

# Épreuve de TIPE – Partie D

## **Titre : Propagation d'un polluant**

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

### **Guide pour le candidat**

Le dossier ci-joint comporte :

- Document principal : 11 pages
- Document complémentaire : 2 pages

**Travail suggéré au candidat :** Faire une synthèse du document. On s'attachera, en particulier, à mettre en évidence la progression des raisonnements et des conclusions tout le long du texte.

### **CONSEILS GÉNÉRAUX POUR LA PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE :**

- Lisez le dossier en entier en un temps raisonnable.
- Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

Les modèles de pollution (par exemple atmosphérique) sont des descriptions mathématiques du transport, de la diffusion et des réactions chimiques des polluants. Les équations sont généralement des équations aux dérivées partielles (EDP) et des systèmes dynamiques, et les inconnues sont des concentrations de polluants. Une question majeure est de connaître les « pics de pollution » (i.e. le maximum des concentrations).

## 1 Modèle physique

Nous considérons un modèle de convection-diffusion. La convection est due au mouvement de l'air (le vent) qui disperse le polluant. Ce phénomène est un phénomène macroscopique (mélanges de masses d'air). Le phénomène de diffusion est un phénomène microscopique; les particules des espèces chimiques polluantes ont tendance à aller des zones de haute concentration vers les zones de faible concentration. Dans le modèle de convection-diffusion, ces deux types de dispersion sont pris en compte. Par ailleurs, nous supposons que le polluant est constitué d'un seul composant chimique et celui-ci n'interagit avec aucun autre composant. On n'a donc pas de réaction chimique et cette hypothèse simplifie considérablement le modèle.

On note  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  ou  $3$ ,  $T$  un réel,  $T > 0$ ,  $\vec{u}(x)$  la vitesse de l'air au point  $x$ ,  $x \in \Omega$ , et  $c(x, t)$  la concentration au point  $x$  et au temps  $t$ . (Notons que la vitesse est indépendante du temps). Les équations du modèle sont les suivantes:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) - \sigma \Delta c(x, t) + \vec{u}(x) \cdot \vec{\nabla} c(x, t) = 0 \quad x \in \Omega, t \in ]0, T[ \quad (1)$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \vec{u} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et  $\sigma > 0$  est le coefficient de diffusivité du polluant dans l'air. Nous avons besoin pour résoudre cette équation d'une *condition initiale*:

$$c(x, 0) = c_0(x) \quad x \in \Omega; \quad \text{avec } c_0(x) \text{ donné,} \quad (2)$$

et de conditions aux bords:

$$c(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \in [0,T[ \quad (3)$$

Il est admis que dans l'équation (1), le terme  $-\sigma\Delta c$  modélise la diffusion tandis que le terme  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} c$  modélise la convection.

## 2 Analyse mathématique du modèle en dimension 1

### 2.1 Modèle de diffusion pure

On considère le cas unidimensionnel,  $\Omega = ]0,1[$ , on néglige le terme de convection ( $u = 0$ ) et on suppose que  $\sigma = 1$ . Les équations du modèle sont alors les suivantes:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad x \in ]0,1[, t \in ]0,T[ \quad (4)$$

$$c(0,t) = c(1,t) = 0 \quad t \in [0,T[ \quad (5)$$

$$c(x,0) = c_0(x) \quad x \in [0,1]; c_0(x) \text{ donné} \quad (6)$$

Nous allons montrer que la solution de (4)-(6) est unique et donner son expression.

**Unicité de la solution** Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux solutions, on pose:  $c = c_1 - c_2$ . La fonction  $c$  vérifie (4), (5) et:  $c(x,0) = 0$  pour tout  $x \in [0,1]$ . Multiplions (4) par  $c$  et intégrons sur  $[0,1]$ :

$$\int_0^1 \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)c(x,t)dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)c(x,t)dx = 0 \text{ pour tout } t \in ]0,T[$$

En intégrant par parties et à l'aide des conditions aux bords, on obtient:

$$\int_0^1 \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)c(x,t)dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial c}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx = 0 \text{ pour tout } t \in ]0,T[$$

soit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 c^2(x,t) dx \leq 0 \text{ pour tout } t \in ]0, T[$$

Donc  $E(t) = \int_0^1 c^2(x,t) dx$  est une fonction décroissante et positive. De plus,  $E(0) = 0$ ; par conséquent,  $c(x,t) = 0$  pour tout  $x \in [0,1]$  pour tout  $t \in [0, T[$ .

**Expression de la solution** Nous allons résoudre le problème (4)-(6) par la méthode dite de séparation des variables, ce qui consiste à chercher la solution  $c(x,t)$  sous la forme:  $c(x,t) = \varphi(t)\psi(x)$ . (Du fait que la solution de (4)-(6) est unique, si nous trouvons une telle solution à variable séparée alors on aura montré que c'est la solution du problème).

L'équation (4) donne:  $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$  pour tout  $t$ , pour tout  $x$ .

On en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que:  $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \lambda$ ;  $\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \lambda$  pour tout  $t$ , pour tout  $x$ .

D'où:  $\varphi(t) = C \exp(\lambda t)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Cherchons à présent l'expression de  $\psi(x)$ .

1er cas:  $\lambda > 0$ . On pose:  $\lambda = a^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . On a:  $\psi''(x) - a^2\psi(x) = 0$ .

D'où:  $\psi(x) = A \exp(ax) + B \exp(-ax)$ ;  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Les conditions aux bords (5) donnent:  $A = B = 0$  et  $A \exp(a) + B \exp(-a) = 0$ . Ce qui donne:  $c(x,t) \equiv 0$ , ce qui est impossible.

2ème cas:  $\lambda = 0$ . On a:  $\psi''(x) = 0$ . D'où:  $\psi(x) = Ax + B$ .

Et d'après (5):  $A = B = 0$ . Ce qui est à nouveau impossible.

3ème cas:  $\lambda < 0$ . On a:  $\lambda = -a^2$  et  $\psi''(x) + a^2\psi(x) = 0$ .

Par ailleurs, nous ne cherchons que les solutions réelles. On obtient alors:  $\psi(x) = A \cos(ax) + B \sin(ax)$ . D'après les conditions aux bords (5):  $A = 0$  et  $B \sin(a) = 0$ , d'où  $a = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (Le cas  $B = 0$  est exclu pour les mêmes raisons que précédemment). On obtient finalement:

$$c(x,t) = A_k \exp(-k^2 \pi^2 t) \sin(k\pi x), k \in \mathbb{Z}, A_k \in \mathbb{R} \quad (7)$$

La fonction  $c(x,t)$  définie par (7) vérifie bien (4) et (5). Il reste à vérifier la condition initiale (6). Ce qui donne:  $c_0(x) = A_k \sin(k\pi x)$ .

Par conséquent, pour une distribution initiale de concentration de la forme  $A_k \sin(k\pi x)$ , la solution du problème (4)-(6) est la fonction  $c(x,t)$  définie par (7). Mais, à priori, la distribution initiale de concentration du polluant n'est pas de la forme  $A_k \sin(k\pi x)$ ! Cependant, nous allons « superposer » les solutions selon le principe suivant.

Nous supposons que la condition initiale  $c_0(x)$  est continue et dérivable sur  $[0,1]$ . Si l'on prolonge  $c_0(x)$  sur  $[-1,1]$  de façon impaire i.e. nous construisons  $\tilde{c}_0(x)$  tel que  $\tilde{c}_0(x)$  soit continue, dérivable, impaire sur  $[-1,1]$  et  $\tilde{c}_0(x) = c_0(x)$  pour  $x \in [0,1]$ . On prolonge ensuite  $\tilde{c}_0(x)$  par périodicité (de période 2) sur  $\mathbb{R}$  tout entier. On peut alors développer la fonction obtenue  $\tilde{c}_0(x)$  en série de sinus:

$$\tilde{c}_0(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \sin(k\pi x) \text{ avec } b_k = 2 \int_0^1 \tilde{c}_0(x) \sin(k\pi x) dx$$

Et nous écrivons:

$$c(x,t) = \sum_{k \geq 1} b_k \exp(-k^2 \pi^2 t) \sin(k\pi x) \quad (8)$$

où  $(b_k)_{k \geq 1}$  sont les coefficients du développement de Fourier de  $\tilde{c}_0(x)$ . Le fait de chercher  $c(x,t)$  de la forme (8) consiste à « superposer » les solutions; ce qui nous est permis puisque l'équation (4) est linéaire par rapport à l'inconnue  $c(x,t)$ . Remarquons qu'étant donnée la régularité de  $\tilde{c}_0$ , la série (8) est uniformément convergente. La fonction  $c(x,t)$  définie par (8) est alors continue en  $t$  et continue en  $x$ . De même si nous dérivons (8) par rapport à  $t$  et par rapport à  $x$ , nous obtenons des séries uniformément convergentes. Nous obtenons:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) = - \sum_{k \geq 1} b_k k^2 \pi^2 \exp(-k^2 \pi^2 t) \sin(k\pi x), t > 0, x \in ]0,1[$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) = - \sum_{k \geq 1} b_k k^2 \pi^2 \exp(-k^2 \pi^2 t) \sin(k\pi x), t > 0, x \in ]0,1[$$

On obtient finalement que la fonction  $c(x,t)$  définie par (8) est solution de (4) pour  $t > 0$  et  $x \in ]0,1[$ . Il reste à voir si  $c(x,t)$  vérifie les conditions aux bords et la condition initiale.

Du fait que la série est uniformément convergente par rapport à  $x$  (dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 1$  lorsque  $t > 0$ ), nous avons bien:  $\lim_{x \rightarrow 0} c(x,t) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} c(x,t)$ . De même:

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k \geq 1} b_k \exp(-k^2 \pi^2 t) \sin(k\pi x) = c_0(x), x \in [0,1]$$

On en conclut que la fonction  $c(x,t)$  définie par (8) est la solution de (4)-(6).

Nous remarquons d'après (8) que  $c(x,t)$  s'amortit au cours du temps, ce qui est conforme à l'intuition que l'on pouvait avoir dès le départ.

## 2.2 Modèle de convection pure

Nous considérons à présent le cas de la convection pure unidimensionnel avec la vitesse  $u$  constante. Les équations du modèle sont les suivantes:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = 0, x \in ]0,1[, t \in ]0,T[ \quad (9)$$

avec la condition initiale:

$$c(x,0) = c_0(x) x \in [0,1]; c_0(x) \text{ donné} \quad (10)$$

et une condition au bord que nous allons préciser. L'équation (9) s'appelle l'équation de transport. La condition au bord que l'on associe à (9) va dépendre du signe de la vitesse  $u$ . En effet, il est facile de vérifier que la solution de (9), (10) est:

$$c(x,t) = c_0(x - ut), x \in ]0,1[, t \in [0,T[ \quad (11)$$

Nous remarquons alors que la concentration est effectivement transportée selon le champ de vitesse  $u$  (cf fig. 1).

Le problème étant de connaître  $c(x,t)$  pour tout  $x \in [0,1]$  et pour tout  $t \in [0,T[$ , il apparaît que:

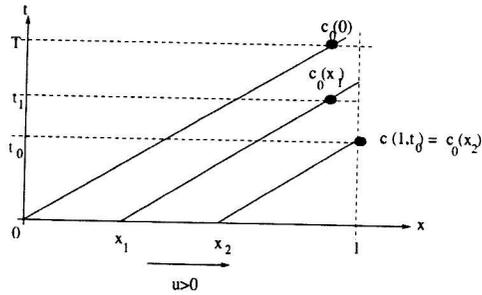


FIG. 1 – Solution de l'équation de transport unidimensionnelle ( $u > 0$ )

- i) une condition sur le bord où le champ de vitesse est rentrant est nécessaire (en  $x = 0$  pour  $u$  constante positive),
- ii) une condition sur le reste du bord est incompatible avec l'existence d'une solution  $c(x,t)$ , pour toute fonction  $c_0(x)$  donnée (assez régulière).

Nous prenons alors comme condition au bord, l'une des conditions suivantes:

$$\begin{cases} c(0,t) \text{ donné} & \text{si } u = \text{constante} > 0 \\ c(1,t) \text{ donné} & \text{si } u = \text{constante} < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Ainsi, le problème (9)(10)(12) admet comme unique solution, la fonction définie par (11).

Remarquons que contrairement au cas de la diffusion, la solution n'est pas amortie au cours du temps.

### 2.3 Modèle de convection-diffusion

Nous considérons maintenant le modèle de convection-diffusion unidimensionnel avec  $u$  constante. Les équations du modèle sont:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) - \sigma \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) + u \frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = 0, \quad x \in ]0,1[, t \in ]0,T[ \quad (13)$$

avec la condition initiale:

$$c(x,0) = c_0(x) \quad x \in [0,1]; \quad c_0(x) \text{ donné} \quad (14)$$

et une condition sur tout le bord:

$$c(0,t) = c(1,t) = 0, \quad t \in [0,T[ \quad (15)$$

De même que dans le paragraphe 2.1, nous pouvons montrer que la solution de (13)-(15) est unique. Donnons à présent une expression de cette solution. Connaissant le développement en série de Fourier (complexe) de  $c_0$ :

$$c_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \exp(ik\pi x)$$

on cherche la solution (de manière formelle) sous la forme:

$$c(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \exp(ik\pi x) \beta_k(t)$$

On a  $\beta_k(0) = 1$  et pour chaque  $k$ :

$$\alpha_k \exp(ik\pi x) [\beta_k'(t) - \sigma \beta_k(t)(ik\pi)^2 + u \beta_k(t)(ik\pi)] = 0 \text{ pour tout } x \text{ pour tout } t$$

soit:  $\beta_k'(t) = -(\pi^2 k^2 \sigma + i\pi k u) \beta_k(t)$  pour tout  $t$ . D'où (en tenant compte de  $\beta_k(0) = 1$ ):  $\beta_k(t) = \exp(-(\pi^2 k^2 \sigma + i\pi k u)t)$ , et donc

$$c(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \exp(-\pi^2 k^2 \sigma t) \exp(ik\pi(x - ut)) \quad (16)$$

La fonction  $c(x,t)$  définie par (16) est alors la solution de (13)-(15).

Remarquons que en prenant  $u = 0$  dans (16), nous retrouvons la solution du modèle de diffusion pure avec amortissement de la concentration initiale au cours du temps. De même, si nous prenons  $\sigma = 0$  dans (16), nous retrouvons la solution de l'équation de transport avec propagation de la concentration initiale sans amortissement.

### 3 Schémas numériques

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent que dans le cas unidimensionnel, avec  $u$  constant et des conditions aux bords simples, nous savions calculer la solution explicitement. Cependant, lorsque la géométrie du problème est deux ou trois dimensionnelles quelconque ou si  $u$  n'est pas constant ou encore si les données aux bords sont complexes, nous ne savons plus effectuer de tels calculs. Nous avons alors recours à l'approximation numérique. La méthode numérique la plus classique est la *méthode des différences finies*.



**Cas de la diffusion pure en dimension 1** Décrivons le principe de la méthode des différences finies dans le cas du modèle de diffusion pure unidimensionnel (4)-(6). On note  $c(x,t)$  la solution *exacte* de (4)-(6) (on suppose que l'on ne sache pas calculer cette solution). On discrétise la géométrie spatiale et le temps ainsi: on pose  $x_i = i\Delta x, \Delta x = \frac{1}{N}$  et  $t_n = n\Delta t, \Delta t = \frac{T}{M}$ . On note  $h = \Delta x$  le pas d'espace et  $k = \Delta t$  le pas de temps. Le point  $(x_i, t_n)$ ,  $0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M$  est un point du « maillage », cf Fig. 2.

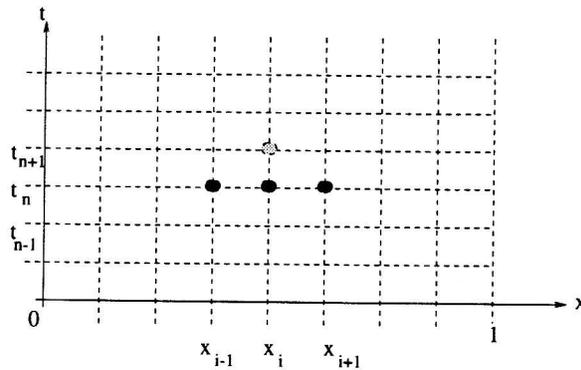


FIG. 2 - Maillage du schéma aux différences finies.

L'objectif du schéma aux différences finies va être de calculer une approximation de  $c(x,t)$  en chaque point du maillage  $(x_i, t_n)$ . On note par la suite  $c_i^n$  l'approximation de  $c(x_i, t_n)$ .

Le principe de construction du schéma aux différences finies est le suivant. On approche les termes  $\partial_t c(x_i, t_n)$  et  $\partial_{xx}^2 c(x_i, t_n)$  par des combinaisons linéaires de  $c(x,t)$  en des points voisins de  $(x_i, t_n)$ , cf Fig. 2. Pour cela, on écrit par exemple pour le terme en temps, le développement de Taylor suivant:

$$c(x_i, t_{n+1}) = c(x_i, t_n) + k \frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(x_i, t_n) + \dots$$

Et donc:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{c(x_i, t_{n+1}) - c(x_i, t_n)}{k} + O(k). \quad (17)$$

De même, on montre que:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{c(x_{i+1}, t_n) - 2c(x_i, t_n) + c(x_{i-1}, t_n))}{h^2} + O(h^2)$$

En injectant ces deux expressions dans l'équation (4), on obtient:

$$\frac{c(x_i, t_{n+1}) - c(x_i, t_n)}{k} - \frac{c(x_{i+1}, t_n) - 2c(x_i, t_n) + c(x_{i-1}, t_n))}{h^2} = O(k) + O(h^2)$$

pour  $1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1$ . On en déduit alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{k} - \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2} = 0 \\ \text{pour } 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1 \text{ (18.a)} \\ c_0^n = c_N^n = 0, 0 \leq n \leq M \text{ (18.b)} \\ c_i^0 = c_0(x_i) 0 \leq i \leq N \text{ (18.c)} \end{cases} \quad (18)$$

L'équation (18.a) se réécrit:

$$c_i^{n+1} = c_i^n + \frac{k}{h^2} (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) \quad 1 \leq i \leq N-1, n = 1, 2, 3, \dots$$

On obtient alors très facilement avec un ordinateur,  $c_i^n$  l'approximation de  $c(x_i, t_n)$  pour  $1 \leq i \leq N-1, n = 1, 2, 3, \dots$ . Notons toutefois qu'en l'absence de conditions sur les paramètres du schéma, ces calculs peuvent ne pas être corrects. En effet, une analyse (non triviale) de ce schéma montre qu'il est *convergent* (i.e.  $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \max_{i,j} |c(x_i, t_n) - c_i^n| = 0$ ) sous la condition:

$$0 \leq \frac{k}{h^2} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (19)$$

Cette condition (19) nous enseigne que ce schéma est, d'un point de vue pratique, d'une utilisation relativement limitée.

**Cas de la convection pure 1D** Construisons selon le même principe, un schéma aux différences finies pour calculer une approximation de la solution de (9)(10)(12). (Nous prenons la vitesse  $u$  constante et strictement positive). Pour approcher le terme  $\frac{\partial c}{\partial t}(x, t)$ , nous utilisons la relation (17). Pour approcher le terme  $\frac{\partial c}{\partial x}(x, t)$ , nous pouvons écrire:

$$c(x_{i+1}, t_n) = c(x_i, t_n) + h \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \dots$$

ce qui donne:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_i, t_n)}{h} + O(h)$$

Notons que nous avons également:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{h} + O(h) \quad (20)$$

ou encore:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{2h} + O(h^2) \quad (21)$$

Cette dernière relation paraît être la plus avantageuse. En effet, le terme restant est un  $O(h^2)$ ; il converge donc plus vite vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0 qu'un  $O(h)$ . La formule aux différences finies qui en découle:

$$\frac{c(x_{i+1}, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{2h} \approx \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n)$$

est alors plus précise que les deux autres.

En utilisant les relations (17) et (21) nous construisons le schéma numérique suivant pour approcher le problème (9)(10)(12):

$$\begin{cases} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{k} + u \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2h} = 0 \\ \text{pour } 1 \leq i \leq N-1, n=1,2,3.. \\ c_0^n = 0, n \geq 0 \\ c_i^0 = c_0(x_i), 0 \leq i \leq N \end{cases}$$

Malheureusement, ce schéma ne fonctionne jamais! En effet, la solution numérique  $c_i^n$  calculée à l'aide de ce schéma explose immédiatement au cours du temps. Ce schéma n'est pas convergent. Alors, comment construire une schéma aux différences finies qui approche bien le problème (9)(10)(12)?

Si nous nous rappelons du comportement de la solution de (9)(10)(12) (cf Fig. 1), nous pouvons penser qu'une bonne formule aux différences finies pour approcher le terme  $\frac{\partial c}{\partial x}(x, t)$  ne découle pas de (21) mais plutôt de (20). Nous obtenons dans ce cas, la formule aux différences finies *décentrée* suivante:

$$\frac{c(x_i, t_n) - c(x_{i-1}, t_n)}{h} \approx \frac{\partial c}{\partial x}(x_i, t_n)$$

Le décentrage de cette formule est tel que l'on « remonte » le champ de vitesse pour aller « chercher l'information » (cf Fig. 1 et 2). Avec un tel

choix de décentrage, nous obtenons le schéma numérique suivant:

$$\begin{cases} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{k} + u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} = 0 \\ \text{pour } 1 \leq i \leq N-1, n=1,2,3,\dots \\ c_0^n = 0, n \geq 0 \\ c_i^0 = c_0(x_i), 0 \leq i \leq N \end{cases} \quad (22)$$

Une analyse de ce nouveau schéma nous montre qu'il est convergent sous la condition suivante:

$$0 \leq \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Par ailleurs, ce schéma présente l'inconvénient (mineur) suivant: il introduit de la *diffusion artificielle*. En effet, nous avons:

$$u \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{h} = u \left( \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2h} - \frac{h}{2} \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

Le schéma (22) est alors équivalent au schéma centré pour l'équation de *convection-diffusion* avec comme coefficient de diffusivité:  $\frac{h}{2}u$ .

La diffusion artificielle s'observe très facilement lors des tests numériques. En effet, si la condition initiale est un « pic de pollution », la solution n'est pas transportée sans amortissement (comme elle devrait l'être) mais elle est transportée tout en étant légèrement « diffusée », ce qui a pour effet de « tasser » artificiellement le pic. (Nous pourrions observer ce phénomène lors des résultats de simulation 2d qui suivent).

**Extension au cas de la convection diffusion 2D** On peut construire selon le même principe un schéma aux différences finies pour le modèle initial (1)-(3) dans le cas bidimensionnel. Nous considérons la situation suivante:  $d = 2, \Omega = ]0,1[ \times ]0,1[; \vec{u} = (u_1, u_2)^T$ ,  $u_1$  constante positive et  $u_2(x,y) \leq 0, \forall (x,y) \in \Omega$ . Alors, avec des notations évidentes, nous obtenons le schéma

numérique suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\Delta t} - \sigma \left[ \frac{c_{i+1,j}^n - 2c_{i,j}^n + c_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{c_{i,j+1}^n - 2c_{i,j}^n + c_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \\ + u_1 \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{\Delta x} + u_2(x_i, y_j) \frac{c_{i,j+1}^n - c_{i,j}^n}{\Delta y} = 0 \\ \text{pour } i=1, \dots, N-1, j=1, \dots, L-1, n=0, 1, 2, \dots \\ c_{0,j}^n = c_{N,j}^n = c_{i,0}^n = c_{i,L}^n = 0, \quad i=0, \dots, N, j=0 \dots L, n=0, 1, 2, \dots \\ c_{i,j}^0 = c_0(x_i, y_j) \quad i=1, \dots, N-1, j=1 \dots L-1 \end{array} \right. \quad (23)$$

Nous pouvons montrer que ce schéma est convergent sous une condition analogue mais plus complexe que (19).

## Résultats de simulation

Nous considérons le schéma numérique (23) avec les données (académiques) suivantes:  $\Omega = ]0, L[ \times ]0, L[, L = 1000m, \sigma = 100$  (ou  $\sigma = 0$  si convection pure),  $u_1 = 10m/s, u_2 = -20((\frac{x}{L})^2 + (\frac{y}{L})^2)m/s,$

$$c_0(x,y) = \begin{cases} 100 & \text{si } r \leq \frac{2R}{3} \\ 50(1 + \cos(\frac{\pi}{R}(3r - 2R))) & \text{si } \frac{2R}{3} \leq r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

avec  $R = 200, r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, x_0 = 300$  et  $y_0 = 700$  (les concentrations s'expriment en  $mg/m^3$ ). Les résultats obtenus sont indiqués sur les figures ci-dessous. (Les échelles en  $x$  et  $y$  indiquées sur les figures doivent être multipliées par 10).

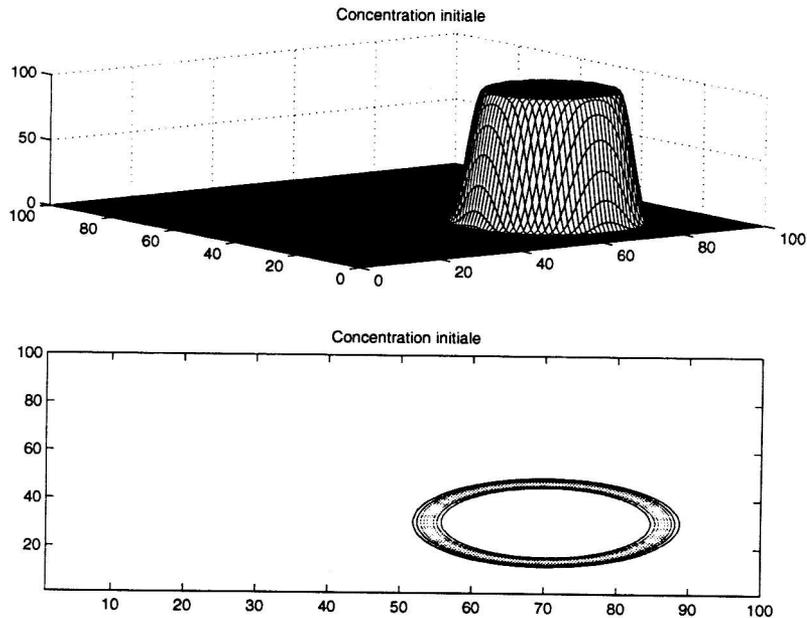


FIG. 3 - Concentration initiale.  $\max_{i,j}(c_{ij}^0) = 100$

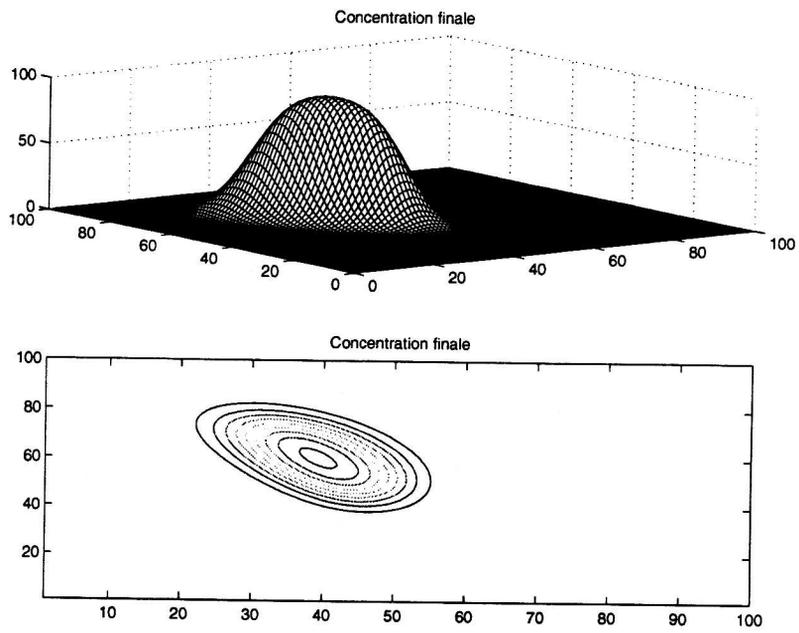


FIG. 4 - *Convection pure. Concentration à  $T = 30s$ .  $\max_{i,j}(c_{ij}^M) = 93$*

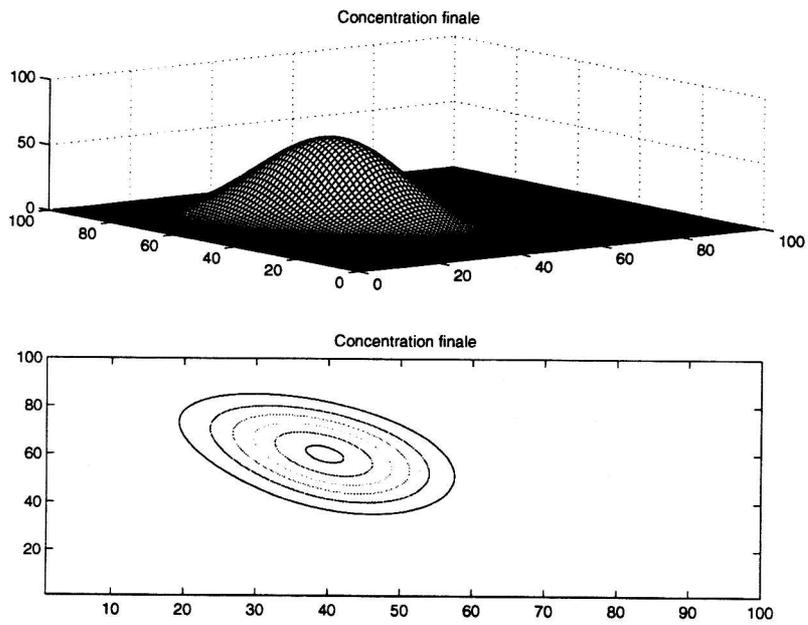


FIG. 5 - *Convection-diffusion. Concentration à  $T = 30s$ .  $\max_{i,j}(c_{ij}^M) = 62$*