Chapitre 12

Fonctions de plusieurs variables

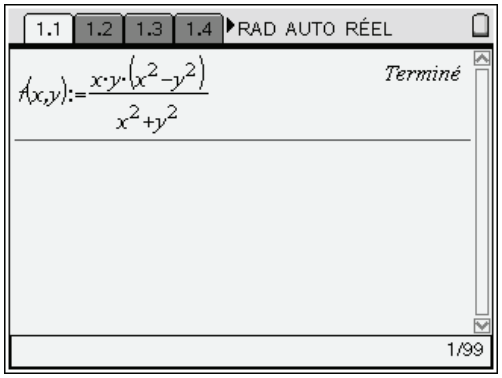
La TI-Nspire CAS permet de manipuler très simplement les fonctions de plusieurs variables. Nous allons voir dans ce chapitre comment procéder, et définir quelques fonctions particulièrement utiles.

On pourra également se reporter au **chapitre 15** pour une description de la bibliothèque de programmes **diffcalc**, téléchargeable sur le site **www.univers-ti-nspire.fr**.

1. Fonctions à valeurs réelles

1.1 *Définition*

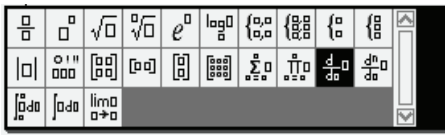
On procède comme pour une fonction d'une variable :

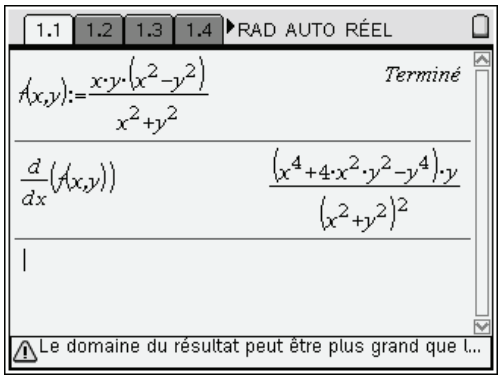


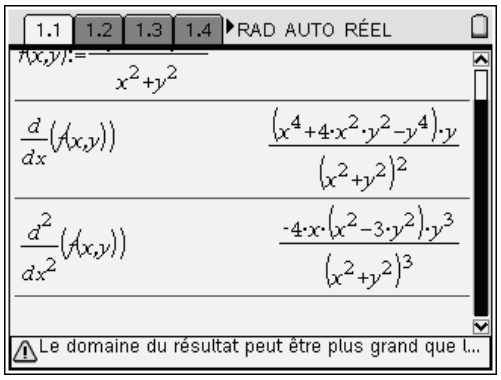
1.2 *Calcul de dérivées partielles*

On peut ensuite facilement faire des calculs de dérivées partielles.

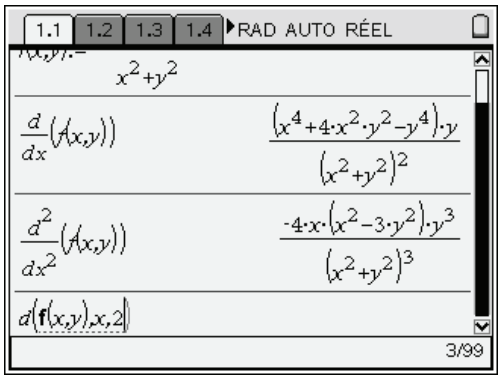
Voici par exemple le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$. Pour entrer ces expressions, on utilise les modèles disponibles sur la TI-Nspire CAS :

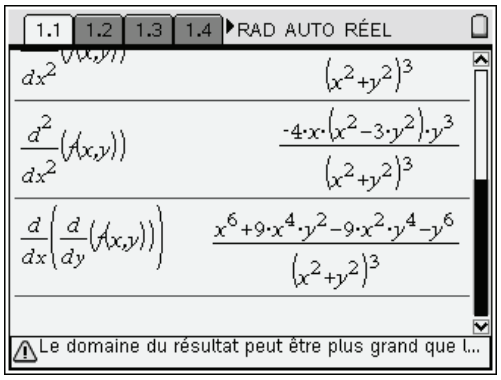






Aucun problème pour le calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on peut utiliser le second modèle en entrant l'ordre dans la case du haut. On peut également utiliser directement la fonction de dérivation ***d*** et indiquer l'ordre comme troisième argument.
Par contre, pour le dernier calcul, on doit imbriquer deux appels de la fonction de dérivation.

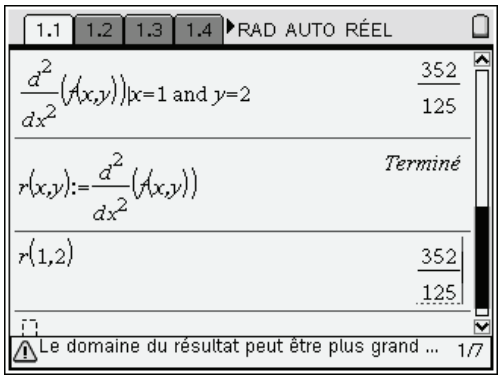




1.3 *Calcul des dérivées partielles en un point donné*

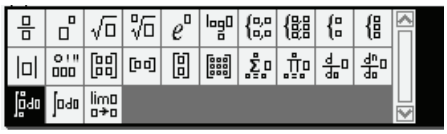
Pour calculer ce type d'expression, utilisez l'opérateur "sachant que". Une autre solution consiste à définir *r* comme une fonction de *x* et *y,* ce qui permet ensuite de calculer facilement sa valeur en un point donné :

Voici par exemple, le calcul de $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $(x,y) = (1,2)$:

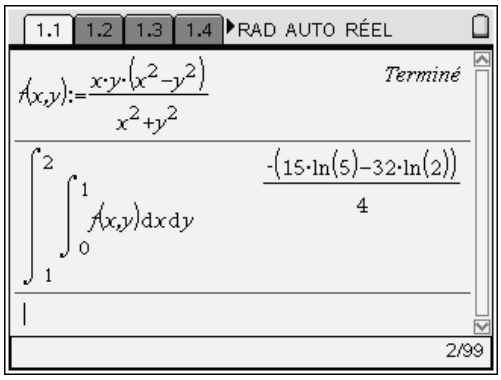


1.4 *Intégrales multiples*

Pour calculer une intégrale multiple, il est nécessaire d'imbriquer le calcul d'intégrales simples. On peut là aussi utiliser directement la fonction d'intégration obtenue dans le catalogue, ou utiliser le modèle ou le menu **Analyse**.



Voici par exemple le calcul de $\iint_{[0,1]\times[1,2]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$:



1.5 *Gradient, tangente, plan tangent*

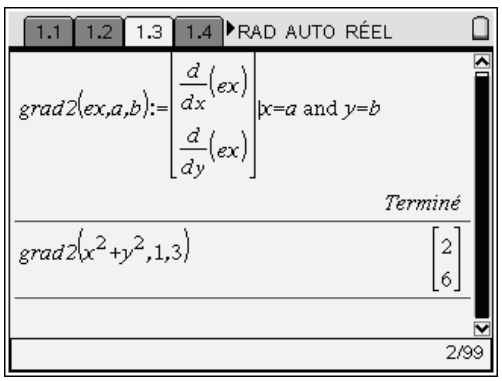
Ces calculs ne posent aucun problème.

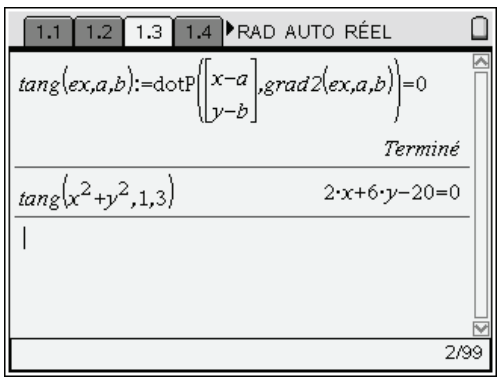
Si vous utilisez souvent ces notions vous pourrez facilement définir les fonctions nécessaires.

Voici par exemple les fonctions permettant de calculer le gradient d'une fonction *f* et la tangente à une courbe définie par $f(x,y)=C$ en un point (a,b).

```
grad2(ex,a,b):=[ d(ex,x); d(ex,y)]|x=a and y=b
tang(ex,a,b):=dotP([x-a;y-b],grad2(ex,a,b))=0
```

☞ **dotP** *est la fonction permettant de calculer un produit scalaire.*



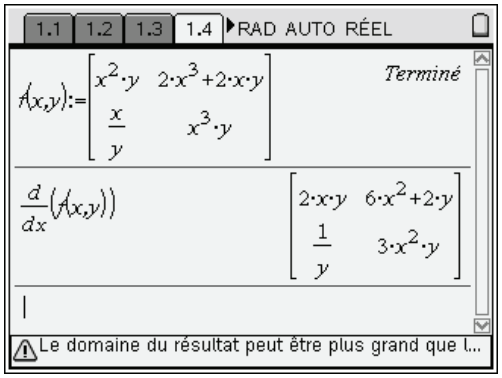


La généralisation à la dimension 3 (gradient et plan tangent) est immédiate :

```
grad3(ex,a,b,c):=[ d(ex,x); d(ex,y);d(ex,z)]|x=a and y=b and z=c
ptan(ex,a,b,c):=dotP([x-a;y-b;z-c],grad3(ex,a,b,c))=0
```

2. Fonctions à valeurs vectorielles

Les calculs sur les fonctions vectorielles se font aussi simplement que ceux sur les fonctions à valeurs réelles. En effet la TI-Nspire CAS est parfaitement capable de dériver en une seule opération un vecteur ou même une matrice.



Exercices

1 Jacobien en sphérique

Calculer le jacobien de la fonction $(r,\theta,\phi)\mapsto(r\cos\phi\cos\theta, r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi)$.

2 Extrema d'une fonction

On considère la fonction $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$.
Étudier ses extrema.

3 Développement limité d'une fonction implicite

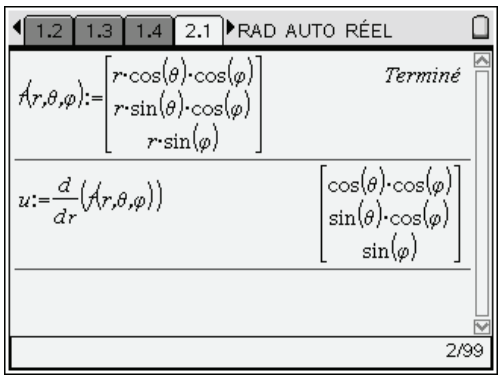
On considère l'équation $\arctan(xy)+1=e^{x+y}$. On demande de montrer qu'il existe deux intervalles ouverts U et V contenant 0 et une fonction f de classe C^∞ définie de U dans V tels que $\forall(x,y)\in U\times V \ \arctan(xy)+1=e^{x+y}\Leftrightarrow y=f(x)$. On demande ensuite de déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction *f*.

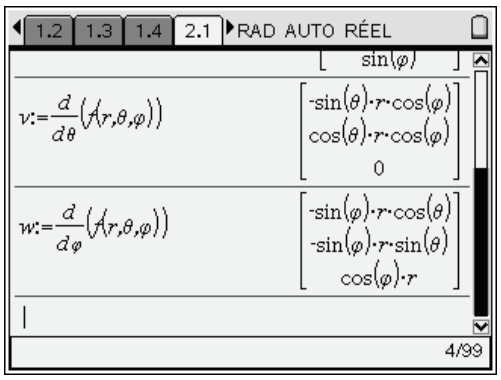
4 Calcul d'une intégrale double après passage en polaire

Calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$ avec $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\le x^2+y^2\le 1\right\}$.

Solutions des exercices

1 Jacobien en sphérique

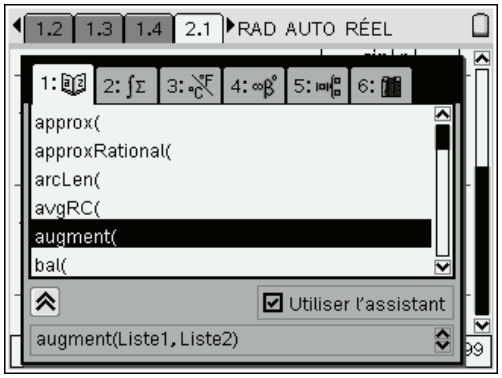


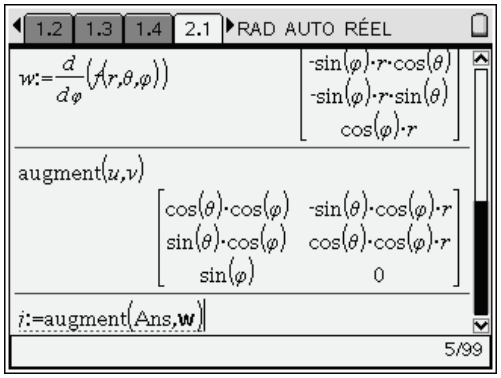


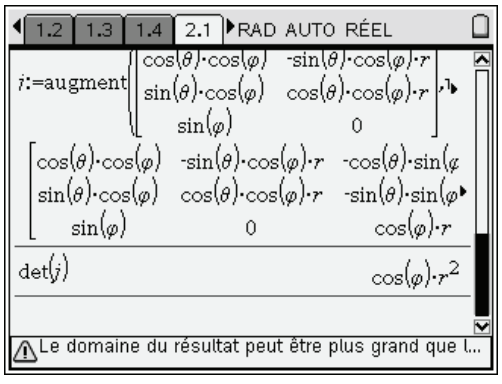
☞ *On prendra soin de créer une nouvelle activité ce qui permet entre autres d'effacer la définition de* r*, en tant que fonction, faite dans le paragraphe* 1.3.

Il nous reste maintenant à regrouper les vecteurs *u*, *v* et *w* pour former la matrice jacobienne, cela peut se faire avec la fonction **augment**.

Il suffit ensuite de calculer le déterminant de cette matrice pour obtenir le jacobien.

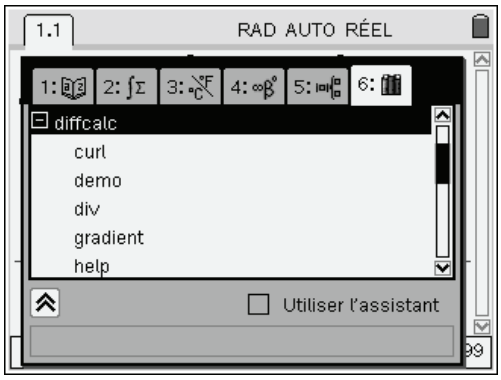


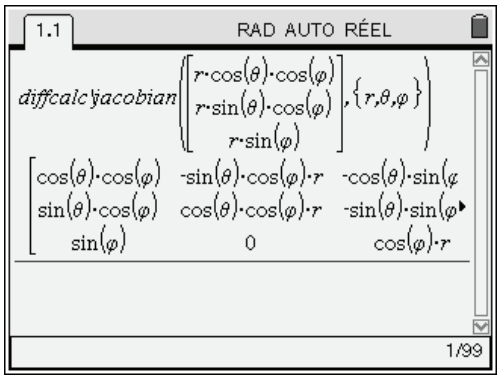




Vous trouverez une fonction permettant de calculer la matrice jacobienne, ainsi que d'autres fonctions utiles dans la bibliothèque **diffcalc**, téléchargeable sur **www.univers-ti-nspire.fr**.

Voici comment utiliser cette fonction :

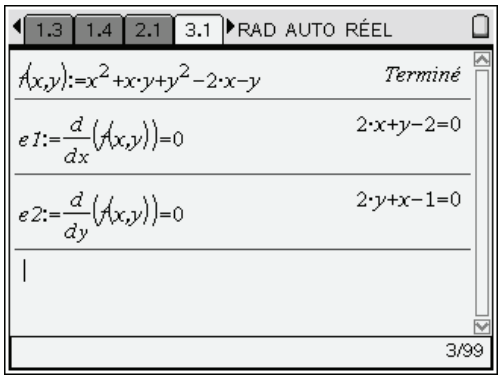


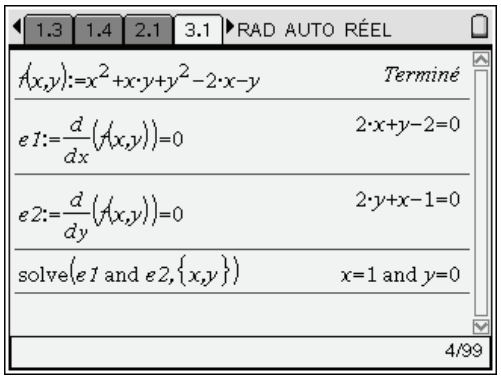


☞ *Voir le* **chapitre 15** *pour plus d'information sur l'utilisation des bibliothèques.*

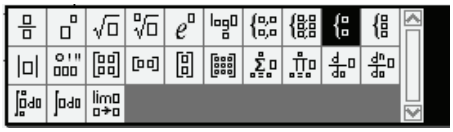
2 Extrema d'une fonction

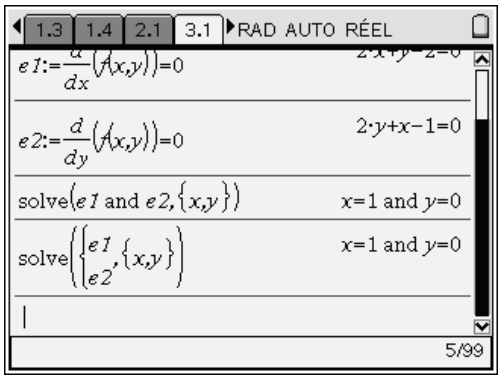
Nous devons chercher si des points vérifient les deux conditions $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$.



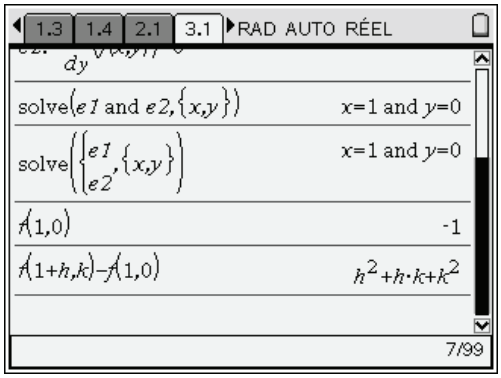


Pour résoudre le système d'équations, on peut utiliser la syntaxe ci-dessus ou le modèle $\{\square$:





Il reste à voir si ce point est effectivement un extremum :



L'expression $h^2 + hk + k^2$ est toujours strictement positive.
On peut écrire

$$h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

ou utiliser les résultats généraux sur la réduction des formes quadratiques si ceux-ci sont à votre programme.

☞ *Si l'utilisation d'une formule de Taylor à l'ordre 2 fait partie de votre programme, vous pourrez très facilement écrire une fonction calculant les coefficients de Monge :*

$p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

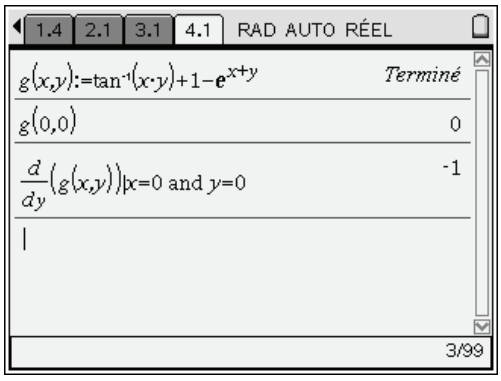
puis étudiant le type d'extremum obtenu en fonction du signe de r et de $s^2 - rt$ *au point considéré.*

On peut en déduire que la fonction admet un minimum en ce point.

3 Développement limité d'une fonction implicite

Pour commencer, on définit $g(x,y) = \arctan(xy) + 1 - e^{x+y}$.

Cette fonction est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, avec $g(0,0) = 0$. De plus, $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \neq 0$.



Le cours nous permet alors de justifier l'existence de *U*, *V* et *f*. De plus *f* est de classe C^∞ au voisinage de 0 et admet donc des développements limités à tout ordre. Pour déterminer ce développement limité, une des méthodes possibles consiste à procéder par identification.
A priori, on a un développement du type

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o\left(x^2\right).$$

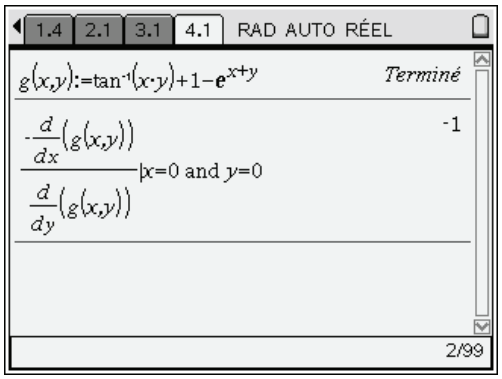
On sait déjà quelles sont les valeurs de a et b :

$$a = f(0) = 0$$

$$b = f'(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)}$$

Cette dernière valeur s'obtient facilement avec la TI-Nspire CAS :

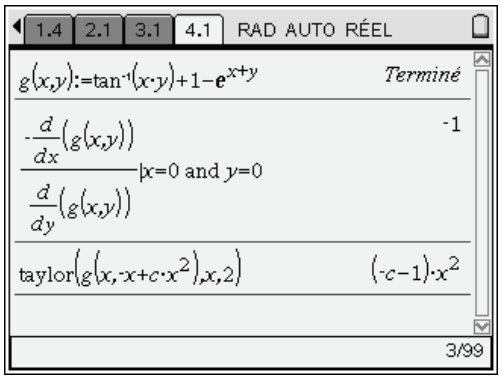
```
-d(g(x,y),x)/ d(g(x,y),y)|x=0 and y=0
```

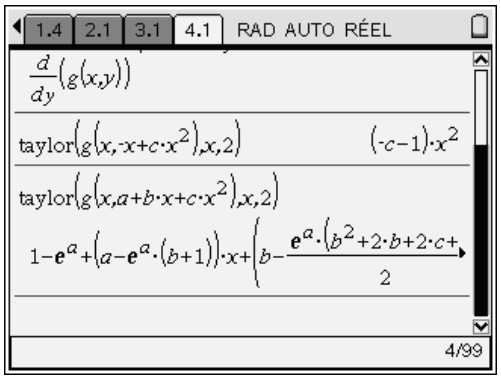


On a donc $f(x) = -x + cx^2 + o\left(x^2\right)$.

Il suffit en fait de faire un DL2 de $h(x) = g\left(x, f(x)\right)$, et d'identifier ce DL2 au DL2 de la fonction nulle pour déterminer la valeur de c.

Cela peut être fait directement sur la TI-Nspire CAS : on remplace $f(x)$ par son DL2, et on demande un DL2 du résultat. Le résultat obtenu dans l'écran de gauche montre que $-c-1$ doit être nul et donc que $c = -1$:





En fait, il serait même possible de parvenir au résultat sans utiliser les valeurs de a et b, comme le montre l'écran de droite.

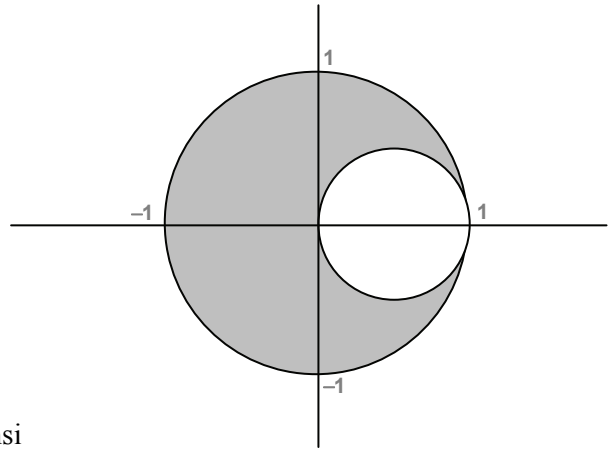
Attention cependant, la méthode utilisée mériterait quelques justifications. Vous savez bien par exemple que le DL2 d'une partie d'une expression ne permet pas toujours d'obtenir le DL2 de l'ensemble de celle-ci.

Le rôle de la calculatrice est seulement de vous permettre de vérifier votre calcul.

4 Calcul d'une intégrale double après passage en polaire

Le domaine D est délimité par les deux cercles d'équations $x^2+y^2-1=0$ et $x^2+y^2-x=0$, ou encore $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Pour calculer cette intégrale, on peut passer en coordonnées polaires. Les cercles ont pour équation $\rho=1$ et $\rho=\cos(\theta)$. Pour $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on doit avoir $\cos(\theta)\le\rho\le 1$, pour $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $0\le\rho\le 1$.



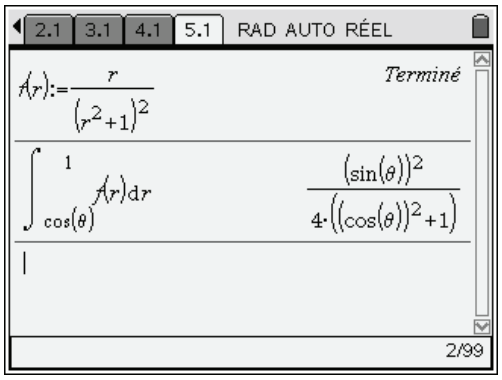
On obtient ainsi

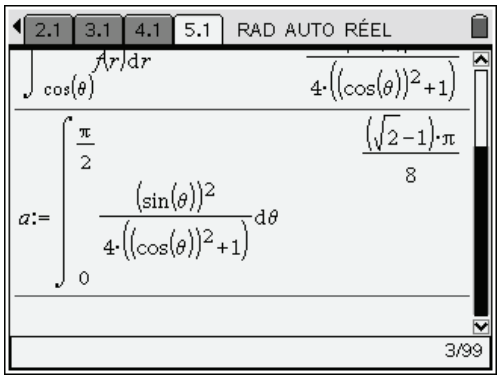
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^{1}\frac{\rho\,d\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_{0}^{1}\frac{\rho\,d\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right)d\theta$$

Ou encore, en utilisant la symétrie par rapport à Ox,

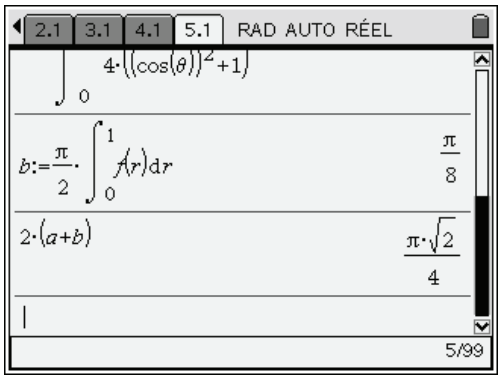
$$I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^{1}\frac{\rho\,d\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right)d\theta+2\left(\int_{0}^{1}\frac{\rho\,d\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

Il reste à faire les calculs d'intégrales nécessaires :





(*suite du calcul au verso*)



En conclusion $I=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.