, 0)$ , la courbe de la Fig. 2 est tangente à  $Ox$  et osculatrice<sup>27</sup> au plan  $xOy$ ; en  $(1, 1, 1)$ , sa tangente est parallèle à  $Oz$  et son plan osculateur à  $yOz$ ; si l'on imagine qu'un point la parcourt à vitesse constante, l'on conclut que les vitesses de ses projections sur les trois arêtes  $a_1, a_2$  et  $a_3$  du parallélépipède sont représentées par les diagrammes de la Fig. 4<sup>28</sup>, la solution la plus simple étant constituée par trois fonctions cubiques  $f_1, f_2$  et  $f_3$ <sup>29</sup>, et la représentation du point courant a la forme<sup>30 31</sup>.

$$M_t = P_0 + \sum_{k=1}^3 f_k(t) \overrightarrow{P_{k-1}P_k} \quad (15)$$

Il ne m'avait pas semblé nécessaire de donner un nom aux fonctions  $f$ , car j'étais persuadé qu'elles avaient déjà un état-civil; les choses prenaient un certain développement, mais les fonctions n'ayant pas à ma connaissance de patronyme officiel, j'ai cru judicieux de leur trouver au moins un parrain, ce qui leur conférerait une certaine respectabilité; j'ai donc attribué leur invention à un professeur virtuel à qui j'ai donné pour nom Durand et pour prénom Onésime. L'honorable Professeur Durand a donc été connu dès 1965 chez Renault; ses fonctions ont été citées alors au CNAM<sup>32 33</sup>. Les Américains m'ont fait le grand honneur, depuis les années 1975, d'employer mon nom dans leurs communications.

Comment est-on passé des fonctions  $f$  à celles de Bernstein? Tout simplement, mon camarade Riaux m'a fait observer que les sommets du polygone, selon qu'ils étaient l'origine ou l'extrémité

<sup>21</sup>Dans un autre texte, P. Bézier disait "au lieu de déformer une courbe ou une famille de courbes, il vaut mieux faire subir une distorsion générale à l'espace dans lequel on les a incluses".

<sup>22</sup>Transformation affine générale, pour être précis.

<sup>23</sup>Ici encore, il s'agit de la Fig. 2 de notre texte.

<sup>24</sup>L'auteur pense à un développement en séries de Fourier des fonctions  $x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma)$  où  $\sigma$  est l'abscisse curviligne. La paramétrisation de cette courbe d'intersection par la variable  $\sigma$  est loin d'être élémentaire.

<sup>25</sup>Synonyme, pour l'auteur, de "fonctions polynomiales".

<sup>26</sup>Voir la Fig. 3 du texte.

<sup>27</sup>Le plan osculateur en un point d'une courbe est, de tous les plans passant par ce point, celui vis-à-vis duquel la courbe est, localement, la plus proche, par analogie avec la tangente à une courbe (plane) en un point qui est la droite qui ressemble le plus à cette courbe en ce point.

<sup>28</sup>Courbes en traits pleins.

<sup>29</sup>auxquelles nous avons adjoint  $f_0$ : voir Annexe.

<sup>30</sup>Nous avons modifié l'écriture de cette formule, telle qu'elle était donnée dans la lettre, notamment pour l'harmoniser avec les notations du reste du texte.

<sup>31</sup>Les points  $P_0, P_1, P_2, P_3$  correspondent aux points  $A, B, C, D$  de la partie A.

<sup>32</sup>Littéralement, "Conservatoire National des Arts et Métiers", centre d'un organisme de formation permanente où P. Bézier donnait des cours en ces années-là.

<sup>33</sup>Derrière ces précautions, il faut comprendre que Pierre Bézier a dû longtemps respecter une stricte confidentialité des procédés mis en œuvre. Cela a été le cas également pour P. de Casteljaou chez Citroën (voir plus loin).

d'un de ses côtés, intervenaient deux fois dans le calcul du point courant ; les différences entre deux fonctions  $f$  successives sont les fonctions de Bernstein, dont les propriétés sont bien plus utiles que celles des fonctions  $f^{34}$ .

A titre anecdotique, je vous signale que Bernstein était un ancien élève de SupElec, où il m'a précédé exactement de trente ans, et qu'il a inventé ses fonctions pour établir des courbes d'espérance de vie pour une compagnie d'assurances.

Tout ce que je vous ai écrit jusqu'ici concerne le tracé des courbes mais mon intention était, dès l'origine, d'aller bien au delà, et d'essayer de faire avancer un peu l'ensemble du problème de la conception et de la fabrication de la carrosserie sans laisser subsister la moindre part d'une méthode périmée. Ensuite, passer des courbes aux surfaces n'a été qu'un exercice d'algèbre élémentaire.

D'autres entreprises ont pensé, de façon plus raisonnable ou plus réaliste, c'est un peu la même chose, que ce serait déjà un grand progrès que de mesurer les coordonnées 3D d'une grosse quantité de points situés sur une maquette, puis de définir ensuite une surface qui les contiendrait ; naïvement, j'ai cru qu'il fallait "essayer le tableau" et repartir de zéro. Pardonnez-moi si j'emploie sans modestie la première personne du singulier, mais je crois que si j'ai apporté quelque chose de valable dans le développement de la CFAO<sup>35</sup>, c'est d'abord ce simple point de vue.

Dès 1965, les travaux théoriques étaient assez avancés et j'étais certain que la solution était valable mais, pour convaincre les tenants de la tradition, il aurait été indispensable de disposer d'une machine à dessiner de  $8m \times 2m$ , d'une machine à fraiser de faible puissance (0,5 kW) pour tailler des blocs de mousse de polystyrène, avec des courses de  $1,5m \times 1,2m \times 0,8m$ , et des avances de  $2m/min$ , ce qui semblait irréalisable à l'époque. De plus, pour travailler en mode conversationnel, il serait indispensable de disposer en permanence d'un ordinateur de puissance modeste, ce qui était contraire, en 1960, à la pratique admise ; il faudrait enfin bâtir un logiciel rudimentaire.

Le budget correspondant était évalué à 3MF<sup>36</sup> et la Haute Direction montra les bornes de sa confiance en limitant son montant à 600 kF, à charge pour moi d'aller ailleurs tendre la sébile<sup>37</sup> ; par chance, le projet inspira confiance à la DGRST<sup>38</sup> qui m'accorda 1,5 MF ; le reste fut prêté par un constructeur d'ordinateurs qui prêta 900 kF, car l'idée de multiplier les ordinateurs de petites dimensions lui parut bonne à encourager.

Les problèmes devenant plus complexes, nous sommes passés à des référentiels non-linéaires qui permettent de tracer une courbe de paramètre  $w$  sur une surface définie par deux paramètres  $u$  et  $v$ , c'est-à-dire, par exemple, de tracer une échancrure de passage de roue dans une aile déjà déterminée, ou de modifier la totalité d'une caisse sans avoir à corriger séparément les surfaces élémentaires qui la composent.

Vous voyez, cher Monsieur, que tout cela est simple et se ramène à quelques notions banales, sans aller au delà d'un peu de calcul vectoriel et matriciel. Pourquoi, en 1960 des chercheurs de l'industrie aéronautique ne l'ont-ils pas trouvé du premier coup ? Je crois qu'ils ont été intoxiqués par l'idée de reproduire un modèle plutôt que de commencer en créant directement une forme et en l'affinant peu à peu ; je suppose que le problème posé par Citroën<sup>39</sup> à Jean de la Boixière (SupElec) et à Paul de Casteljou (Norm Sup<sup>40</sup>), tous deux ingénieurs et mathématiciens, était aussi de traduire

---

<sup>34</sup>Voir Annexe.

<sup>35</sup>Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur.

<sup>36</sup>3 Millions de Francs : environ 3 500 000 € actuels en tenant compte de l'inflation.

<sup>37</sup>Récipient des mendiants destiné à recevoir les aumônes.

<sup>38</sup>Direction Générale de la Recherche Scientifique et Technique.

<sup>39</sup>Société en concurrence directe avec Renault à l'époque. Fait partie du groupe PSA maintenant.

<sup>40</sup>Ecole Normale Supérieure.

numériquement une maquette faite à la main.

Le cahier des charges que je m'étais proposé en 1960 avait pour avantage d'être fondé sur une expérience que j'avais acquise en exerçant la plupart des métiers qui jouent un rôle dans la carrosserie : usinage, fonderie, électricité, électronique, tracé, soudure, dessin, ajustage, contrôle ; j'avais aussi conservé et développé quelques connaissances en mathématiques au delà de ce que l'on enseignait aux élèves des Arts et Métiers en 1930 ; la curiosité n'est pas toujours un péché capital.

Quand on veut dessiner une machine-outil, ce qui fut mon métier de base, on se forme d'abord une image de ce qu'elle devrait être ; ensuite, la définition finale s'élabore par permutation entre tracés, calculs et essais ; depuis vingt cinq ans, les mécaniciens et les électriciens collaborent dès le début de la période de conception ; plus tard, les philosophes, les psychologues et les organisateurs professionnels ont trouvé un nom pour cette pratique : c'est l'ingénierie simultanée.

Bien cordialement.

P. Bézier

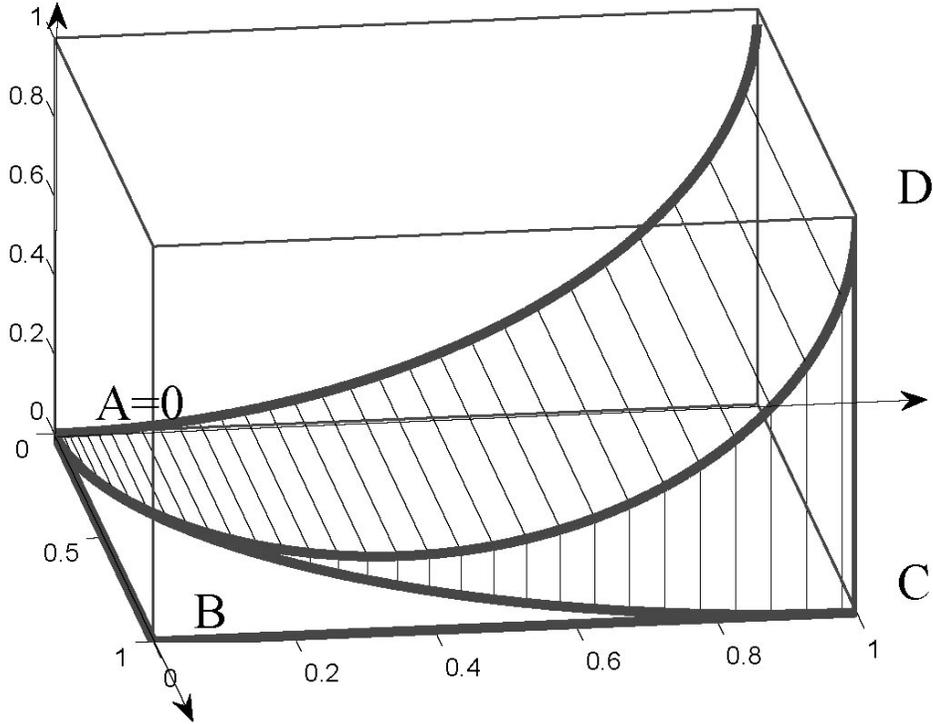


FIG. 2 – L'idée initiale de Bézier : prendre pour courbe de base la courbe d'intersection de deux quarts de cylindres inscrits dans un cube, dont on a matérialisé ici certaines génératrices. Les points A, B, C, D ne sont autres que les  $P_0, P_1, P_2, P_3$  du texte.

## Annexe : des "fonctions f" aux polynômes de Bernstein

(Se reporter à la Fig. 3). Les fonctions cubiques de la formule (15) sont définies par :

$$f_1(t) = t(3-3t+t^2), \quad f_2(t) = t^2(3-2t), \quad f_3(t) = t^3 \quad \text{auxquelles nous adjoignons : } f_0(t) = 1. \quad (16)$$

Le passage des fonctions  $f_k$  aux polynômes de Bernstein s'explique par une transformation assez simple, comme nous allons le montrer. Récrivons pour cela la formule (15) (en rendant implicite la référence à la variable  $t$ ) :

$$M = f_0 P_0 + f_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + f_2 \overrightarrow{P_1 P_2} + f_3 \overrightarrow{P_2 P_3}$$

ce qui donne, grâce aux notations du "calcul barycentrique" :

$$M = f_0 P_0 + f_1 (P_1 - P_0) + f_2 (P_2 - P_1) + f_3 (P_3 - P_2) = (f_0 - f_1) P_0 + (f_1 - f_2) P_1 + (f_2 - f_3) P_2 + f_3 P_3 \quad (17)$$

On constate alors que les  $(f_k - f_{k+1})$  ne sont autres que les polynômes de Bernstein  $\beta_{3,k}$ , ce qui ramène à la forme (6)<sup>41</sup> et achève ainsi la preuve de ce que dit P. Bézier dans sa lettre.

<sup>41</sup>On notera dans (17) la forte analogie avec une intégration par parties.

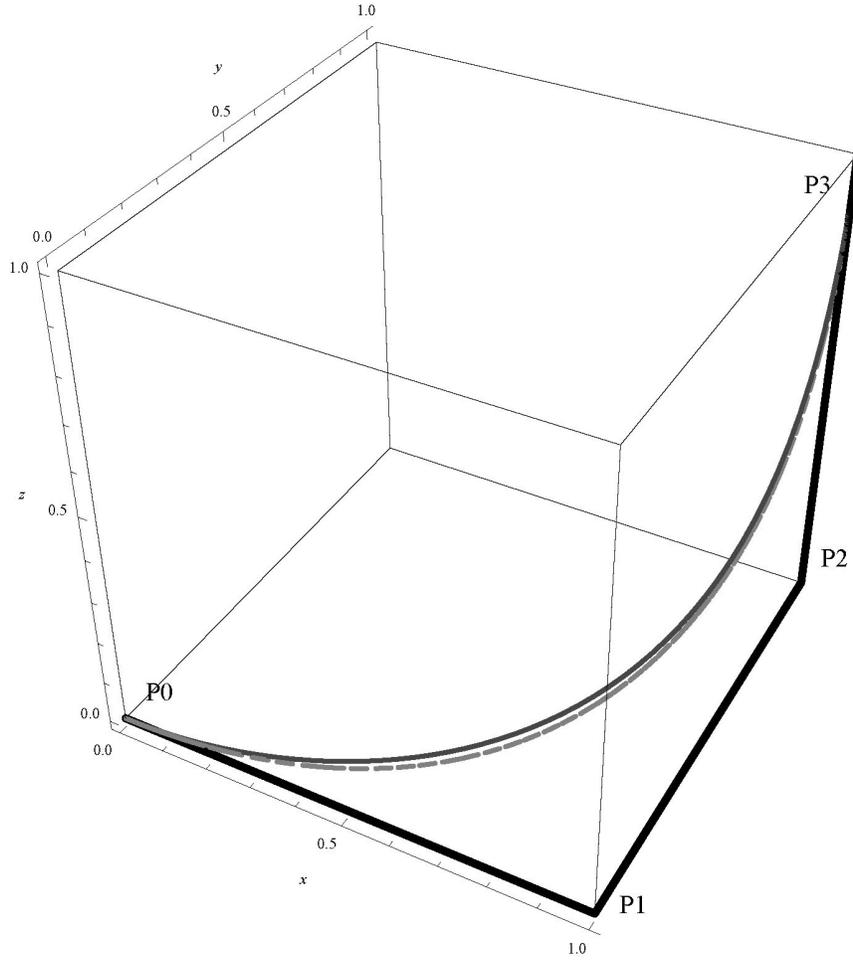


FIG. 3 – En traits épais, la courbe de la Fig. 2. En traits pointillés, la C.B. cubique 3D, décrite par (15), qui en est une bonne approximation, nettement plus simple du point de vue analytique ; ses équations, développées, sont  $(x, y, z) = s^3P_0 + 3s^2tP_1 + 3st^2P_2 + t^3P_3$  avec  $P_0 = (0, 0, 0)$ ,  $P_1 = (1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 1, 0)$ ,  $P_3 = (1, 1, 1)$ , soit en remplaçant  $s$  par  $1 - t$  :  $x(t) = f_1(t)$ ,  $y(t) = f_2(t)$ ,  $z(t) = f_3(t) = t^3$  ; (voir formule (16) pour les expressions des  $f_k$ ). On se reportera à la Fig. 4 pour les représentations graphiques des  $f_k$  et des  $\beta_{3,k}$ .

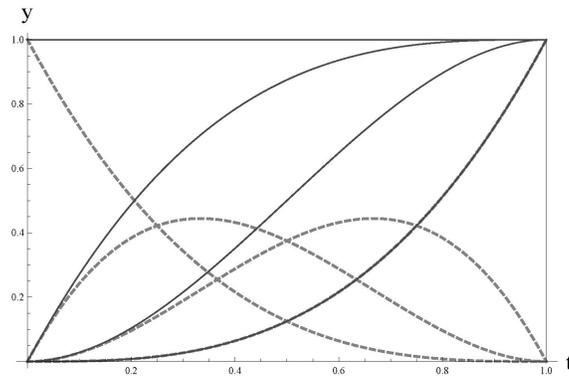


FIG. 4 – Représentations graphiques des fonctions  $f_k$  (en traits pleins) et  $\beta_{3,k}$  (en pointillés). Noter que  $f_3$  et  $\beta_{3,3}$  coïncident.