ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2014 - Partie D

TITRE :

Suites de Stern et énumération de rationnels

Temps de préparation : ……………………………..……2 h 15 minutes
Temps de présentation devant les examinateurs : …….10 minutes
Dialogue avec les examinateurs : ………………………..10 minutes

GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 12 pages
Document principal (12 pages, dont celle-ci) ; annexe : 0 page

Travail **suggéré** au candidat :

Le candidat pourra présenter les outils et résultats du document en les situant par rapport à ses connaissances et en les illustrant par des exemples. Il montrera l'intérêt de l'énumération des rationnels fourni par l'arbre de Stern par rapport à la méthode classique. Il pourra avantageusement présenter certaines des démonstrations qui dans le dossier sont incomplètes ou manquantes.

Attention : *si le candidat préfère effectuer un autre travail sur le dossier, il lui est* ***expressément recommandé*** *d'en informer le jury avant de commencer l'exposé.*

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant les examinateurs.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper … mais tout sera à remettre aux examinateurs en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (dossier, transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêt à débuter votre exposé.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre aux examinateurs le présent dossier dans son intégralité. Tout ce que vous aurez présenté aux examinateurs pourra être retenu en vue de sa destruction.

IL EST INTERDIT DE SORTIR LE DOSSIER DU SITE DE L'EPREUVE

Suites de Stern et énumérations de rationnels

I Coefficients binomiaux et suite de Fibonacci.

Nous noterons les coefficients binomiaux par $\binom{n}{k}$. C'est donc le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n . Notons que ce nombre est tout à fait défini, mais nul, pour $k > n$.

On peut former 2^n mots distincts de longueur n sur l'alphabet constitué des deux lettres $\{0,1\}$. Si k est un entier le nombre de mots de longueur n utilisant exactement k fois la lettre 1 est $\binom{n}{k}$.

Ceci fournit une illustration de l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Parmi les mots de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$ considérons l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathrm{n}}$ de ceux qui sont sans 1 consécutifs. Ainsi $\mathcal{F}_4 = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001,1010, 1001, 0101\}$. On appellera ces mots, *mots de Fibonacci de longueur n*. Si u_n désigne le nombre de mots de Fibonacci de longueur n on a $u_0 = 1$ en considérant le mot vide, puis, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 8$ …

Certains lecteurs perspicaces auront conjecturé que $u_n = F_{n+2}$, où (F_n) est la suite dite de Fibonacci caractérisée par la récurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Montrons ce résultat.

Soit $w = w_1w_2 \dots w_n$ un mot de Fibonacci de longueur $n \geq 2$.

Si w se termine par 0, le mot $w_1w_2 .. w_{n-1}$ est un mot de Fibonacci de longueur $n - 1$. Rajouter un 0 à un mot induit une bijection entre $\mathcal{F}_{n-1}$ et les mots de $\mathcal{F}_n$ se terminant par 0 (on utilise le terme concaténer pour ajouter une ou plusieurs lettres à un mot).

Si w se termine par 1 alors ce 1 est nécessairement précédé par un 0. Concaténer un mot avec 01 induit une bijection entre $\mathcal{F}_{n-2}$ et les mots de $\mathcal{F}_n$ se terminant par 1. La suite (u_n) est donc bien la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Rappelons que l'on peut en déduire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Considérons un problème d'énumération d'objets dépendant d'un paramètre n, comme ici le nombre de mots de Fibonacci de longueur n. Les premières valeurs de la suite (u_n) ainsi obtenue correspondent très souvent à celles d'une suite déjà rencontrée lors d'un autre problème. Ceci suggère l'existence d'une bijection, pour chaque valeur de n, entre éléments des deux ensembles. Expliciter cette bijection peut être la façon la plus simple d'obtenir (u_n) si par ailleurs le second problème a déjà été résolu. Le travail du mathématicien contemporain est facilité par l'existence de la base de donnée 'OEIS: Encyclopédie en ligne des suites d'entiers'. Créée par N.J. Sloane, puis enrichie régulièrement par des milliers d'utilisateurs, elle catalogue les premiers termes de 200 000 suites d'entiers avec de nombreuses informations et des exemples de dénombrements utilisant cette suite. Grâce aux outils de recherche de l'OEIS il est immédiat de trouver, par exemple, qu'il existe 72 suites connues dans la base qui commencent par (1,3,5,7,11). On essaiera ensuite d'établir une bijection avec un problème correspondant à une des suites candidates. Alors que certaines de ces bijections sont très naturelles, d'autres sont particulièrement remarquables.

Soit un rectangle $2\times n$, c'est-à-dire constitué de 2 lignes de n cases unités. Appelons domino horizontal un rectangle 1×2 et domino vertical un rectangle 2×1. Soient P_n l'ensemble des pavages du rectangle $2\times n$ par des dominos et $p_n = |\, P_n \,|$ le cardinal de P_n.

Les premières valeurs de (p_n) pour n=0,1,2.. sont (1, 1, 2, 3, 5, 8, ..). Par exemple on a représenté Figure 1 les 8 pavages possibles du rectangle 2×5 par des dominos. La plus naturelle des 232 solutions proposées par l'OEIS est à nouveau la suite de Fibonacci (décalée cette fois ci d'un terme). Cette conjecture est confortée par le calcul de quelques termes supplémentaires. Pour la prouver peut-on trouver une bijection entre pavages et mots de Fibonacci ?

Remarquons que les dominos horizontaux apparaissent par paires. Associons 01 à deux dominos horizontaux superposés et 0 à un domino vertical. On peut ainsi coder tout pavage de P_n par un mot de longueur n. Les mots obtenus sont des mots de Fibonacci de longueur n commençant par 0. Inversement à un tel mot on peut associer un pavage. Enlever le premier 0 d'un mot de Fibonacci de longueur n commençant par 0 est une bijection avec les mots de Fibonacci de longueur $n-1$. On a donc bien $p_n = |P_n| = |\,\mathcal{F}_{n-1}| = F_{n+1}$.

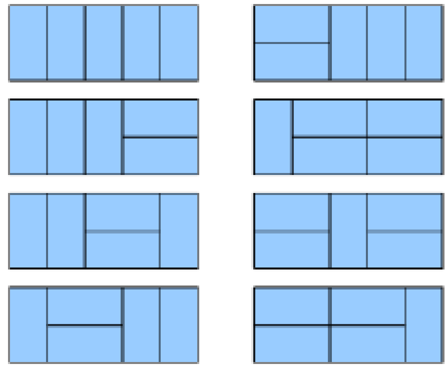


Figure 1: les 8 pavages d'un rectangle 2×5 par des dominos

La suite de Fibonacci apparaît naturellement dans le triangle de Pascal. Rappelons que celui-ci représente les coefficients binomiaux et est obtenu en construisant la n-ième ligne à partir de la précédente grâce à la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Figure 2: Triangle de Pascal

On peut facilement montrer la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}. \qquad (1)$$

Pour simplifier nous avons écrit la sommation jusqu'à $k=n$ mais les termes $\binom{n-k}{k}$ tels que $k > \frac{n}{2}$ sont nuls.

Ainsi les termes de la suite de Fibonacci apparaissent comme la somme des termes rencontrés sur les diagonales ascendantes du triangle de Pascal (Figure 3).

Une interprétation de cette relation est que le nombre de mots de Fibonacci de longueur $n - 1$ utilisant exactement k fois la lettre 1 est exactement $\binom{n-k}{k}$. En voici une démonstration remarquable.

Soit $w_1w_2 \ldots w_{n-1}$ un mot de Fibonacci de longueur $n - 1$ utilisant k fois la lettre 1. Posons $w_n = 0$. Puisque le mot $w_1w_2 \ldots w_n$ ne contient pas de 1 consécutifs et se termine par 0 toute occurrence de 1 est suivie d'un 0. Posons # = 01. En remplaçant les occurrences de 01 par # nous pouvons associer à $w_1w_2 \ldots w_n$ un mot $m_1m_2 \ldots m_{n-k}$ sur l'alphabet {0,#} de longueur $n - k$ utilisant k fois la lettre #. Il est immédiat que chaque mot $m_1m_2 \ldots m_{n-k}$ de ce type proviendra d'un unique $w_1w_2 \ldots w_n$. Or le nombre de mots de longueur $n - k$ sur l'alphabet {0,#} utilisant k fois la lettre '#' est $\binom{n-k}{k}$.

Ainsi en sommant sur toutes les valeurs possibles de k on obtiendra le nombre total de mots de Fibonacci de longueur $n - 1$ soit F_{n+1} et donc la relation (1).

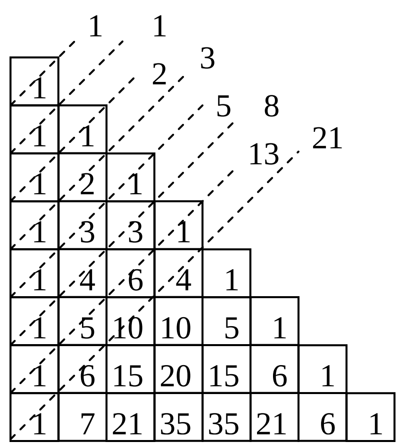


Figure 3: Triangle de Pascal et nombres de Fibonacci

II La suite de Stern.

La suite de Stern (1858) est également liée aux coefficients binomiaux et aux nombre de Fibonacci. Elle est définie par $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ puis pour $n \geq 1$ $s_{2n} = s_n$, et $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$. Ainsi les premiers termes de cette suite sont 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, …

Reprenons le triangle de Pascal et comptons le nombre de coefficients binomiaux impairs le long des diagonales ascendantes successives. Nous obtenons les termes de la suite de Stern (Figure 4).

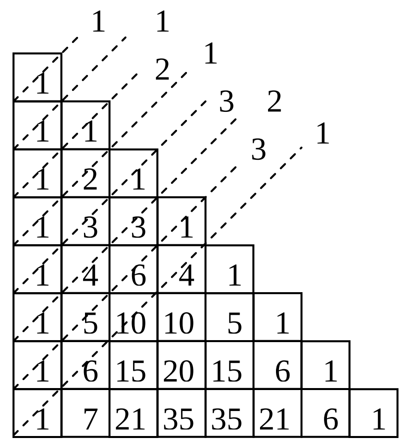


Figure 4: Triangle de Pascal et suite de Stern

En effet on peut montrer la relation suivante analogue à (1)

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n-k}{k} \bmod 2\right] = s_{n+1}. \tag{2}$$

Si nous groupons les premiers termes de s_n pour $n \geq 1$ par lignes de successivement 1, 2, 4, .., 2^k éléments (Figure 5) on remarque que la somme des valeurs de chaque ligne est une puissance de 3.

1															
1	2														
1	3	2	3												
1	4	3	5	2	5	3	4								
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5

Figure 5: Tableau tassé de Stern

Ce que traduit la relation

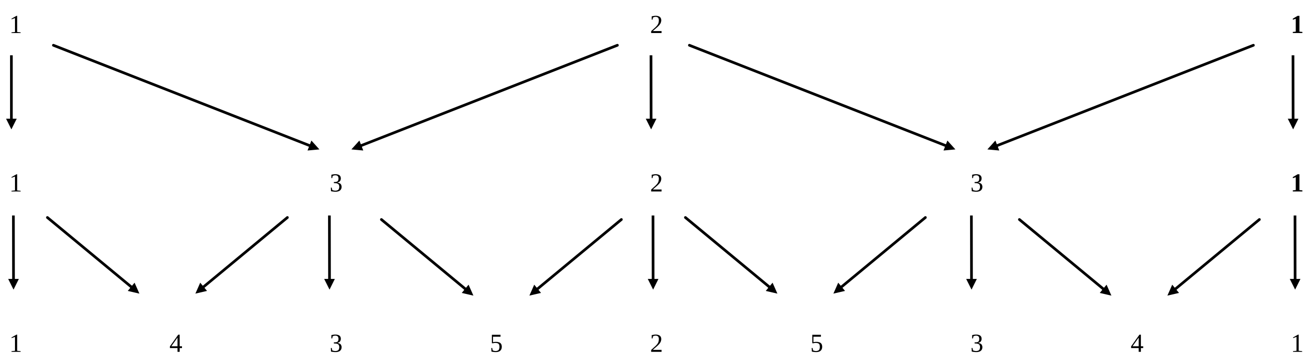
$$\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} s_i = 3^k \tag{3}$$

Complétons le tableau par une colonne de 1 figurée en gras et disposons les termes de chaque ligne à intervalles réguliers (Figure 6).

1																**1**
1								2								**1**
1				3				2				3				**1**
1		4		3		5		2		5		3		4		**1**
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	**1**

Figure 6: Tableau de Stern

On remarque que chaque ligne est obtenue en recopiant la ligne précédente et en insérant entre chaque terme leur somme. Ceci n'est en fait que le reflet de la définition de la suite (s_n). Remarquons d'abord que chaque ligne commence par $s_{2^j} = 1$. La seconde ligne est constituée de s_2, s_3 et 1. La troisième ligne est bien obtenue en posant $s_4 = s_2 = 1$, $s_6 = s_3$ suivi d'un 1 et en insérant $s_5 = s_2 + s_3$ et $s_7 = s_3 + s_4 = s_3 + 1$ et ainsi de suite. Le procédé est finalement proche de la construction du triangle de Pascal mais avec une étape supplémentaire de copie de la ligne précédente.



On remarque que chaque terme d'une ligne (hormis le premier et le dernier) est compté 3 fois dans la sommation des termes de la ligne suivante. Ainsi $s_5=3$ apparaitra dans s_9, s_{10} et s_{11} dans la somme $\sum_{i=8}^{15} s_i$. Par récurrence on en déduit la relation (3).

Notons également que, comme dans le triangle de Pascal, chaque ligne dans le tableau de Stern est un palindrome c'est-à-dire qu'elle est identique en la lisant de gauche à droite ou de droite à gauche.

On peut se demander ce que compte la suite de Stern. L'interprétation la plus simple est la suivante.

Représenter un entier non nul n en base 2 revient à lui associer le mot $a_k a_{k-1} \ldots a_0$ où a_k, a_{k-1}, …, a_0 sont les uniques entiers dans $\{0, 1\}$ tels que $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$ avec $a_k \neq 0$. De manière analogue on dira que $b_k b_{k-1} \ldots b_0$ est une représentation hyperbinaire de n si on a $n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$ ou les b_i sont dans $\{0, 1, 2\}$ avec $b_k \neq 0$. En général un nombre possède plusieurs représentations hyperbinaires, ainsi 8 peut s'écrire 1000, 200, 120 et 112.

Théorème 1(Carlitz,1964)

Le nombre de représentations hyperbinaires de n est s_{n+1}.

Preuve: Notons u_n le nombre de représentations hyperbinaires de n et montrons que $u_n = s_{n+1}$ par récurrence. Notons tout d'abord que 0 et 1 n'ont qu'une représentation hyperbinaire en accord avec $s_1 = s_2 = 1$.

Supposons n impair, posons $n=2p+1$ et considérons une représentation hyperbinaire $n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$. Puisque n est impair on a forcément $b_0 = 1$. On peut écrire $n-1 = \sum_{i=1}^{k} b_i 2^i = \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} 2^{i+1} = 2\sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} 2^i$. On a donc $p = \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} 2^i$ ce qui se réécrit $p = \sum_{i=0}^{k-1} c_i 2^i$ en posant $c_i = b_{i+1}$. Réciproquent, par ces formules, toute représentation hyperbinaire de p fournit une représentation hyperbinaire de $n = 2p+1$. On a donc une bijection entre les représentations hyperbinaires de $2p+1$ et celles de p d'où $u_n = u_{2p+1} = u_p$. Or par hypothèse de récurrence $u_p = s_{p+1}$ et on vérifie bien $u_n = s_{p+1} = s_{2p+2} = s_{n+1}$.

Si n est pair, posons $n = 2p$. Dans toute représentation hyperbinaire de n on aura $b_0 = 0$ ou $b_0 = 2$. On en déduira de la même façon que $u_{2p=}$ $u_p + u_{p-1}$ ce qui, par hypothèse de récurrence, vaut $s_{p+1} + s_p = s_{2p+1} = s_{n+1}$.

Plusieurs autres propriétés remarquables de la suite de Stern commencent à apparaitre sur le tableau tassé de Stern de la Figure 5:

- chaque colonne est une suite arithmétique,
- les raisons successives de ces suites arithmétiques sont 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, … c'est-à-dire la suite de Stern elle-même,

– les maxima des lignes sont successivement 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... c'est-à-dire les termes de la suite de Fibonacci!

III Arbre de Stern-Brocot et énumération des rationnels.

Cet arbre est apparu dans les travaux d'Achille Brocot en 1860. Cet horloger a proposé un outil théorique pour pouvoir obtenir par des moyens simples des approximations successives de n'importe quel nombre par des rationnels dont on limite les numérateurs et dénominateurs. Le but pratique était de réaliser ces approximations par des engrenages ayant peu de dents. Mais l'utilisation que nous allons en faire n'a été découverte que beaucoup plus récemment puisque elle est issue des travaux de Calkin et Wilf (1999).

Cantor a introduit en 1874 la notion d'ensemble infini dénombrable. Un ensemble infini est dit dénombrable si il est en bijection avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$**.** Par exemple $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais pas $\mathbb{R}$**.** Pour prouver que $\mathbb{Q}$ est dénombrable on utilise en général l'argument de Cantor. Considérons les points du plan dont les coordonnées sont un couple (p,q) d'entiers positifs. On peut parcourir cet ensemble diagonale par diagonale pour obtenir (0,0), (1,0), (0,1), (2,0),(1,1),(0,2), (3,0)(2,1)(1,2)(0,3), etc. Cet ensemble, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, est donc dénombrable. Pour monter que les rationnels positifs sont dénombrables on peut associer au rationnel $\dfrac{p}{q}$ l'élément (p, q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$**.** On parcourra cet ensemble suivant les diagonales mais en ignorant les couples tels que p et q ne sont pas premiers entre eux. On obtiendra ainsi $u_0 = 0/1 = 0$, $u_1 = 1/1 = 1$, $u_2 = 2/1 = 2$, $u_3 = 1/2$, $u_4 = 3/1 = 3$, $u_5 = 1/3$, $u_6 = 4/1 = 4$, $u_7 = 3/2$, $u_7 = 2/3$, etc.

Le défaut majeur de cette méthode est qu'il n'existe pas de moyen simple de déterminer quel est le n-ième nombre rationnel pour cette énumération. On ne peut pas non plus déterminer le successeur u_{n+1} d'un rationnel donné u_n. L'arbre de Stern-Brocot fournit une méthode d'énumération alternative résolvant ces problèmes.

On peut fabriquer l'arbre de Stern-Brocot de la façon suivante (Figure 7). On part d'un sommet particulier la racine $\dfrac{1}{1}$. Chaque sommet $\dfrac{i}{j}$ a deux descendants: un fils gauche $\dfrac{i}{i+j}$ et un fils droit $\dfrac{i+j}{j}$. En itérant le procédé on obtient un arbre binaire infini. En le parcourant de gauche à droite niveau par niveau on obtient une suite (v_n) dont les premiers termes sont $v_1 = 1/1$, $v_2 = 1/2$, $v_3 = 2/1$, $v_4 = 1/3$, $v_5 = 3/2$, $v_6 = 2/3$, $v_7 = 3/1$, $v_8 =1/4$,… On posera de plus arbitrairement $v_0 = 0$.

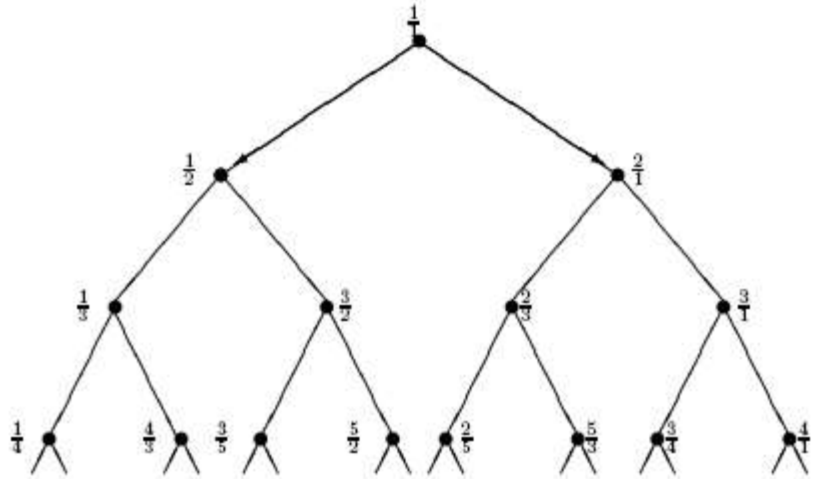


Figure 7: Arbre de Stern

Théorème 2 Tout nombre rationnel positif apparaît une et une seule fois dans l'arbre. La suite (v_n) est donc une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}^+$.

La preuve de ce théorème repose sur un certain nombre de propriétés de l'arbre. Remarquons tout d'abord qu'un sommet $\frac{i}{j}$ vérifie $i < j$ si c'est un fils gauche et $i > j$ si c'est un fils droit. En particulier, il est clair que 1 n'apparaît que comme racine de l'arbre.

Lemme 1: Soit $\frac{i}{j}$ un sommet alors i et j sont premiers entre eux.

Puisque pgcd(i+j,j)= pgcd(i,i+j)= pgcd(i,j), si les dénominateurs et numérateurs du sommet $\frac{i}{j}$ sont premiers entre eux ses fils vérifient la même propriété. Par récurrence sur le niveau d'exploration de l'arbre le lemme est donc prouvé.

Lemme 2: Tout nombre rationnel strictement positif apparaît dans l'arbre.

En effet dans le cas contraire parmi les rationnels n'apparaissant pas dans l'arbre considérons ceux dont le dénominateur est minimum et parmi ceux-ci soit $\frac{p}{q}$ de numérateur minimum. On a $p \neq q$ puisque 1 est dans l'arbre. Si $p < q$ alors $\frac{p}{q-p}$ ayant un dénominateur plus petit est présent dans l'arbre. Mais son fils gauche est

$\frac{p}{q}$ ce qui contredit le fait que $\frac{p}{q}$ n'est pas dans l'arbre. Le cas $q<p$ est analogue.

Lemme 3: Il n'y a pas de nombre rationnel apparaissant deux fois dans l'arbre.

Là aussi dans le cas contraire parmi les rationnels apparaissant plusieurs fois dans l'arbre considérons ceux dont le dénominateur est minimum et parmi ceux-ci celui $\frac{p}{q}$ de numérateur minimum. D'après la remarque ci-dessus 1 n'apparait qu'une fois dans l'arbre donc $p \neq q$. Si $p<q$ alors le père d'un sommet $\frac{p}{q}$ est $\frac{p}{q-p}$ qui devrait donc lui même apparaître plusieurs fois ce qui contredit la minimalité du dénominateur. Le cas $q<p$ est analogue.

La suite (v_n) est donc bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}^+$. Quel est le lien avec la suite de Stern? Les numérateurs des premiers rationnels apparaissant dans la suite (v_n) sont 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, ... et les premiers dénominateurs 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, ... cela n'évoque-t-il rien?

Théorème 3 $$v_n = \frac{s_n}{s_{n+1}}$$

En voici une démonstration par l'absurde. Remarquons tout d'abord que si $n=2m$ est pair alors v_n est un fils gauche de v_m . De même si $n = 2m+1$ est impair alors v_n est un fils droit de v_m.

Le théorème est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Si ce n'était pas toujours le cas soit n le plus petit entier tel que $v_n \neq \frac{s_n}{s_{n+1}}$. Le père du sommet v_n est un sommet $v_m = \frac{s_m}{s_{m+1}}$ puisque $m < n$.

Si $n = 2m$ est pair, alors puisque v_n est un fils gauche de v_m on a $v_n = \frac{s_m}{s_m + s_{m+1}} = \frac{s_{2m}}{s_{2m+1}}$ ce qui contredit $v_n \neq \frac{s_n}{s_{n+1}}$.

Si $n = 2m+1$ est impair, alors v_n est un fils droit de v_m donc $v_n = \frac{s_m + s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{s_{2m+1}}{s_{2m+2}}$ ce qui contredit également $v_n \neq \frac{s_n}{s_{n+1}}$ et termine la preuve du théorème.

La définition de la suite de Stern fournit un algorithme efficace pour déterminer s_n et s_{n+1} donc le n-ième rationnel de notre énumération mais peut-on déterminer le successeur d'un rationnel donné c'est-à-dire calculer v_{n+1} à partir de v_n sans connaitre la valeur de n?

Théorème 4 Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+2[x]-x}$ où $[x]$ désigne la partie entière de x. Le successeur de v_n est donné par $f(v_n)$.

Preuve: On a bien $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Si $n = 2m$ est pair, la vérification est facile. On a $s_n < s_{n+1}$ puisque $s_n = s_{2m} = s_m$ et $s_{n+1} = s_{m+} s_{m+1}$. D'où

$$f\left(\frac{s_n}{s_{n+1}}\right) = = \frac{1}{1+2\left[\dfrac{s_n}{s_{n+1}}\right]-\dfrac{s_n}{s_{n+1}}} = \frac{1}{1-\dfrac{s_n}{s_{n+1}}} = \frac{s_{n+1}}{s_{n+1}-s_n} = \frac{s_{n+1}}{s_{m+1}} = \frac{s_{n+1}}{s_{n+2}}.$$

La démonstration dans le cas général est un peu plus compliquée. En voici le canevas. L'idée est de remarquer qu'on est, sauf quand v_n est au bord droit de l'arbre, dans la situation suivante :

v_n et v_{n+1} ont un ancêtre commun, y, k+1 niveaux au-dessus d'eux où $k \geq 0$. De plus v_n provient d'une suite de k fils droits du fils gauche de y et v_{n+1} d'une suite de k fils gauches du fils droit de y.

On en déduit $x = v_n = \dfrac{y}{1+y} + k$ et $v_{n+1} = \dfrac{y+1}{1+k(y+1)}$. On a donc $[x] = k$ il n'y a plus qu'à remarquer que

$$\frac{y+1}{1+k(y+1)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y+1}+k} = \frac{1}{1-\dfrac{y}{y+1}+k} = \frac{1}{1-x+k+k} = \frac{1}{1-x+2k} = \frac{1}{1-x+2[x]} = f(x).$$