

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE - AIX-MARSEILLE II



DESS DES TECHNIQUES DE L'ESPACE

MÉCANIQUE SPATIALE

Robert GUIZIOU

Mise à jour le 16 juin 2000



Technopôle de Château-Gombert

60, rue Joliot Curie - 13453 MARSEILLE CEDEX 13 - Tél : 04.91.11.38.02 - Fax : 04.91.11.38.38

SOMMAIRE

A- Les Mouvements Képeriens.....	3
<i>CHAPITRE 1- CONSTANTES PHYSIQUES SPATIALES DU SYSTEME SOLAIRE</i>	<i>5</i>
<i>CHAPITRE 2- MOUVEMENTS KEPELERIENS.....</i>	<i>9</i>
<i>CHAPITRE 3- PARAMETRAGE DU MOUVEMENT.....</i>	<i>29</i>
<i>CHAPITRE 4- PARAMETRES ORBITAUX.....</i>	<i>35</i>
<i>CHAPITRE 5- PARAMETRES D'INJECTION.....</i>	<i>43</i>
<i>CHAPITRE 6- TRGIONOMETRIE SPHERIQUE</i>	<i>51</i>
<i>CHAPITRE 7- POINTS SURVOLES.....</i>	<i>55</i>
<i>CHAPITRE 8- CHANGEMENT D'ORBITES.....</i>	<i>65</i>
<i>CHAPITRE 9- ETUDE DE L'ORBITE GEOSTATIONNAIRE.....</i>	<i>75</i>
<i>CHAPITRE 10- PROBLEME DE GIBBS.....</i>	<i>93</i>
<i>CHAPITRE 11- ECLIPSE - VISIBILITE</i>	<i>95</i>
B- Pertubations orbitales	101
<i>CHAPITRE 1- PERTURBATIONS ORBITALES.....</i>	<i>103</i>
<i>CHAPITRE 2- HELIOSYNCHRONISME.....</i>	<i>113</i>
<i>CHAPITRE 3- FREINAGE ATMOSPHERIQUE – DUREE DE VIE.....</i>	<i>123</i>
<i>CHAPITRE 4- PERTUBATION LUNI-SOLAIRE</i>	<i>129</i>
C- Voyages interplanétaires.....	134
D- Rentrée dans une atmosphère.....	161
<i>CHAPITRE 1- MANŒUVRE DE RENTREE.....</i>	<i>163</i>
<i>CHAPITRE 2-RENTREE D'ALLEN</i>	<i>175</i>
<i>CHAPITRE 3-RENTREE DE CHAPMAN.....</i>	<i>181</i>

A- LES MOUVEMENTS KÉPLERIENS

Chapitre 1–

CONSTANTES PHYSIQUES SPATIALES

DU SYSTEME SOLAIRE

Le lecteur trouvera ici les principales constantes associées aux corps du système solaire :

- Constantes physiques.
- Caractéristiques du système solaire.

1- CONSTANTES PHYSIQUES -

Notation	Valeur	Unité	Signification
G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$M^3s^{-2}kg^{-1}$	Constante de gravitation universelle
J_2	$1.08253 \cdot 10^{-8}$	sans	Coefficient du développement en série du potentiel terrestre
J_3	$-2,54 \cdot 10^{-6}$	sans	Coefficient du développement en série du potentiel terrestre
T_T	86164,1	s	Période sidérale de la Terre
R_{te}	6378,14	km	Rayon équatorial terrestre
F	$3.352836 \cdot 10^{-3}$	sans	Aplatissement de l'ellipsoïde terrestre
G_e	9.78033	ms^{-2}	Accélération de la pesanteur au niveau de l'équateur
μ_T	$39.860064 \cdot 10^{13}$	m^3s^{-2}	Constante de gravitation terrestre
$\omega_{S/T}$	$1.99099299 \cdot 10^{-7}$	$rd.s^{-1}$	Vitesse angulaire moyenne du soleil par rapport à la Terre
ω_T	$7,292115 \cdot 10^{-5}$	$rd.s^{-1}$	Vitesse angulaire moyenne de la Terre autour de son axe
1 UA	$149,59787 \cdot 10^6$	km	Unité astronomique = distance moyenne Terre-Soleil
μ_S	$13,371244 \cdot 10^{19}$	m^3s^{-2}	Constante de gravitation solaire
μ_L	$4,9027989 \cdot 10^{12}$	m^3s^{-2}	Constante de gravitation lunaire
ε	23° 27'		Inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique

2- CARACTERISTIQUES DES PLANETES -

Vous ne trouverez pas ici le détail exhaustif des propriétés des planètes, mais seulement les caractéristiques essentielles, nécessaires à ce cours. Les ouvrages spécialisés vous renseigneront pour tout le reste.

2-1- Positionnement en distance à partir du soleil -

Mercure - Vénus - **Terre** - Mars - Jupiter - Saturne - Uranus - Neptune – Pluton.

2-2- Caractéristiques orbitales -

d : distance moyenne au soleil en 10^6 km

e : excentricité de l'orbite

i : inclinaison de l'orbite sur l'écliptique en degrés

$\mu = GM$: constante de gravitation de la planète, en km^3s^{-2}

T : période orbitale en jours (j) ou années (a)

Nom	d	e	i	μ	T
Mercure	57,9	0,206	7°	$2,192 \cdot 10^4$	88 j
Vénus	108,2	0,007	3°,4	$32,486 \cdot 10^4$	224,7 j
Terre	149,6	0,167	0°	$39,86 \cdot 10^4$	365,26 j
Mars	227,9	0,093	1°,9	$4,305 \cdot 10^4$	687 j
Jupiter	778,3	0,048	1°,3	$1,267 \cdot 10^8$	11,86 a
Saturne	1427	0,056	2°,5	$3,795 \cdot 10^7$	29,46 a
Uranus	2869,6	0,047	0°,8	$5,82 \cdot 10^6$	84,01 a
Neptune	4496,6	0,009	1°,8	$6,85 \cdot 10^6$	164,8 a
Pluton	5900	0,25	17°,2	?	247,7 a

2-3- Rayons des planètes et environnement -

Nom	Rayon (km)	Atmosphère
Mercure	2440	sans
Vénus	6052	Gaz carbonique
Terre	6378	Azote + Oxygène
Mars	3393	Gaz carbonique
Jupiter	71400	Hydrogène + Hélium
Saturne	60000	Hydrogène + Hélium
Uranus	25900	Hydrogène + Hélium
Neptune	24750	Hydrogène + Hélium
Pluton	3000	sans

3- JOUR SOLAIRE MOYEN -

Notre vie sur Terre est rythmée par le mouvement apparent du soleil.

Le jour solaire moyen de 24 h = 86400 secondes, est le temps moyen, au cours de l'année qui sépare deux passages consécutifs du soleil dans un même méridien donné.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{TE} - \omega_{S/T}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{86164,1} - \frac{2\pi}{365,25 * 86400}} = 86400 \text{ s}$$

On peut aussi dire qu'en une année de 365.25 jours solaires moyens, la Terre fait un tour de plus sur elle-même que la ligne vernale γ , c'est à dire une année sidérale de 366.25 jours sidéraux, donc nous avons aussi :

$$1 \text{ jour solaire moyen} = \frac{366,25 * 86164,1}{365,25} = 86400 \text{ s}$$

Chapitre 2 –

MOUVEMENTS KEPLERIENS

1- HISTORIQUE -

Pour fixer les idées de l'étude du mouvement des corps célestes, quelques dates sont nécessaires :

- 1602 : KEPLER observe que les rayons vecteurs des planètes balaient des aires égales en des temps égaux. C'est la fameuse LOI DES AIRES.
- 1605 : Toujours par l'observation, KEPLER identifie les orbites des planètes à des ellipses de foyer le Soleil. Plus tard, NEWTON qui retrouvera par le calcul différentiel ces trajectoires coniques, en déduira la loi de la gravitation.
- 1618 : de nouvelles mesures permettent d'établir la loi des périodes, à savoir :

$$\frac{T^2}{a^3} = Cste$$

- 1667 : NEWTON maintenant muni de la théorie du calcul différentiel et intégral, reprend les observations de KEPLER et énonçant la loi de la gravitation universelle, confirme toutes les lois de KEPLER et ouvre ainsi la période du déterminisme scientifique et la voie à la conquête spatiale.

2- LOI DE LA GRAVITATION -

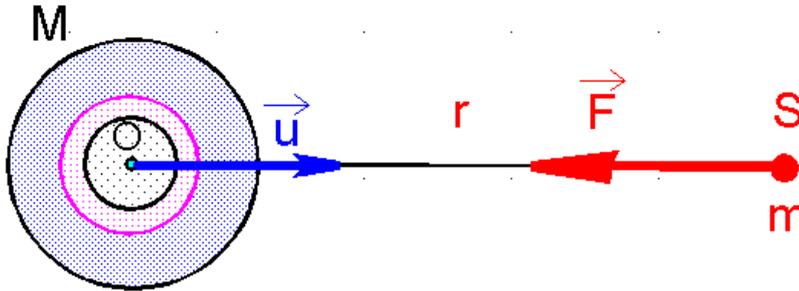
2-1- Énoncé en hypothèse newtonienne -

Sans revenir au point matériel, énonçons :

Tout corps sphérique de centre O, homogène par couches concentriques, de masse M, exerce sur un point S de masse m situé à une distance r du point O, une force attractive F, donnée par :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ constante de la gravitation universelle.



Les conditions restrictives sur la forme du corps attirant, forment l'hypothèse newtonienne. La mécanique nous apprend par ailleurs qu'une telle force ne dépendant que du rayon vecteur, dérive d'un potentiel U dit POTENTIEL NEWTONIEN :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = -\text{grad}U \quad U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{r}$$

2-2- Valeurs numériques du système solaire -

Les masses des corps principaux attirants, sont énormes, par exemple la Terre $M_T = 5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, le soleil dont la masse est environ 300000 fois celle de la Terre, etc ...

On voit donc que le produit GM fait intervenir la constante G très petite et la masse très grande d'un astre, les astrophysiciens ont donc décidé de ne faire intervenir qu'une seule constante caractéristique de la gravitation créée par l'astre le produit GM , appelé CONSTANCE DE GRAVITATION DE L'ASTRE notée $\mu = GM$.

Par exemple pour la Terre et le soleil on a :

$$\begin{aligned} \mu_T &= 39.86 \cdot 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} = 39.86 \cdot 10^4 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2} \\ \mu_S &= 13.27 \cdot 10^{19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} = 13.27 \cdot 10^{10} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

Donnons ci-dessous les caractéristiques principales des corps du système solaire, constante m , demi-grand axe a de l'orbite elliptique, excentricité e , inclinaison i du plan orbital sur l'écliptique

NB : L'écliptique est le plan de l'orbite de la Terre. RAYON TERRESTRE = 6378 km à l'équateur.

Astre	m en $\text{km}^3 \text{s}^{-2}$	a en 10^6 km	e	I
Soleil	13.27 1010			
Mercure	2.232 104	57.9	0.22056	7°.004
Vénus	3.257105	108.1	0.0068	3°.394
Terre	39.86 104	149.6	0.0167	0°
Mars	4.305 104	227.8	0.0934	1°.85
Jupiter	126.8 106	778	0.0482	1°.306
Saturne	37.95 106	1426	0.0539	2°489
Uranus	5.820 106	2868	0.0514	0°773
Neptune	6.896 106	4494	0.0050	1°.773
Pluton	3.587 103	5896	0.25583	17°.136
Lune	4.903 103	384000 Km/ Terre		5°.1/équateur

3- MISE EN PLACE DU CADRE DE L'ETUDE -

Nous allons subir trois contraintes, dans l'étude du mouvement d'un satellite ou d'une sonde spatiale :

- Travailler en repère inertiel.
- Utiliser le potentiel newtonien U.
- Ne conserver que 2 corps en interaction, car il a été prouvé par le mathématicien Poincaré que le problème des 3 corps n'avait pas de solution exprimable par des fonctions élémentaires.

L'ensemble de ces conditions constitue le cas newtonien simplifié.

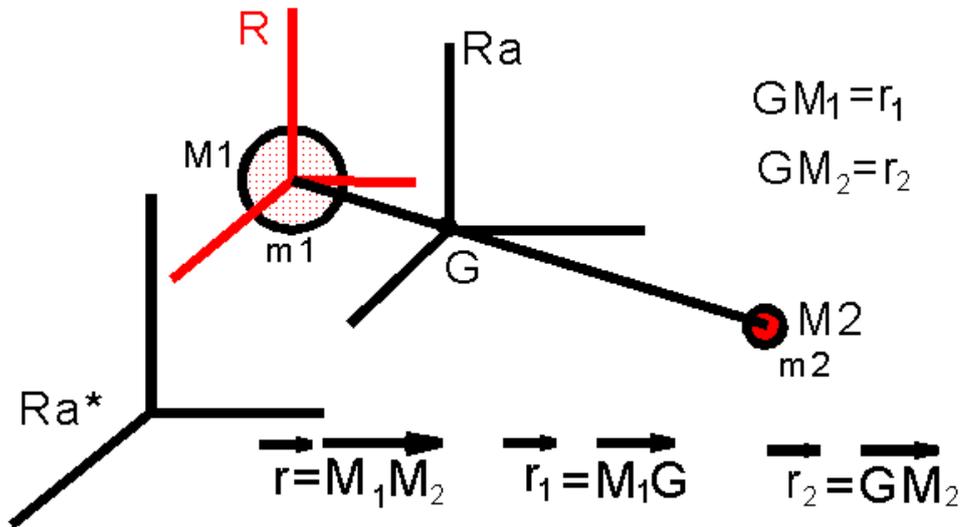
3-1- Problème des deux corps en interaction de gravitation -

M_1 ET M_2 sont les deux corps de masses m_1 et m_2 , de centre d'inertie G.

La mécanique classique nous indique que pour un système isolé, le centre d'inertie G a un mouvement rectiligne uniforme. Le principe de relativité de Galilée permet de choisir G comme origine d'un repère inertiel Ra. Bien sûr, en pratique ce n'est pas très commode

parce que l'étude du mouvement est en général rapportée à un repère R relatif, non inertiel, d'origine l'un des corps. C'est ce problème que nous abordons.

a- Repères -



b- Equations du mouvement -

La loi fondamentale appliquée dans Ra donne les relations suivantes

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

La géométrie du centre d'inertie fournit :

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

c-. Transformation du problème -

Si on imagine que M1 est la planète intéressante pour suivre le mouvement du satellite, alors il faut former une équation vérifiée par le rayon vecteur. Le lecteur fera les calculs simples qui conduisent à :

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} \quad \text{où} \quad \vec{F} = -GM = \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Ce résultat montre que le repère relatif R, d'origine M_1 , peut être considéré comme galiléen, à condition de remplacer la masse m_2 du corps attiré M_2 par la MASSE REDUITE M ci-dessous :

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

d- Cas particulier -

En général, sauf pour les astronomes s'occupant des corps célestes de masses non négligeables, nous nous intéressons au mouvement d'un satellite de masse m infiniment petite devant la masse M du corps principal. Dans ces conditions la masse réduite est égale à la masse inertielle m . Ce sera notre cas dans tout le cours.

3-2- Notion de sphère d'influence d'une planète -

Le problème des 3 corps est présent dans toute mission, même en excluant, ce qui est légitime, les actions des planètes lointaines.

En effet, prenons une mission telle que Galiléo, lancée pour étudier l'environnement de Jupiter.

La sonde passe par trois phases bien distinctes :

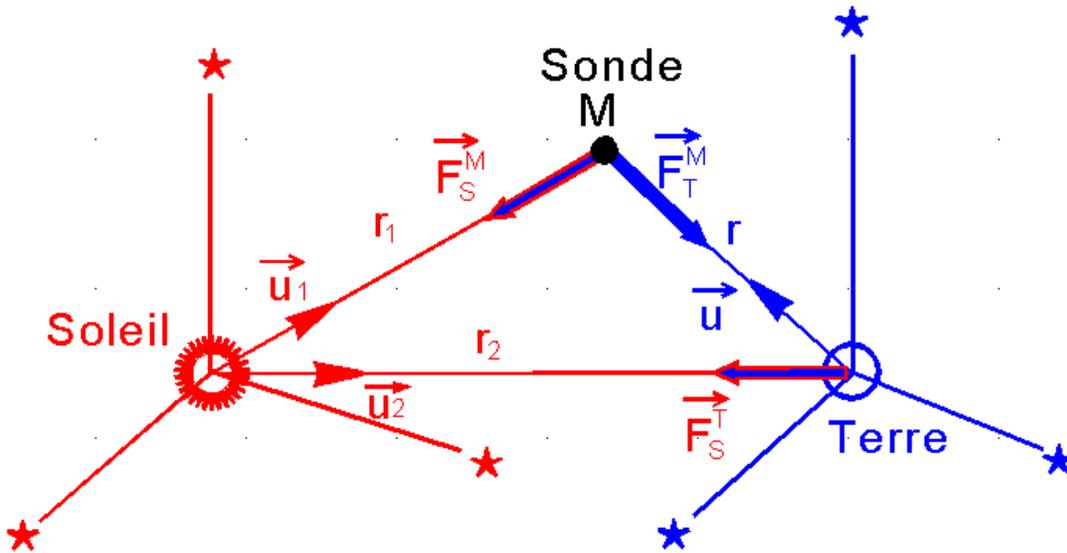
- Le départ sous l'action de la Terre, du soleil. On pressent bien que l'attraction terrestre est prédominante.
- La phase héliocentrique où probablement les actions des planètes devraient pouvoir être négligées.
- L'arrivée dans les parages de Jupiter, où certainement l'attraction de Jupiter finira par devenir prépondérante.

QUESTION : A quelle distance de la planète pourra-t-on estimer que l'on peut négliger son attraction devant celle du soleil ? Et peut-on près de la planète "oublier" la perturbation solaire ?

EQUATIONS DU MOUVEMENT RAPPORTEES A CHAQUE REPERE :

μ_S et μ_P désignent les constantes de gravitation du soleil et de la planète. Sur la figure, on lit r_1 , r_2 , r les rayons vecteurs, u_1 , u_2 , v , les unitaires des rayons vecteurs de repérage.

Nous considérons un repère héliocentrique, à directions stellaires, comme un excellent repère inertiel ou galiléen, noté R_a . R désignera un repère "équipollent" à R_a mais, relatif, d'origine une planète P (pour exemple le Terre). M est le satellite ou la sonde de masse m , en mouvement sous l'action du soleil et de la planète.



La loi fondamentale appliquée à la sonde M dans R_a donne :

$$m\vec{\Gamma}_a(M) = \vec{F}_S^M + \vec{F}_T^M \Rightarrow \ddot{r}_1 = -\frac{\mu_S}{r_1^2} \vec{u}_1 + \left[-\frac{\mu_P}{r^2} \right]_T$$

Le premier terme sera considéré comme attraction principale du corps central, origine du repère, le second comme perturbation due à la planète. Appliquée à la Terre, et en négligeant l'attraction sonde sur Terre, devant celle du soleil, il vient :

$$m\vec{\Gamma}_a(T) = \vec{F}_S^M \Rightarrow \vec{\Gamma}_a(T) = -\frac{\mu_S}{r_2^2} \vec{u}_2 = -\vec{\Gamma}_e(M)$$

où Γ_e désigne, en terme de composition des mouvements, l'accélération d'entraînement du point M du repère R , par rapport à R_a . On notera que l'accélération de CORIOLIS est nulle.

En repère relatif, on a :

$$m\vec{\Gamma}_R(M) = \vec{F}_S^M + \vec{F}_T - m\vec{\Gamma}_e \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu_p}{r^2}\vec{u} + \left[-\frac{\mu_s}{r_2^2}\vec{u}_2 - \frac{\mu_s}{r_1^2}\vec{u}_1 \right]_S$$

Comme plus haut, nous faisons apparaître l'attraction principale due à la planète et un terme entre crochets qui représente la contribution du soleil, considérée comme une perturbation.

INTRODUCTION DE LA NOTION DE SPHERE D'INFLUENCE :

Le but poursuivi est de négliger le terme perturbateur devant l'attraction principale, mais alors quel est le repère dans lequel l'approximation est la meilleure? La réponse est apportée par la comparaison des deux rapports suivants :

$$\varepsilon_s = \frac{\left[-\frac{\mu_p}{r^2}\vec{u} \right]_T}{\left| -\frac{\mu_s}{r_1^2}\vec{u}_1 \right|} \quad \varepsilon_p = \frac{\left[\frac{\mu_s}{r_2^2}\vec{u}_2 - \frac{\mu_s}{r_1^2}\vec{u}_1 \right]_S}{\left| -\frac{\mu_p}{r^2}\vec{u} \right|}$$

CONCLUSION :

L'égalité entre les deux rapports définit une surface entourant la planète, très voisine d'une sphère, appelée sphère d'influence de la planète.

$\varepsilon_s = \varepsilon_p$	Relation de définition de la sphère d'influence
$\varepsilon_s < \varepsilon_p$	Il vaut mieux travailler en repère héliocentrique, c'est le cas de la partie héliocentrique d'un voyage interplanétaire. Hors sphère d'influence, la perturbation planète est négligée, seule L'ATTRACTION SOLAIRE agit.
$\varepsilon_s > \varepsilon_p$	Il vaut mieux travailler en repère planétocentrique, c'est le cas de la phase de départ d'un voyage interplanétaire ou des mouvements des satellites artificiels au voisinage de la planète. Dans la sphère d'influence, la perturbation solaire est négligée, seule L'ATTRACTION PLANETE agit.

Naturellement, les affirmations ci-dessus n'ont de sens que si:

- La sphère d'influence a un rayon supérieur à celui de la planète. voir calcul du rayon en exercice. Le calcul donne pour la Terre $R_{\text{sphère}} = 924000 \text{ km}$

- L'approximation n'est pas grossière. Voir calcul de l'erreur commise pour un géostationnaire ce la Terre. Le calcul donne une erreur relative de $1.5 \cdot 10^{-5}$

Donnons une relation classique du rayon moyen de la sphère d'influence

$$R_{\text{Sphère d'influence}} = D \left(\frac{\mu_p}{\mu_s} \right)^{\frac{2}{5}}$$

D = distance (soleil – planète)

3-4- Points de LAGRANGE -

Présentons ici, sans développement théorique et seulement à titre d'information, la notion de sphère de point de Lagrange. Vous trouverez la théorie détaillée dans tous les ouvrages de mécanique spatiale avancée.

Il faut disposer d'un système isolé de 3 corps, par exemple le Soleil O en corps principal, la Terre P comme astre secondaire sur orbite circulaire et une sonde spatiale M.

Dans le bilan des masses, la sonde n'apparaît pas et pour un système isolé, le centre d'inertie G de ce système est donc en mouvement rectiligne uniforme dans un repère galiléen. G peut donc être considéré comme fixe et origine lui-même d'un autre repère galiléen $R_a : G X_a Y_a Z_a$ (non explicité sur la figure).

Dans R_a , la loi fondamentale s'applique en toute rigueur, mais elle n'est pas intéressante. Par contre, on peut introduire un repère relatif $R GXYZ$, tournant avec la ligne OP à une vitesse angulaire constante, ce qui est le cas pour la Terre avec une excellente approximation.

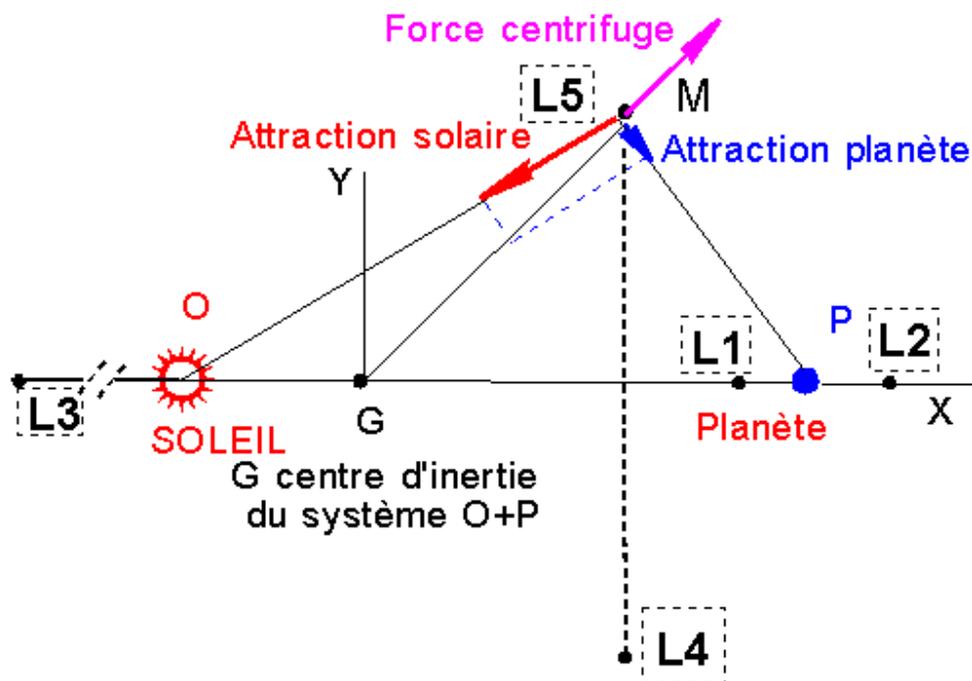
Nous savons que R peut être accepté comme repère absolu si on ajoute aux forces physiques classiques de gravitation les "forces dites d'inertie" de Coriolis et d'entraînement cette dernière appelée "force centrifuge".

Proposons-nous de déterminer des points d'équilibre de M dans le champ des forces de gravitation et d'inerties. Il est clair alors que la force d'inertie de Coriolis disparaît à l'équilibre, puisque la vitesse relative à R est nulle (équilibre dans R). Le lecteur se convaincra aisément qu'un tel équilibre est possible dans le plan GXY pour 5 positions distinctes L1 L2 L3 L4 L5. Ces points sont appelés POINTS DE LAGRANGE du système astre principal O et planète P.

Il est très facile de vérifier que les points L1 L2 L3 sur l'axe OP sont instables. Il est plus difficile de montrer que dans le plan GXY les points de Lagrange L4 et L5 sont stables. Ces points sont mis à profit, dans le système Terre-Soleil, pour y placer un observatoire fixe par rapport au Soleil, comme la sonde SOHO, lancée en novembre 1995.

D'ailleurs, on peut observer que naturellement, dans le système Soleil-Jupiter, des satellites dits galiléens de Jupiter qui restent en équilibre aux points de Lagrange L4 et L5.

NB : naturellement aucune force ne peut contrôler le mouvement perpendiculaire au plan GXY, ce qui demande un contrôle en permanence mais à très faible consommation d'ergols.



3-5- Repères de calcul adoptés -

a- Mouvements autour de la Terre -

A la lumière des résultats précédents :

- En négligeant les perturbations solaires (et lunaire) devant l'attraction principale terrestre, donc en travaillant dans la sphère d'influence de la Terre.
- En remarquant que pour un satellite, la masse réduite est égale à la masse inertielle.

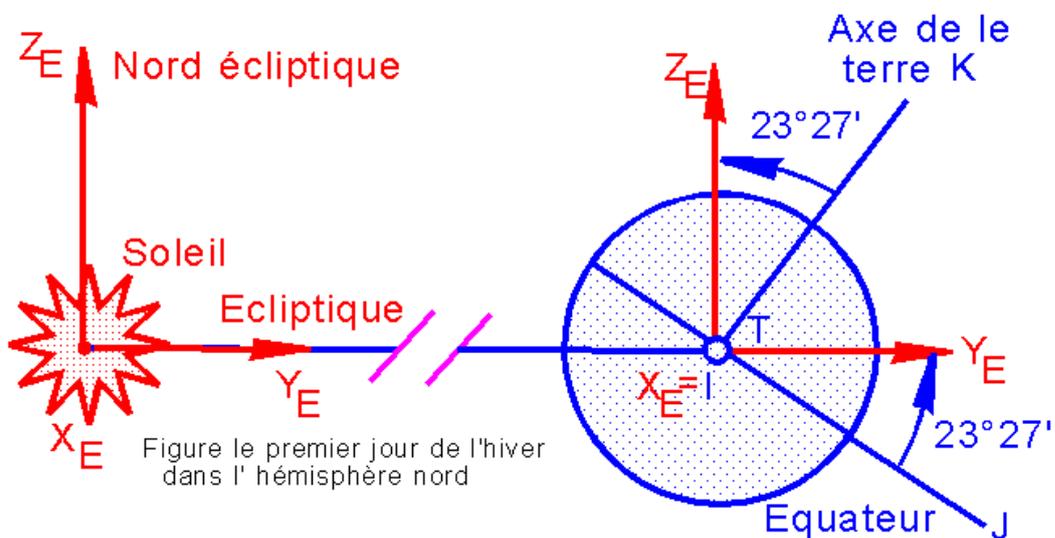
On peut choisir un repère inertiel R_a , appelé GEOCENTRIQUE EQUATORIAL, d'origine le centre Terre et de directions stellaires. Lequel ?

Conventionnellement, les spécialistes de l'espace et de l'astronomie, ont convenu de prendre un repère associé au jour 2000

SYSTEME DE COORDONNEES J_{2000} : La date de référence est le 1/1/2000 à 12 h TU, considéré comme origine 0 des jours juliens.

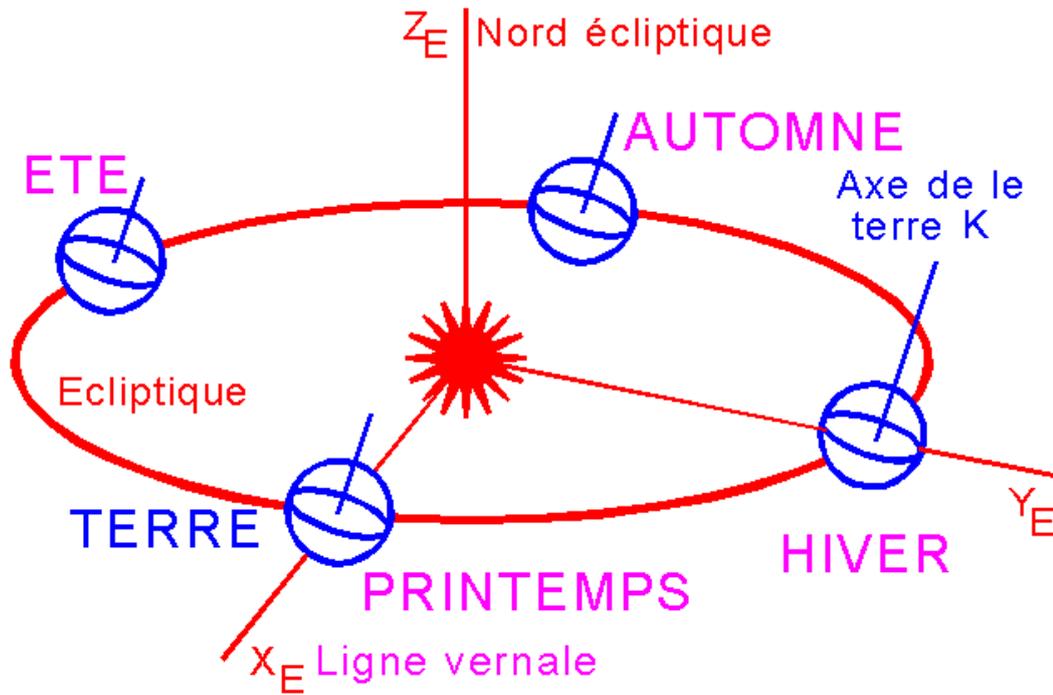
- Origine centre Terre
- Troisième axe K ou Z, l'axe de la rotation terrestre (considéré comme fixe, mais en réalité dérivant avec la précession de Hipparque à $50''$ arc/an autour du nord écliptique, dans le sens rétrograde)
- Premier axe I ou X, unitaire de la ligne vernale g_{2000} , qui est l'intersection du plan équatorial moyen de la Terre et de l'écliptique le 1/1/2000 à 12 h, cet axe pointe donc depuis le centre Terre, le soleil au premier instant du printemps de l'an 2000.

Mouvements autour du soleil :



NB : le calendrier julien est un calendrier où les dates sont comptées linéaires et décimales, avec origine le 1/1/2000 à 12 TU, par exemple le 25/12/1999 à 11h 24mn 45s = -7.0244792 JJ (Voir routine J_JULIEN.EXE)

Nous savons que l'écliptique est le plan de l'orbite terrestre, donc la ligne vernale γ ou axe I du repère géocentrique équatorial, appartient à ce plan. On peut donc définir, un autre repère inertiel, pour les mouvements héliocentriques, le REPERE HELIOCENTRIQUE ECLIPTIQUE, $X_E = I$, Y_E , Z_E , qui se déduit du précédent par une rotation autour de I d'angle $-23^\circ 27'$.



4- GRANDES LOIS DU MOUVEMENT -

Nous allons établir deux intégrales premières du mouvement, traduisant deux conservations importantes.

4-1- Conservation du moment cinétique = Loi des Aires -

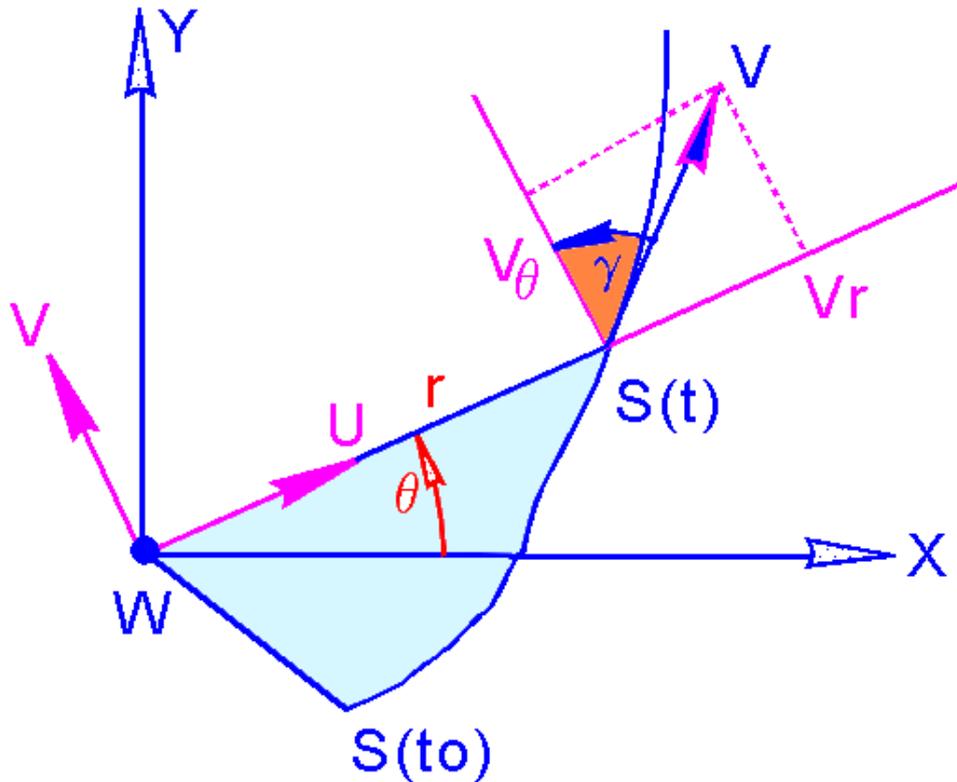
La force de gravitation newtonienne est centrale, donc de moment nul au centre O du corps principal. Il en résulte la conservation du vecteur moment cinétique, soit :

$$\vec{H} = \vec{r} \wedge m\vec{V} = m\vec{h} \Rightarrow \vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V} = \vec{r}_0 \wedge \vec{V}_0 = K\vec{W}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est l'unitaire de \vec{H} ou de \vec{h} appelé MOMENT CINETIQUE réduit. K s'appelle la CONSTANTE DES AIRES.

Conséquences : Le mouvement du satellite est plan, dans un plan fixe, passant par O et orienté par le moment cinétique réduit h . On retrouve une des lois de KEPLER.

La figure ci-dessous rassemble les éléments essentiels des coordonnées polaires, utiles à ce cours.



R , θ sont le rayon vecteur, mesuré positivement sur l'unitaire u , et l'angle polaire mesuré >0 autour d' Ω .

- u et v sont les axes associés aux coordonnées polaires. u le RADIAL, v l'orthoradial
- $S(t)$ est la position courante $S(t_0)$ la position à l'instant initial t_0 .
- V est le vecteur vitesse absolue, de composantes V_r sur le radial, V_θ sur l'orthoradial.
- γ est la pente absolue de la vitesse, comptée positive (comme sur la figure) quand le vecteur vitesse est au dessus de l'horizontale locale.

- La zone coloriée en bleu est l'aire A balayée par le rayon vecteur entre t_0 et t .

On rappelle quelques résultats :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v} = V \sin \gamma \vec{u} + V \cos \gamma \vec{v}$$

$$K = \|\vec{h}\| = \|\vec{r} \wedge \vec{V}\| = r^2 \dot{\theta} = Vr \cos \gamma = V_0 r_0 \cos \gamma_0 = 2 \frac{dA}{dt}$$

la dernière relation donne son nom à la loi des aires, puisque la dérivée de l'aire balayée est constante.

4-2- Conservation de l'énergie mécanique -

S'il est un endroit de l'univers où les lois de la mécanique sont parfaitement vérifiables, c'est bien l'espace, parce que le frottement ou les causes de dissipation y sont extrêmement faibles. Dans le champ d'une seule force dérivant d'un potentiel, le mouvement vérifie la CONSERVATION DE L'ENERGIE MECANIQUE.

On aboutit ainsi à l'équation dite de l'énergie, dans laquelle E désigne l'ENERGIE SPECIFIQUE c'est à dire par kg envoyé.

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2}mV^2 - m\frac{\mu}{r} = mE \Rightarrow E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

APPLICATION : DEUXIEME VITESSE COSMIQUE

On appelle deuxième vitesse cosmique à la distance r_0 , la vitesse minimale nécessaire pour se libérer de l'attraction de l'astre. En d'autres termes la trajectoire doit avoir une branche infinie, donc quand r tend vers l'infini, V doit rester calculable, ce qui nécessite une énergie spécifique positive $E > 0$.

Dans ces conditions la vitesse est donnée par :

Numériquement, pour la Terre à 200 km/sol, V_2 est voisine de 11 km/s :

$$V_2(r_0) = V_1(r_0) = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$$

NB : Vous réfléchirez à cette question. Pourquoi les petites planètes n'ont-elles pas d'atmosphère alors que les grosses ont pu conserver la leur ? Réponse avec vitesse de libération et agitation moléculaire, à mettre en forme.

5- OU L'ON RETROUVE QUE LES TRAJECTOIRES SONT DES CONIQUES -

5-1- Equation polaire de la trajectoire -

Plaçons nous dans le plan orbital, en coordonnées polaires (voir figure plus haut).

Nous possédons 2 intégrales premières dépendant des deux constantes essentielles E et K.

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} \quad \& \quad K = r^2\dot{\theta} \quad \& \quad V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

L'élimination de q entre les deux équations donne:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2E + \frac{2\mu}{r} - \frac{K^2}{r^2}} = \pm \sqrt{2E - \left[\frac{K}{r} - \frac{\mu}{K} \right]^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \pm \frac{\frac{K}{r^2}}{\sqrt{2E - \left[\frac{K}{r} - \frac{\mu}{K} \right]^2}} = \pm \frac{d \left[\frac{\frac{K}{r} - \frac{\mu}{K}}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{K^2}}} \right]}{\sqrt{1 - \left[\frac{\frac{K}{r} - \frac{\mu}{K}}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{K^2}}} \right]^2}}$$

Le lecteur achèvera un calcul maintenant évident qui fournit l'équation polaire de la trajectoire.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{K^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EK^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0)}$$

5-2- Conclusions -

On reconnaît l'équation d'une conique dont les éléments caractéristiques sont :

Excentricité	$e = \sqrt{1 + \frac{2EK^2}{\mu^2}}$
Paramètre	$p = \frac{K^2}{\mu}$
Angle polaire du périégée	θ_0
Rappels : $K = V_0 r_0 \cos \gamma_0$	$E = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2} V_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2a}$

Nous ne connaissons que trois types de coniques.

- La parabole correspondant à $e=1$ ou $E=0$, physiquement irréalisable, car la probabilité de réaliser un tir d'énergie nulle, est nulle.
- L'ELLIPSE, très courante, pour $e<1$ ou $E<0$. Elle correspond à un tir d'énergie faible, conduisant à une capture par la Terre, ce qui physiquement se comprend comme une insuffisance d'énergie pour "sortir" du puits de potentiel. La vitesse V_0 est inférieure à la vitesse de libération à la distance r_0 . Ces orbites elliptiques correspondent aux applications courantes terrestres.
- L'HYPERBOLE, utilisée pour les tirs interplanétaires, $e>1$ ou $E>0$. Elle correspond à un tir d'énergie forte, conduisant à une libération par rapport à la Terre, ce qui physiquement se comprend comme une énergie suffisante pour "sortir" du puits de potentiel. La vitesse V_0 est supérieure à la vitesse de libération à la distance r_0 .

ORBITE CIRCULAIRE : Elle nécessite une excentricité $e=0$, ce qui est mathématiquement possible, mais difficilement réalisable en pratique ? Cependant, on peut s'en approcher, sans problème en affinant les conditions initiales. Nous considérerons donc qu'elle est très pratiquée.

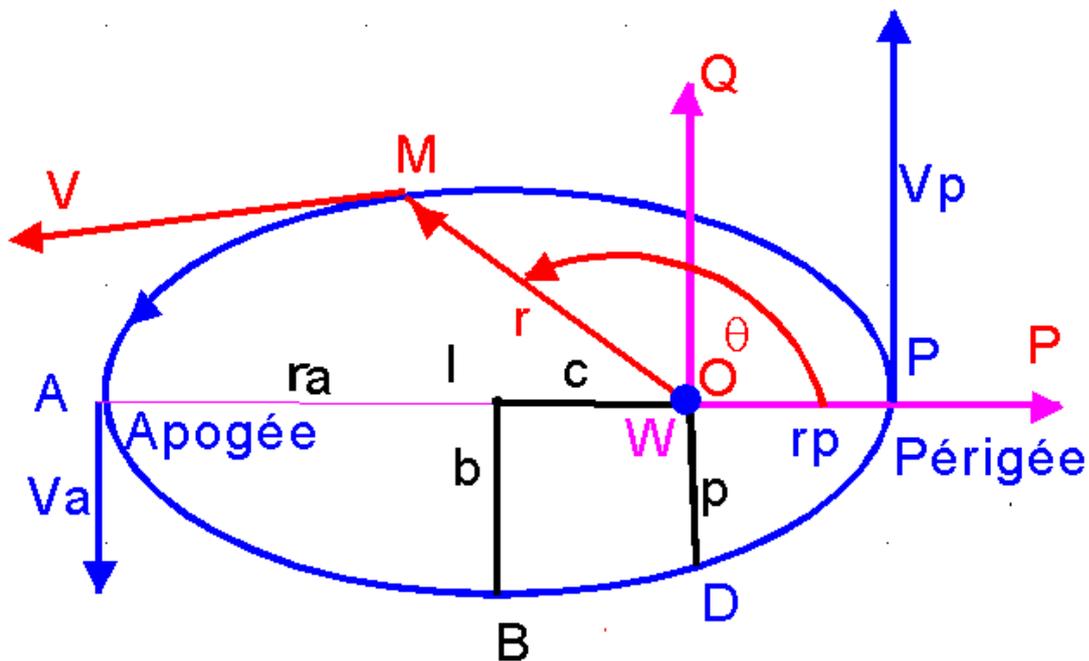
Les conditions initiales sont strictes, le lecteur le vérifiera :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad \& \quad \gamma_0 = 0$$

QUELQUES REPERES NUMERIQUES :

- Première vitesse cosmique : Conventionnellement, bien qu'elle n'ait pas de réalité physique, c'est la vitesse nécessaire pour se placer en orbite circulaire au ras du sol terrestre, elle nécessite $V_0 = 7.9$ km/s.
- Vitesse en orbite basse d'altitude $Z = 230$ km, $V_0 = 7.766$ km/s, c'est la vitesse pratiquée par Gagarine et Glenn, lors de leur premier vol circumterrestre.
- Vitesse en orbite géostationnaire, elle sera calculée plus tard et vaut $V_0 = 3.075$ km/s
- Vitesse de la lune : sensiblement en orbite circulaire vers 384000 km du centre de la Terre, $V_0 = 1.018$ km/s.

5-3- Longueurs et relations remarquables dans l'ellipse -



Une figure illustre clairement les définitions suivantes.

a- Longueurs remarquables-

- a demi grand axe, $2a = AP$.
- A est l'apogée, point le plus éloigné du centre O.
- P est le périhélie, point le plus rapproché du centre O.
- b demi petit axe, $b = IB$, I est le centre.
- c demi distance focale, $c = OI$, où O est le foyer actif.

b- Relations remarquables -

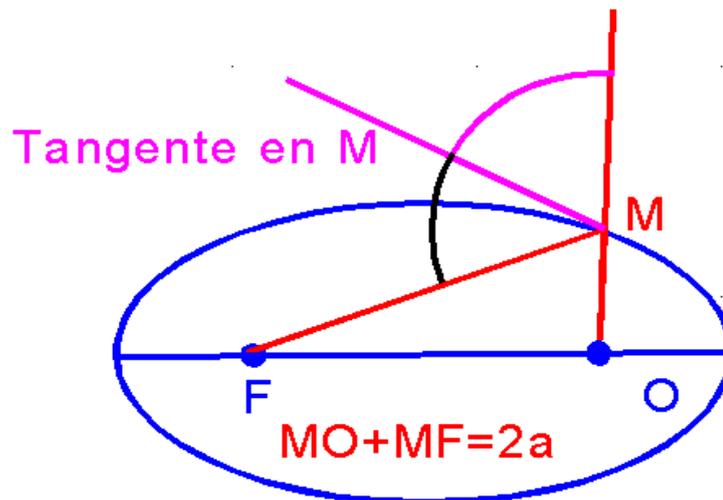
Nous les donnons sans démonstration, renvoyant le lecteur aux traités classiques de géométrie.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad e = \frac{c}{a}$$

$$p = a(1 - e^2) \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$r_p = a(1 - e) = \frac{p}{1 + e} \quad r_a = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e}$$

c- Définition bifocale de l'ellipse -



Une ellipse est l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à 2 points fixes O et F est constante et égale à $2a$. De plus la TANGENTE EN M à l'ellipse est BISSECTRICE EXTERIEURE DE L'ANGLE DES RAYONS VECTEURS

d- Période orbitale -

La loi des aires permet de calculer la période orbitale képlérienne T. En effet l'aire A de l'ellipse vaut $A = \pi ab$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{K}{2} = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{2} T = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$\boxed{T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}} \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}}$$

Nous retrouvons ainsi une des lois de KEPLER les plus remarquables.

NB : On peut dès lors calculer le rayon de l'orbite géostationnaire, puisque la période orbitale est celle de la Terre, soit $T = 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 04,1 \text{ s} = 86164,1 \text{ s}$. Le calcul donne alors $r_g = 42164 \text{ km}$.

5-4- Energie et demi-grand axe -

Il existe une relation remarquable entre E et a, que nous établissons pour une ellipse :

$$\left[\begin{array}{l} e = \sqrt{1 + \frac{2EK^2}{\mu^2}} \\ p = \frac{K^2}{\mu} = a(1-e^2) \end{array} \right] \Rightarrow E = -\frac{\mu}{2a}$$

Pour l'hyperbole il suffit de changer de signe.

6- RESUME DES EQUATIONS -

Pour tout ce qui concerne le calcul des vitesses et des angles sur une trajectoire képlérienne, les équations de conservation sont suffisantes. Nous nous limitons à l'ellipse et donnerons plus loin les relations propres à l'hyperbole.

6-1- Conservations -

$$\text{Equation de l'énergie : } E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2a}$$

Conservation du moment cinétique ou mieux LOI DES AIRES :

$$K = r^2 \dot{\theta} = Vr \cos \gamma = V_0 r_p \cos \gamma_0$$

$$K = V_a r_a = V_p r_p = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

6-2- Quelques relations courantes -

Pour l'ellipse :

$$V_r = \dot{r} = V \sin \gamma \quad V_\theta = V \cos \gamma$$

$$\sin \gamma = e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \theta}{V} = \frac{e \sin \theta}{\sqrt{1 + 2e \cos \theta + e^2}}$$

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e}} \quad V_a = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e}}$$

7- ERREURS DE TIR -

Nous nous intéressons ici, aux conséquences des erreurs sur l'orbite, commises sur la vitesse de tir V_0 , la distance r_0 , l'angle de tir γ_0 . En clair, uniquement les variations de forme de l'orbite mais pas le plan orbital lui-même.

Soit X un paramètre quelconque lié au mouvement ($a, e, p, r_a, r_p, T, V_p, V_a, \dots$), il est uniquement fonction des paramètres V_0, r_0, γ_0 , soit $X = f(V_0, r_0, \gamma_0)$. Imaginons des dispersions de tir $dV_0, dr_0, d\gamma_0$ petites, comment calculer les conséquences sur X . De toute évidence l'outil mathématique est la différentielle.

$$dX = \frac{\partial X}{\partial V_0} dV_0 + \frac{\partial X}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial X}{\partial \gamma_0} d\gamma_0$$

NB : Surtout ne pas calculer les dérivées partielles, mais travailler numériquement, avec des variables intermédiaires.

EXEMPLE SUR LA PERIODE T :

On dispose des liens suivants :

$$(V_0, r_0, \gamma_0) \leftrightarrow E = \frac{1}{2} V_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2a} \leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

Le calcul des différentielles en cascade donne :

$$2 \frac{dT}{T} = 3 \frac{da}{a} \quad \& \quad \frac{\mu}{2a^2} da = V_0 dV_0 + \frac{\mu}{r_0^2} dr_0$$

$$dT = \frac{3aTV_0}{\mu} dV_0 + \frac{3aT}{r_0^2} dr_0 + 0d\gamma_0$$

fournissant les dérivées partielles, qui sont les facteurs d'amplification des erreurs.

De manière générale, vous utiliserez les tableaux de dérivées donnés ci-dessous, pour obtenir toute erreur sur un paramètre.

ORBITES CIRCULAIRES

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial e}{\partial V_0} = \frac{2}{V_0} & \frac{\partial e}{\partial r_0} = \frac{1}{r_0} & \frac{\partial e}{\partial \gamma_0} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial V_0} = \frac{2r_0}{V_0} & \frac{\partial a}{\partial r_0} = 2 & \frac{\partial a}{\partial \gamma_0} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial V_0} = \frac{3T}{V_0} & \frac{\partial T}{\partial r_0} = \frac{3T}{r_0} & \frac{\partial T}{\partial \gamma_0} = 0 \end{array}$$

ORBITES ELLIPTIQUES

$$\lambda = \frac{V_0^2}{e} \frac{r_0}{\mu} \left(V_0^2 \frac{r_0}{\mu} - 1 \right)$$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial e}{\partial V_0} = \frac{2\lambda \cos^2 \gamma_0}{V_0} & \frac{\partial e}{\partial r_0} = \frac{\lambda \cos^2 \gamma_0}{r_0} & \frac{\partial e}{\partial \gamma_0} = \frac{1 - e^2 \tan \gamma_0}{e} \\ \frac{\partial a}{\partial V_0} = \frac{2a^2 V_0}{\mu} & \frac{\partial a}{\partial r_0} = \frac{2a^2}{r_0^2} & \frac{\partial a}{\partial \gamma_0} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial V_0} = \frac{3aV_0 T}{\mu} & \frac{\partial T}{\partial r_0} = \frac{3aT}{r_0^2} & \frac{\partial T}{\partial \gamma_0} = 0 \end{array}$$

Par exemple, pour la distance apogée $r_a = a(1+e)$, on a $dr_a = ade + (1+e) da$, avec de et da aisément calculables.

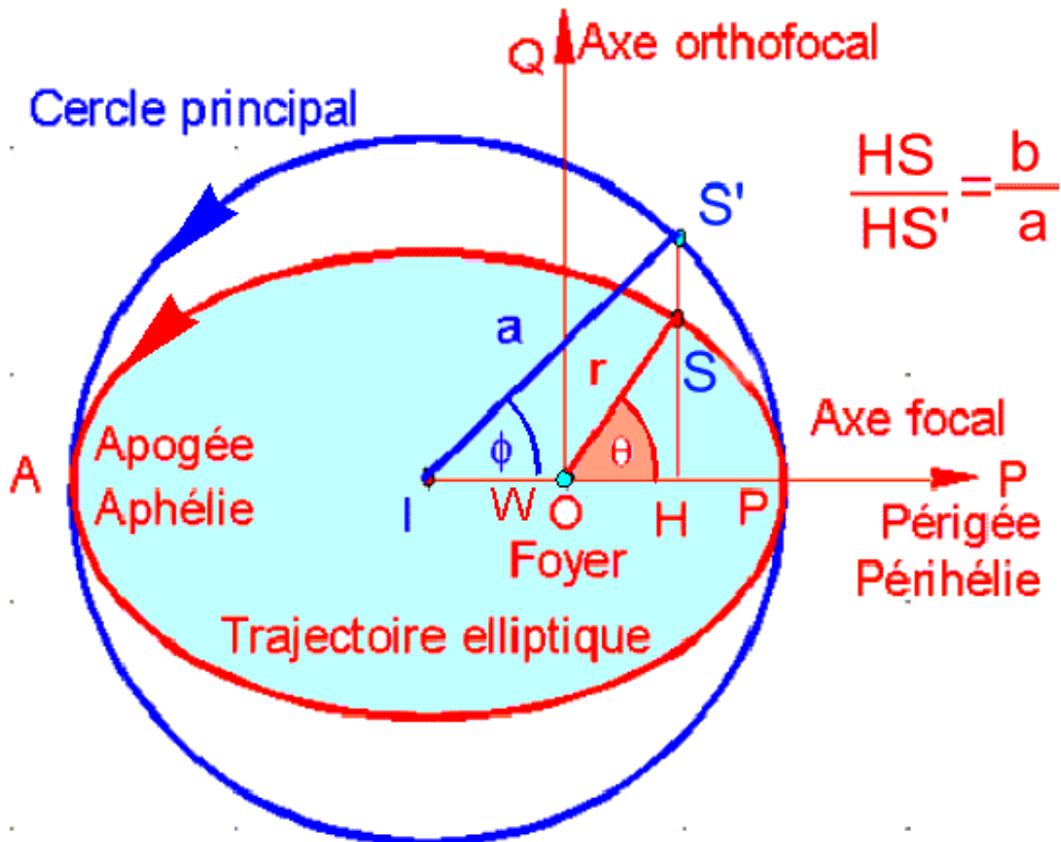
Chapitre 3-

PARAMETRAGE DU MOUVEMENT -

Jusqu'à présent, dans l'étude des mouvements képlériens, vous avez pu constater que la variable temps a été soigneusement évitée, et pour cause : il a été démontré qu'on ne pouvait pas exprimer la solution par des fonctions élémentaires du temps. Dans ce chapitre, nous introduisons une variable intermédiaire qui permet de relier les principales variables au temps t.

1- ANOMALIE EXCENTRIQUE φ -

1-1- Définition de l'anomalie excentrique -



On appelle S' l'image de S , le satellite en orbite elliptique, dans l'affinité orthogonale d'axe P , de rapport a/b . L'ANOMALIE EXCENTRIQUE est l'angle φ entre OP et OS' , mesuré positivement dans le sens du mouvement. Une révolution complète est réalisée quand φ varie de 0 à 2π . Nous constatons que la correspondance $\varphi \times \theta$ est biunivoque.

Lors de la résolution de problèmes numériques ou informatiques, mettant en jeu l'angle φ , il faudra se montrer précis.

$$\text{Montée : } 0 < \varphi < \pi \Leftrightarrow 0 < \theta < \pi \Leftrightarrow \dot{r} > 0 \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{V} > 0$$

$$\text{Descente : } \pi < \varphi < 2\pi \Leftrightarrow \pi < \theta < 2\pi \Leftrightarrow \dot{r} < 0 \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{V} < 0$$

1-2- Paramétrage de l'ellipse –

On travaille dans le triangle OHS . Nous commençons par le rayon vecteur obtenu par le théorème de Pythagore.

$$\left[\begin{array}{l} OH = IH - IC = a(\cos \varphi - e) \\ HS = \frac{b}{a} HS' = b \sin \varphi = a\sqrt{1-e^2} \sin \varphi \end{array} \right] \Rightarrow r = \sqrt{OH^2 + HS^2} = a(1 - e \cos \varphi)$$

L'angle θ est aisé à calculer :

$$\cos \theta = \frac{OH}{OS} = \frac{a(\cos \varphi - e)}{a(1 - e \cos \varphi)} = \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi}$$

On se doute bien que le temps t , que nous avons évité jusqu'à présent, demande un calcul plus complexe. Nous devons revenir à une équation déduite de la conservation de l'énergie, établie "en passant" dans un cours précédent.

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} \quad \& \quad K = r^2\dot{\theta} \quad \& \quad V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

De laquelle nous éliminons le temps pour obtenir :

$$\dot{r}^2 = 2E - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \quad K^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2) \quad E = -\frac{\mu}{2a}$$

$$ar^2\dot{r}^2 = \mu \left[2ar - r^2 - a^2(1 - e^2) \right] = \mu \left[a^2e^2 - (r - a)^2 \right] = \mu a^2 e^2 \sin^2 \varphi$$

Enfin en remplaçant r par son expression en fonction de φ et en tenant compte du fait que la dérivée de φ est > 0, il vient :

$$a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - e \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = 1 \Leftrightarrow t - t_p = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\varphi - e \sin \varphi)$$

tp désigne une heure de passage au périégée. Nous rassemblons toutes ces relations dans le tableau suivant.

$$r = a(1 - e \cos \varphi) \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi} \quad t - t_p = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\varphi - e \sin \varphi)$$

REMARQUE IMPORTANTE : La relation qui donne la dérivée de φ est souvent très utile dans les problèmes informatiques, lorsqu'on souhaite opérer des intégrations par rapport au temps. Elle permet un changement de variable.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{a(1 - e \cos \varphi)} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

ANOMALIE MOYENNE : On appelle ainsi la quantité M; n est le moyen mouvement, relié à la période T que l'on retrouve par

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{2\pi}{n} \quad M = \varphi - e \sin \varphi = n(t - t_p) \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

1-3- Quelques relations classiques -

Nous laissons au lecteur le soin d'établir ou de se renseigner sur les relations suivantes, mettant en jeu φ.

γ, pente de la vitesse	$\cos \gamma = \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}$
	$\sin \gamma = \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}$
	$\tan \gamma = \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2}}$

θ, anomalie vraie	$\cos \theta = \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi}$
	$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi}$
	$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{\varphi}{2}$
φ, anomalie excentrique	$\cos \varphi = \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}$
	$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$
	$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{\cos \theta + e}$

2- Position-Vitesse en fonction de φ -

Dans la plupart des études informatiques, il est nécessaire de travailler avec les vecteurs position r et vitesse V , que nous allons calculer dans la base péri focale PQW en fonction de φ .

2-1- Repère péri focal -

On appelle ainsi le repère d'origine O centre du corps principal, d'axes P unitaire de la direction du péri gée, W unitaire du moment cinétique et Q qui complète la base directe PQW

2-2- Calcul de r et V en fonction de φ -

Nous utilisons des calculs réalisés plus haut sur les mesures de OH et HS et la dérivée de φ :

$$\vec{r} = a(\cos \varphi - e)\vec{P} + a\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \vec{Q} = a \left[(\cos \varphi - e)\vec{P} + \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \vec{Q} \right]$$

Par dérivation par rapport au temps on obtient la vitesse V , puisque les vecteurs \vec{P} et \vec{Q} sont fixes en hypothèse képlérienne.

$$\vec{V} = \left[-a \sin \varphi \vec{P} + a\sqrt{1-e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right] \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin \varphi \vec{P} + \sqrt{1-e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right]$$

Dans un cours ultérieur nous donnerons les composantes des vecteurs de base $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{W}$ en fonction des paramètres orbitaux angulaires.

Conclusions

$$\vec{r} = a \left[(\cos \varphi - e) \vec{P} + \sqrt{1-e^2} \sin \varphi \vec{Q} \right]$$

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin \varphi \vec{P} + \sqrt{1-e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right]$$

$$t - t_n = \frac{T}{2\pi} (\varphi - e \sin \varphi) = a \sqrt{\frac{a}{\mu}} (\varphi - e \sin \varphi)$$

Chapitre 4-

PARAMETRES ORBITAUX

Ce cours est capital pour les applications, car il conditionne le positionnement et le repérage précis d'un satellite.

L'idée générale est qu'on considère à un instant t fixé le satellite comme correspondant à la donnée :

- D'un solide C qui n'est autre que la trajectoire, son repérage nécessite donc
- De repérer un plan, surface qui demande 2 paramètres angulaires, notés Ω et i .
- De préciser la position du grand axe de la conique, donc avec un paramètre angulaire noté ω .
- De préciser la forme de l'ellipse, simple avec a et e déjà connus

De donner un "top", c'est à dire un instant initial et une position initiale à partir de laquelle on peut déduire toutes les autres positions. Il faudra donc 2 autres paramètres, un angle et un temps.

Au total les paramètres orbitaux seront au nombre de 6 plus un temps initial.

1- DEFINITION DES VECTEURS FONDAMENTAUX -

Le tir étant réalisé, nous appelons :

- les conditions initiales à l'instant t_0 : \vec{r}_0, \vec{V}_0
- les conditions au point courant à l'instant t : \vec{r}, \vec{V}

Le mouvement képlérien possède des intégrales premières vectorielles remarquables, qui s'expriment naturellement avec le rayon vecteur et le vecteur vitesse.

1-1- Moment cinétique réduit \vec{h} -

Nous avons déjà établi la constance du vecteur :

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V} = \vec{r}_0 \wedge \vec{V}_0 = K\vec{W} = r^2 \dot{\theta} \vec{W} = \vec{W} r \cos \gamma \vec{W} = V_0 r_0 \cos \gamma_0 \vec{W}$$

Ce vecteur \vec{h} donne par son module la constante des aires K, il oriente le sens du mouvement et donne la direction du plan orbital.

1-2- Vecteur excentricité \vec{e} -

Curieuse construction pour ce vecteur, puisqu'on pose :

$$\vec{e} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

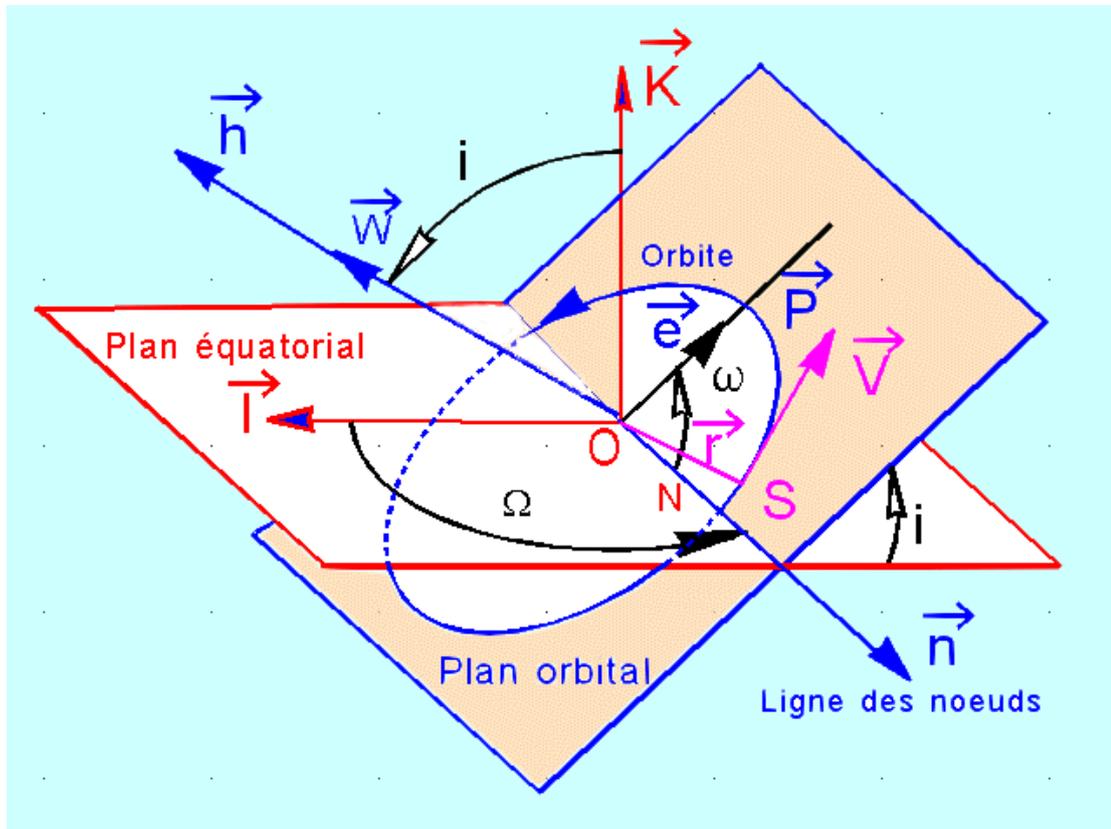
On commence par démontrer que ce vecteur est constant, en calculant sa dérivée.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \wedge \frac{\vec{h}}{\mu} - \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} + \dot{r} \frac{\vec{r}}{r^2} \\ \vec{h} = r^2 \dot{\theta} \vec{W} \quad \& \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{e} \text{ constant} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{v} \end{array} \right]$$

Ensuite, nous montrons que, puisque ce vecteur est constant le long de la trajectoire, on peut le calculer en tout point et en particulier au périégée P de l'orbite. Nous conservons les notations P, Q, W pour le repère perifocal et r_p pour le rayon vecteur.

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e} = \frac{1}{\mu} r_p \dot{\theta}_p \vec{Q} \wedge r_p^2 \dot{\theta}_p \vec{W} - \vec{P} = \left[\frac{r_p^3 \dot{\theta}_p^2}{\mu} - 1 \right] \vec{P} \\ K = r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{r_p^3 \dot{\theta}_p^2}{\mu} = \frac{K^2}{\mu r_p} \\ p = \frac{K^2}{\mu} \quad r_p = \frac{p}{1+e} \end{array} \right] \Rightarrow \vec{e} = e \vec{P}$$

Donc le vecteur \vec{e} fournit par sa norme l'excentricité de l'orbite, mais surtout il donne l'unitaire P qui "pointe" le périégée. Donc la principale utilité de \vec{e} est de désigner le périégée.

1-3- Vecteur nodal \vec{n} -


Le vecteur nodal \vec{n} se définit par $\vec{n} = \vec{K} \wedge \vec{h}$

Ce vecteur n'existe que pour les orbites non équatoriales. Le vecteur \vec{n} a la propriété de "pointer" le nœud ascendant de l'orbite, puisqu'il appartient au plan équatorial et au plan orbital.

2- DEFINITION DES PARAMETRES ORBITAUX -

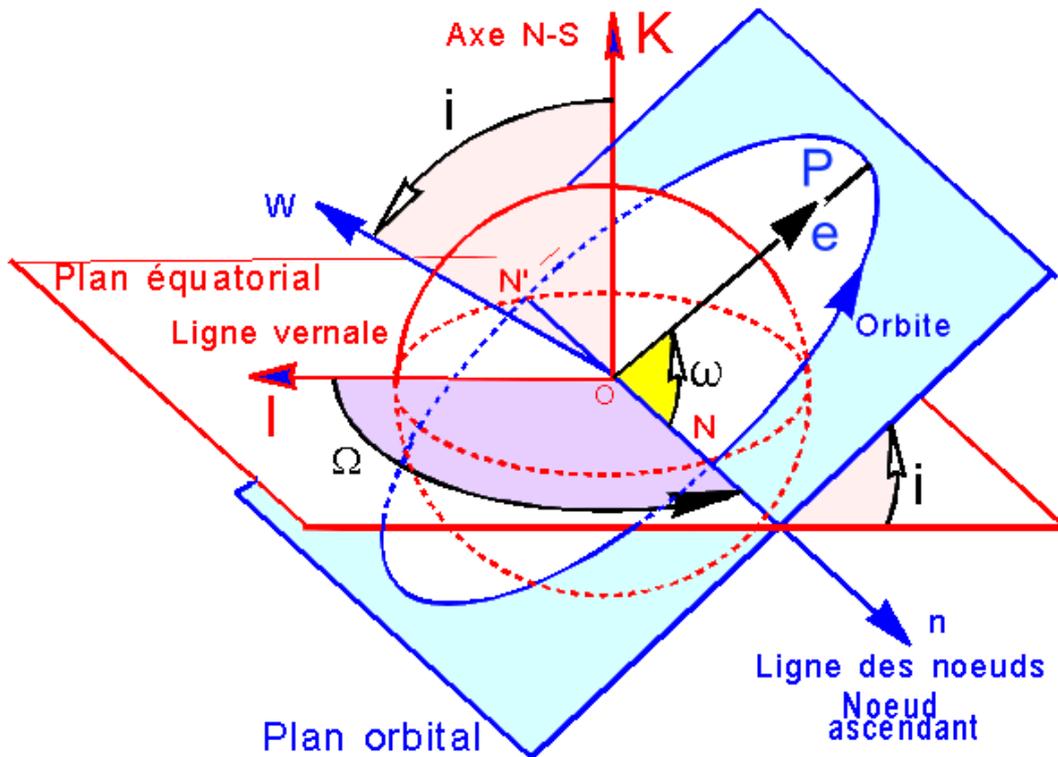
La figure ci-dessous illustrera la définition des paramètres orbitaux.

2-1- Repérage du plan orbital -

Nous savons qu'avec une excellente approximation, le plan équatorial terrestre est fixe dans le repère inertiel IJK. Le plan orbital coupe le plan équatorial suivant une droite appelée LIGNE DES NOEUDS.

- N point où le satellite passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord, s'appelle le NŒUD ASCENDANT de l'orbite.
- N' point où le satellite passe de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud, s'appelle le NŒUD DESCENDANT de l'orbite.

Ces 2 points sont importants dans les applications pratiques, parce que d'une part nous verrons que c'est le lieu des corrections d'inclinaison, mais également ils délimitent, pour les pays de l'hémisphère Nord, la zone utilisable.



NB : Des définitions équivalentes pourront être données, des paramètres orbitaux ou des vecteurs fondamentaux, pour le repère héliocentrique écliptique ou tout autre repère planétocentrique. Ce n'est que par habitude que nous les fournissons dans IJK.

a- Longitude vernale Ω ou heure sidérale de la ligne des noeuds -

On appelle Ω l'angle, mesuré positivement autour de K, entre l'unitaire I et le vecteur nodal \vec{n} . Conventionnellement, il est exprimé entre 0° et 360° .

$$\Omega = (\vec{i}, \vec{n}) / \vec{K} \in [0^\circ, 360^\circ]$$

Cet angle conditionne naturellement le positionnement du plan orbital par rapport à l'espace inertiel environnant. Donc tout naturellement, comme le soleil est mobile dans cet espace, Ω et le temps interviennent dans les problèmes d'éclairage des panneaux solaires et la gestion de l'énergie.

Le calcul de Ω est simple, si on lui adjoint une test à ne pas oublier.

$$\Omega = \begin{cases} \text{Arc cos} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) & \text{si } \vec{n} \cdot \vec{J} > 0 \\ 2\pi - \text{Arc cos} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) & \text{si } \vec{n} \cdot \vec{J} < 0 \end{cases}$$

b- Inclinaison orbitale i -

On appelle inclinaison de l'orbite l'angle i , mesuré entre 0° et 180° positivement autour de l'axe n , entre le plan équatorial et le plan orbital. C'est encore l'angle entre les normales aux 2 plans, donc entre K et h (ou Ω).

Le calcul donne sans difficulté : $i = \text{Arc cos} \frac{\vec{K} \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|}$

Nous le verrons plus loin, mais à l'évidence plus l'inclinaison orbitale est forte, plus on peut survoler des latitudes élevées.

Quelques valeurs classiques :

- $i=0^\circ$ Orbite équatoriale, essentiellement l'orbite géostationnaire.
- $i=28^\circ$ Inclinaison habituelle des orbites des vols Navette US
- $i=63.4^\circ$ Inclinaison orbitale fréquemment utilisée par les satellites soviétiques, car c'est une valeur qui leur permet de pallier une perturbation due à J_2 .
- $i=90^\circ$ Orbites polaires pratiquées par les satellites météorologiques en orbite basse, leur permettant de suivre 15 fois par jour les masses d'air polaire.
- $i=98.7^\circ$ Inclinaison choisie par les satellites de la famille SPOT, gravitant vers 822 km du sol, travaillant en imagerie spatiale et utilisant grâce à une valeur bien choisie de i , la propriété d'héliosynchronisme. Vu du nœud ascendant, le satellite se déplace vers l'Ouest, contrairement à 90% des satellites.

- $i=5^\circ$ Inclinaison de l'orbite lunaire
- $i=23^\circ 27'$ Inclinaison de l'orbite décrite par le soleil vu de la Terre, avec passage au nœud ascendant au moment du printemps.

2-2- Repérage du grand axe dans son plan -

On appelle ω ARGUMENT NODAL DU PERIGEE, l'angle orienté des vecteurs \vec{n} et \vec{e} mesuré positivement entre 0° et 360° autour de l'axe Ω .

$$\omega = \begin{cases} \text{Arc cos} \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{\|\vec{e}\| \|\vec{n}\|} \right) & \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{K} \geq 0 \\ 2\pi - \text{Arc cos} \left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{\|\vec{e}\| \|\vec{n}\|} \right) & \Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{K} < 0 \end{cases}$$

- $\omega = 0^\circ$ place le périégée au nœud ascendant
- $\omega = 180^\circ$ place le périégée au nœud descendant, c'est le cas d'un tir Ariane en GTO.
- $0^\circ < \omega < 180^\circ$ garantit un périégée dans l'hémisphère nord.
- $180^\circ < \omega < 360^\circ$ garantit un périégée dans l'hémisphère sud

2-3- Paramétrages de forme de l'orbite -

On retient les paramètres classiques a et e , déjà rencontrés.

$$a = \pm \frac{\mu}{\|\vec{V}\|^2 - \frac{2\mu}{\|\vec{r}\|}} \quad e = \|\vec{e}\| = \left\| \frac{\vec{V} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right\|$$

2-4- Paramètre de position sur l'orbite -

Le dernier des paramètres orbitaux, est en fait constitué de deux données, une position sur l'orbite et un temps correspondant à cette position. Les choix sont variables en fonction du problème traité.

- Position = PERIGEE et temps t_p , souvent premier passage au périégée.
- Position quelconque au temps t_0 et l'anomalie vraie θ_0 ou l'anomalie excentrique φ_0 ou l'anomalie moyenne $M_0 = \varphi_0 - e \sin \varphi_0$

CONCLUSIONS :

$$\text{Paramètres orbitaux : } a, e, i, \Omega, \omega, \text{ au choix } \begin{bmatrix} t_p, \text{périgée} \\ t_0, \varphi_0 \\ t_0, \varphi_0 \\ t_0, M_0 \end{bmatrix}$$

3- CALCUL DES VECTEURS P, Q, W DANS IJK -

3-1- Calcul des composantes -

Dans les études numériques, il est indispensable de passer de la base absolue à d'autres bases et en particulier, dans la base PQW du repère pérfocal.

Le lecteur réalisera les calculs classiques qui donnent les composantes de P, Q, W dans I, J, K.

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = \vec{P} \wedge \vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \Omega \sin i \\ \cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}$$

3-2- Matrice de passage de (IJK) à (PQW) -

Le lecteur se convaincra, en utilisant ses connaissances en algèbre linéaire que la matrice de passage P de la base IJK à la base PQW vaut :

$$\begin{bmatrix} \vec{P} & \vec{Q} & \vec{W} \\ \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i & -\sin i \sin \Omega & \vec{I} \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i & \sin i \cos \Omega & \vec{J} \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i & \vec{K} \end{bmatrix}$$

Naturellement la matrice de passage inverse est la transposée de P.

Avec les résultats acquis du cours sur l'utilisation de l'anomalie excentrique, on a :

$$\vec{r} = a \left[(\cos \varphi - e) \vec{P} + \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \vec{Q} \right]$$

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin \varphi \vec{P} + \sqrt{1 - e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right]$$

Le lecteur pourra aussi s'exercer à redémontrer les relations ci-dessus.

Et naturellement avec la chronologie :

$$t - t_p = \frac{T}{2\pi} (\varphi - e \sin \varphi) = a \sqrt{\frac{a}{\mu}} (\varphi - e \sin \varphi)$$

On obtient alors les coordonnées du satellite dans le repère associé à J_{2000} .

Chapitre 5-

PARAMETRES D'INJECTION

Ce chapitre est consacré aux conditions d'injection en orbite, réalisée par le lanceur chargé soit :

- De la mise en orbite quasi définitive, aux dispersions près inévitables.
- D'une satellisation sur une orbite de transfert, par exemple Ariane en GTO, vers l'orbite géostationnaire.
- D'une mise en orbite de dérive intermédiaire, par exemple pour rejoindre un point de stationnement.
- D'une mise en orbite de parking, avant une évaison vers une planète.

1- DEFINITIONS DES PARAMETRES D'INJECTION -

La réalité physique d'un tir impose un suivi du lanceur, durant sa phase propulsée, depuis des stations de poursuite sol, multiples en général. Par exemple pour un tir classique Ariane, les stations sont Kourou, Ascension, Libreville,...

L'acquisition des données est donc rapportée à un repère lié à la station et donc entraîné dans la rotation terrestre. Or les calculs de trajectoire nécessitent un repère inertiel, comme J2000.

Il est donc nécessaire de préciser les éléments permettant de réaliser un changement de base.

1-1- Repère géographique -

Dans la figure suivante, on retrouve O IJK, inertiel, associé au jour J₂₀₀₀. Il apparaît le méridien de Greenwich, et c'est l'occasion de définir une donnée d'EPHEMERIDES importante : l'HEURE SIDERALE DE GREENWICH à un instant t.

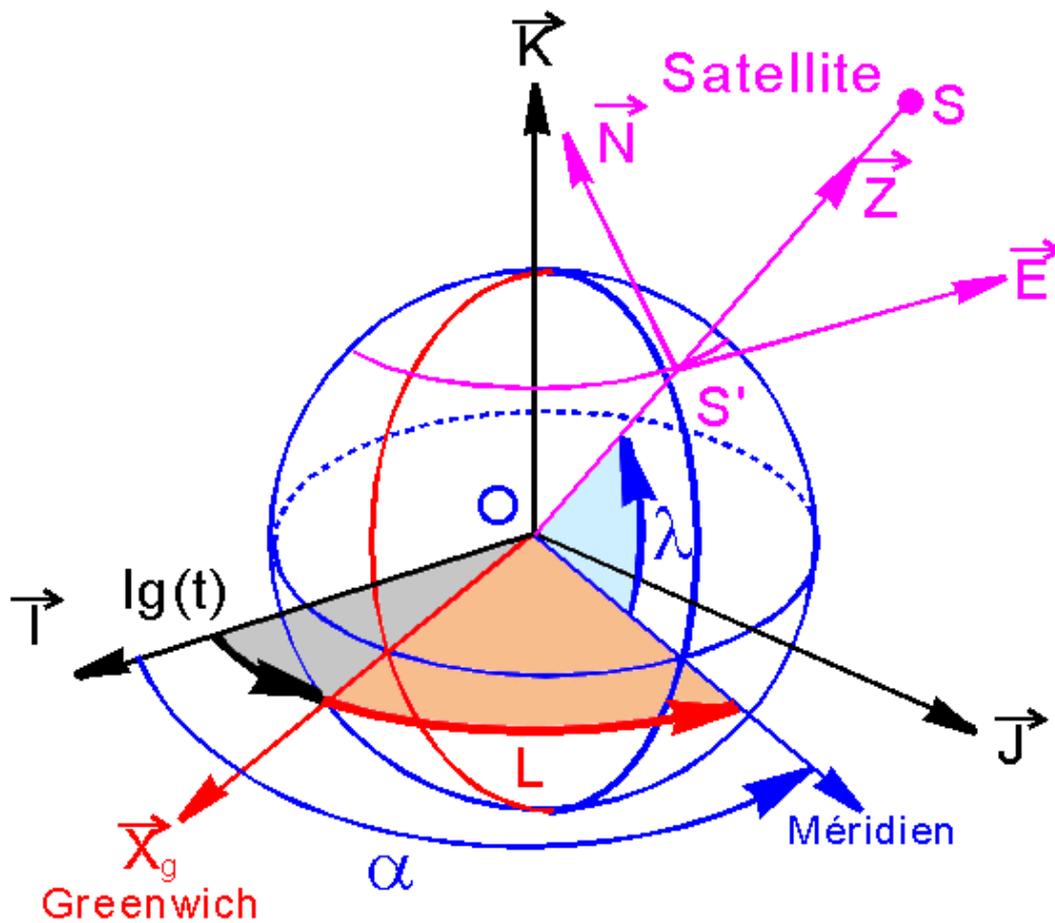
$$l_g(t) = (\vec{l}, \vec{X}_G) = l_g(t_0) + \omega_T(t - t_0) \quad \omega_T = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rd/s}$$

Une valeur particulière peut être obtenue par les éphémérides, publiées tous les ans par le BUREAU DES LONGITUDES à Paris.

Une routine est fournie sur ce site, dans le pack des routines en Pascal, elle s'appelle `heure_sid.exe` (voir routines)

Le satellite à l'instant t se trouve en S , à la verticale du point de la Terre S' , qu'il survole. En S' , nous avons tracé le méridien et le parallèle. Il apparaît clairement la longitude L et la latitude l du satellite S

La tangente N au méridien est le Nord local. La tangente E au parallèle orienté vers l'Est est l'Est local. La verticale ascendante Z est le zénith local, opposé au NADIR.



Le repère $S'ENZ$ constitue le REPERE GEOGRAPHIQUE LOCAL.

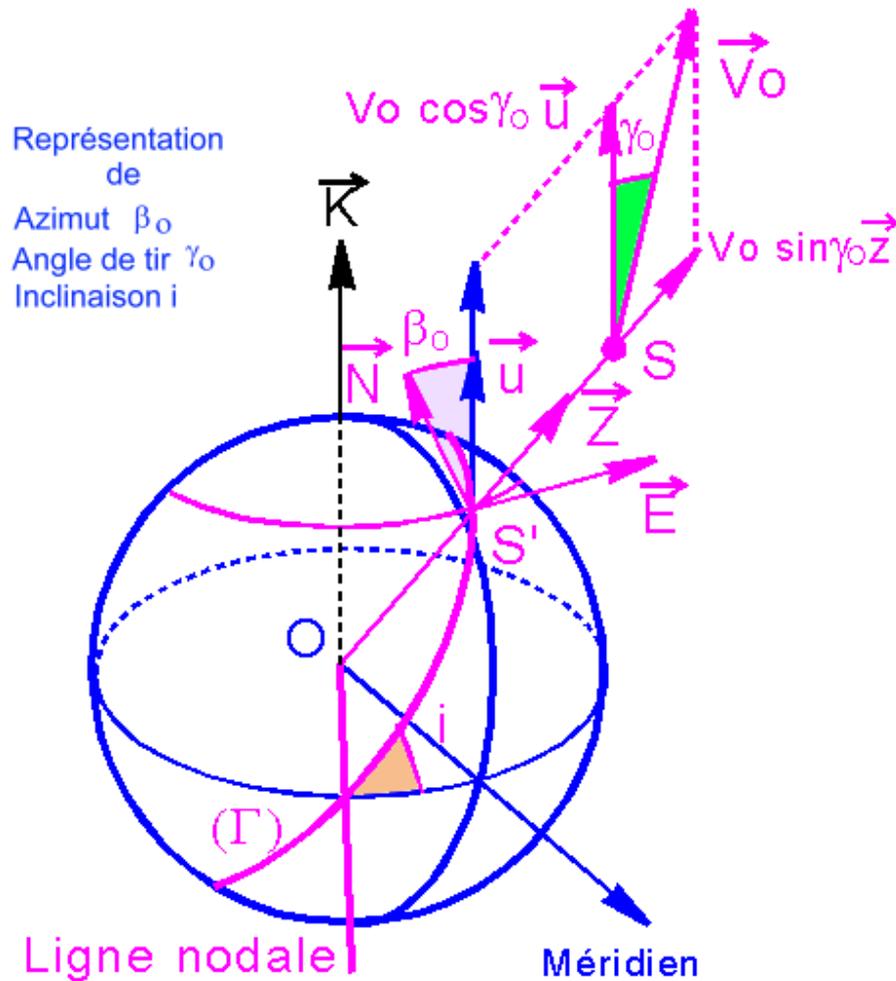
1-2- Paramètres d'injection -

On appelle ainsi un ensemble de 6 données plus la date t_0 de l'injection :

a- Un positionnement du point de tir :

- L_0 LONGITUDE du tir,
- λ_0 LATITUDE du tir

b- Les conditions balistiques du tir définissant la forme de la trajectoire :



- Le rayon vecteur $r_0 = R_T + Z_0$ (Z_0 altitude sol)
- L'angle absolu de tir γ_0 entre la vitesse absolue et l'horizontale locale.
- V_0 norme de la vitesse absolue inertielle, si une mesure de vitesse relative a été réalisée, on appliquera alors la composition des vitesses.

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_R + \omega_T (R_T + Z_0) \cos \lambda \vec{E}$$

c- Le positionnement du plan de tir :

Le plan de tir est défini par la vitesse absolue V_0 et le rayon vecteur porté par le zénith Z.

L'AZIMUT ABSOLU β_0 du tir, mesuré positivement vers l'Est. Plusieurs aspects sont possibles, une figure est nécessaire (voir plus loin).

- Angle entre le plan méridien et le plan de tir
- Angle entre le Nord local N et la projection horizontale de la vitesse
- Angle entre le Nord local N et la direction orthoradiale v du tir

REMARQUES PRATIQUES :

- $\beta_0=90^\circ$ et $\gamma_0 = 0^\circ$ s'appelle un TIR PLEIN EST, qui permet de profiter pleinement de la vitesse d'entraînement due à la rotation terrestre (465 m/s à l'équateur).
- $\beta_0=90^\circ$ et γ_0 quelconque est un TIR VERS L'EST.
- $\beta_0=0^\circ$ et $\gamma_0 =0^\circ$ TIR EN ORBITE POLAIRE CIRCULAIRE.
- $\beta_0=97^\circ$, γ_0 et λ_0 voisins de 0° , TIR GTO ARIANE, avec le périégée au nœud descendant, de manière à placer l'apogée sur l'équateur.
- $\beta_0 < 0^\circ$ tir de direction Ouest; si β_0 est voisin de 98° ce sont des orbites héliosynchrones.
- La DATE t_0 du tir :

PARAMETRES D'INJECTION EN S_0 : $L_0, \lambda_0, V_0, r_0, \gamma_0, \beta_0, t_0$

1-3- Passage de IJK à ENZ -

Donnons d'abord deux définitions, plus particulièrement utilisées en astronomie 0:

$a = \lg(t)+L$ s'appelle l'heure sidérale du satellite ou encore longitude vernale.

$d = l$ porte aussi le nom en astronomie, de déclinaison

Le lecteur effectuera le calcul des composantes des vecteurs $\vec{E}, \vec{N}, \vec{Z}$ dans la base inertielle IJK, ceci afin de construire la matrice de passage $P(\alpha, \lambda)$ de la base IJK à ENZ ou son inverse.

$$P(IJK \rightarrow ENZ) = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & -\sin \lambda \cos \alpha & \cos \lambda \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \lambda \sin \alpha & \cos \lambda \sin \alpha \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \end{bmatrix}$$

Naturellement ces formules s'utilisent dans les deux sens, ce qui explique que nous n'ayons pas cherché à résoudre.

2- CALCUL DES PARAMETRES ORBITAUX -

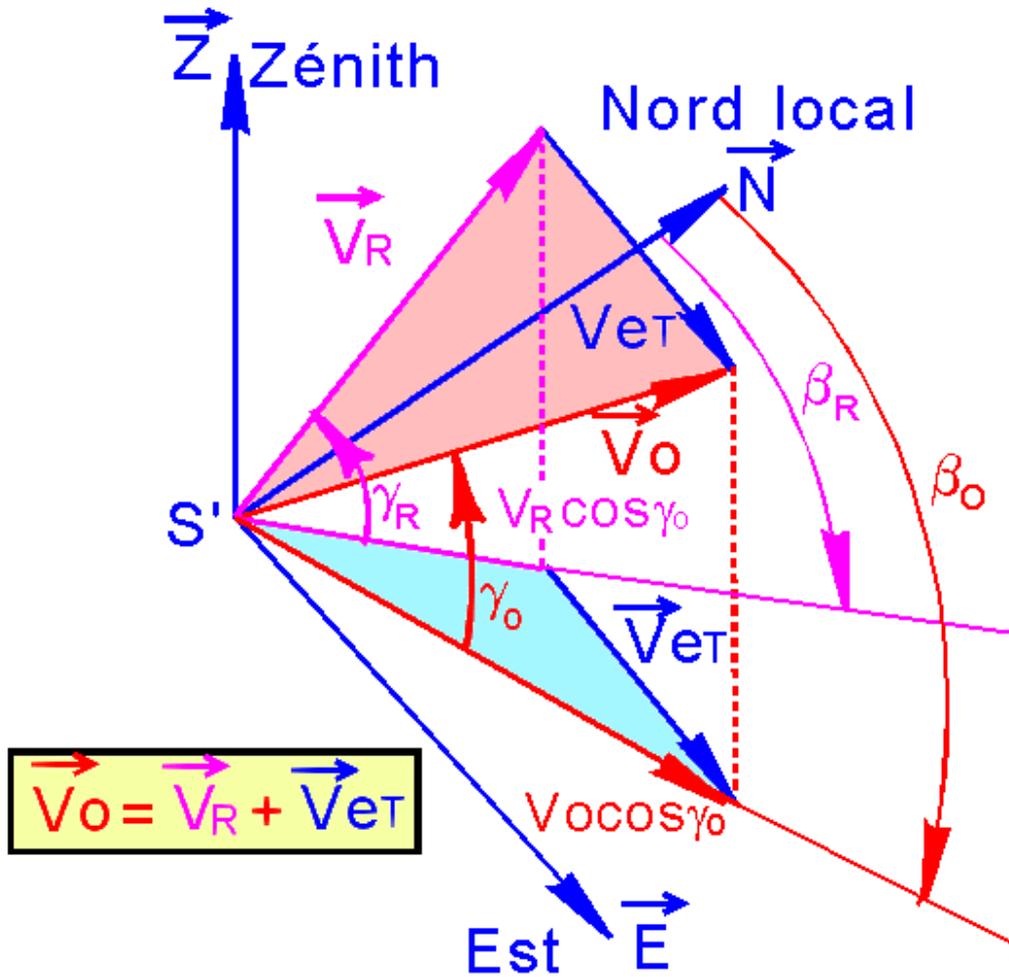
Cette partie relève plus des procédures informatiques que des calculs d'application à la main. Connaissant les conditions d'injection (absolues ou relatives) on en déduit les paramètres orbitaux képlériens.

2-1- Passage des conditions relatives aux conditions absolues -

Quand on s'intéresse aux performances d'un lanceur, on s'aperçoit vite que le mouvement doit être rapporté et suivi par rapport à la Terre. On est alors amené à définir les conditions relatives du tir, azimut relatif β_R , vitesse relative V_R , pente ou angle de tir relatif γ_R .

La figure et les notations sont suffisamment explicites pour justifier les relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} V_0 \cos \gamma_0 \sin \beta_0 &= V_R \cos \gamma_R \sin \beta_R + V_{eT} \\ V_0 \cos \gamma_0 \cos \beta_0 &= V_R \cos \gamma_R \cos \beta_R \\ V_0 \sin \gamma_0 &= V_R \sin \gamma_R \end{aligned}$$



2-2- Calcul de paramètres orbitaux -

L'idée est de calculer le rayon vecteur et la vitesse absolue, par leurs composantes dans ENZ et d'opérer le changement de base pour les exprimer dans IJK.

$$\vec{r}_{0/ENZ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_{0/ENZ} = \begin{bmatrix} V_0 \cos \gamma_0 \sin \beta_0 \\ V_0 \cos \gamma_0 \cos \beta_0 \\ V_0 \sin \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Le passage à IJK est aisé, grâce à la matrice $P(\alpha, \lambda)$:

$$\vec{r}_{0/IJK} = P(\alpha, \lambda) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_{0/IJK} = P(\alpha, \lambda) \cdot \begin{bmatrix} V_0 \cos \gamma_0 \sin \beta_0 \\ V_0 \cos \gamma_0 \cos \beta_0 \\ V_0 \sin \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Le calcul s'achève ensuite conformément au cours sur les paramètres orbitaux.

3- CALCUL DE L'INCLINAISON ORBITALE -

Dans les applications pratiques, l'inclinaison orbitale i est un paramètre capital et faisant l'objet d'une surveillance très stricte. Les corrections d'inclinaison étant très coûteuses, tout tir demande une étude précise des conditions d'injection, pour affiner au mieux cette inclinaison.

Si on revient à la figure des paramètres d'injection, on constate que le plan orbital est orienté par le vecteur \vec{W} produit vectoriel de \vec{Z} par \vec{u} , d'où :

$$\vec{W} = \vec{Z} \wedge \vec{u} \quad \cos i = \vec{W} \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot (\vec{Z} \wedge \vec{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin \beta \\ \cos \lambda & 0 & \cos \beta \\ \sin \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} / \vec{E}\vec{N}\vec{Z}$$

On obtient ainsi, une relation simple et d'un grand intérêt pratique $\cos i = \cos \lambda \sin \beta$.

En particulier :

- i est toujours supérieure ou égale à la latitude de l'injection λ_0 .
- $i = \lambda_0$ uniquement si le tir est effectué vers l'Est.
- Une orbite polaire nécessite un azimut égal à 0° .
- Un tir héliosynchrone, où l'inclinaison orbitale est de l'ordre de $98^\circ.7$ pour SPOT par exemple, demande un azimut négatif (tir vers le Nord-Ouest).

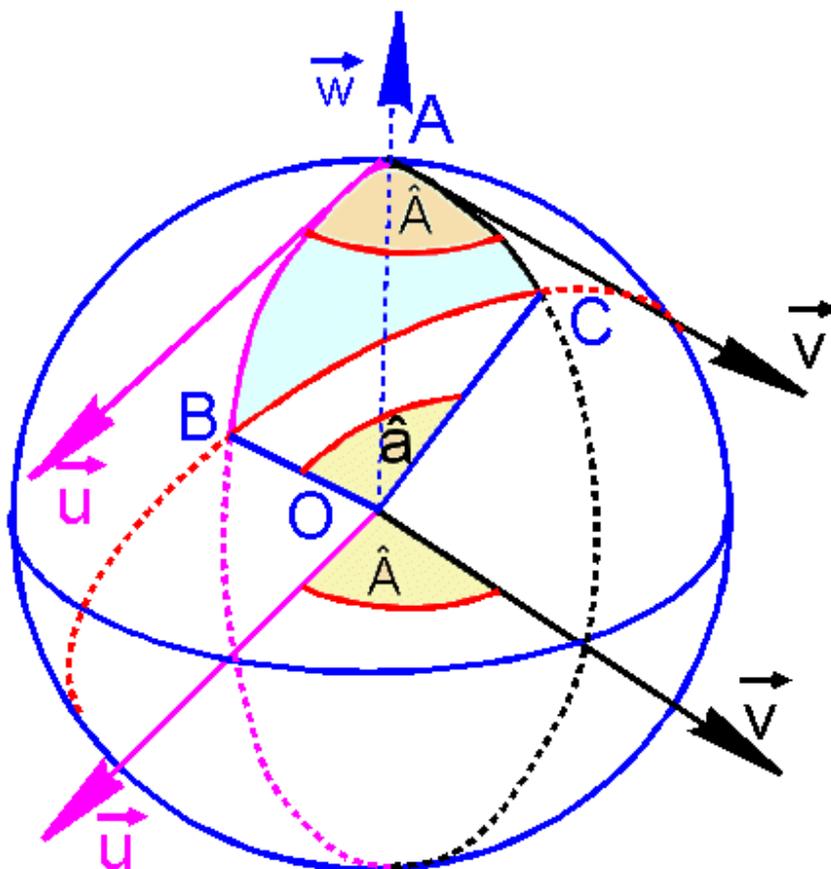
Chapitre 6-

TRIGONOMETRIE SPHERIQUE

Ce chapitre traite de compléments de trigonométrie sphérique qu'on ne peut pas ne pas connaître, tant l'usage en est répandu en astronautique et astronomie.

1- DEFINITIONS DE BASE -

1-1- Triangle sphérique -



Considérons une sphère de centre O et de rayon unité, et sur sa surface 3 points A, B, C non tous trois situés sur un même grand cercle de la sphère. Ces 3 points constituent les

sommets d'un TRIANGLE SPHERIQUE, dont les cotés sont les arcs des 3 grands cercles de la sphère, qui passent respectivement par AB, AC, BC.

1-2- Angles -

On peut alors définir des angles.

- Angles au sommet A, B, C : Par exemple \hat{A} ou A : on désigne ainsi, l'angle inférieur à 180° , arithmétique formé par les tangentes Au et Av aux deux grands cercles passant par A. De même pour les autres sommets.
- Angles au centre a, b, c : Par exemple \hat{a} ou a est l'angle arithmétique inférieur à 180° , en O entre les directions OB et OC. Souvent on dit qu'on "voit" le côté BC sous l'angle au centre \hat{a} .

NB : si un des angles au sommet est égal à 90° , on dit que le triangle est rectangle.

REMARQUE : La somme des angles au sommet n'est pas comme pour un triangle plan, égale à 180° , mais supérieure à 180° .

2- RELATIONS TRIGONOMETRIQUES -

Nous allons établir les relations les plus générales dans un triangle sphérique quelconque.

2-1- Relation générale -

Les vecteurs OB et OC sont décomposés sur u et w (resp v et w), ce qui donne :

$$\cos a = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = [\cos c\vec{w} + \sin c\vec{v}][\cos b\vec{v} + \sin b\vec{w}]$$

$$\text{or } \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos A$$

ce qui donne

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

2-2- Relation des sinus -

Il est clair que les sinus de tous les angles sont positifs, ainsi on peut écrire :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \left[\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \sin c} \right]^2}}{\sin a}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}$$

La dernière relation est invariante par permutation circulaire des variables a, b, c. Donc nous obtenons une relation remarquable du triangle sphérique, appelée RELATION DES SINUS :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

2-3- Relations générales –

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \tag{1}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \tag{2}$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \tag{3}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \tag{4}$$

2-4- Exemple : Distance entre 2 points de la Terre -

Soient 2 lieux donnés par leur coordonnées géographiques, longitude et latitude, B=(L₀, λ₀), C=(L₁, λ₁). Le rayon terrestre étant noté R_T, le lecteur établira, en utilisant un triangle constitué de B, C, et du pôle nord A, que la plus courte distance entre B et C, mesurée sur un grand cercle (distance loxodromique ou géodésique) est :

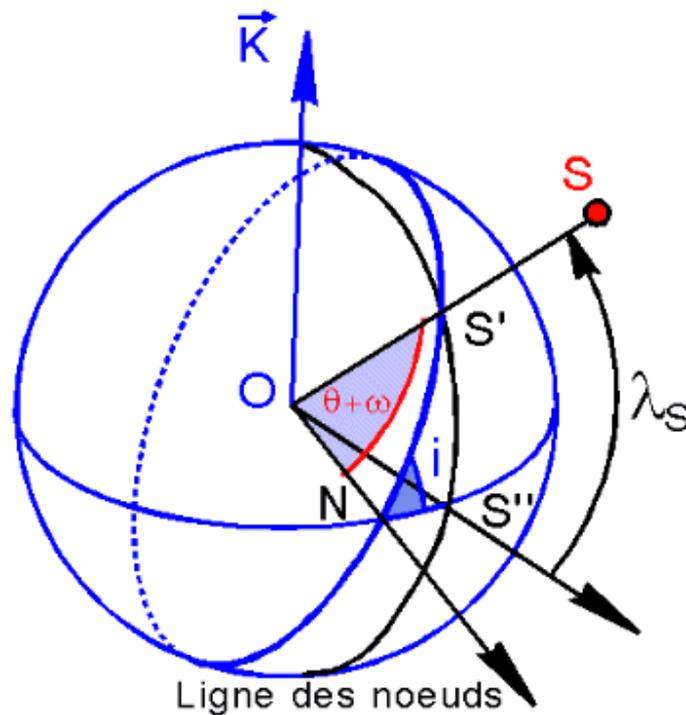
$$D = R_T [\sin \lambda_0 \sin \lambda_1 + \cos \lambda_0 \cos \lambda_1 \cos(L_1 - L_0)]$$

3- CAS PARTICULIER DU TRIANGLE RECTANGLE EN A -

Comme la trigonométrie sphérique est souvent utilisée sur Terre, avec souvent 2 grands cercles très particuliers et orthogonaux : l'équateur terrestre ou un parallèle quelconque et un méridien, ce cas revêt un intérêt particulier. Le lecteur pourra s'exercer à retrouver les relations ci-dessous.

$$\begin{array}{l}
 \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \\
 A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c = \cot B \cot C \\ \sin b = \sin a \sin B = \cot C \tan c \\ \cos C = \sin B \cos c = \cot a \tan b \\ \cos B = \sin C \cos b = \cot a \tan c \end{array} \right.
 \end{array}$$

Exemple, pour les points survolés :



Le triangle sphérique à considérer est $S''NS' \sim ABC$ rectangle en A. $B = S'NS'' = i$, $NOS' = a = \theta + \omega$, $S''Os' = \lambda_S = b$. La relation des sinus donne immédiatement le résultat cherché, à savoir :

$$\sin \lambda_S = \sin i \sin(\theta + \omega)$$

Formule importante déjà rencontrée.

Chapitre 7-

POINTS SURVOLES

Ce chapitre est consacré à l'étude de la trace au sol d'un satellite et de son mode de calcul.

On pressent bien que le calcul de la latitude ne devrait pas poser de problème, parce que la rotation terrestre n'intervient pas. Par contre pour la longitude, il n'en sera pas de même.

La connaissance de la trace au sol et de l'instant de survol est indispensable dans l'exploitation des données satellitaires par exemple en :

- Imagerie et cartographie spatiale (SPOT, HELIOS)
- Météorologie (METEOSAT en géostationnaire, et d'autres en orbite polaire.)
- Télécommunications (radio, télévision, télécommande et télémétrie) EUTELSAT, TELECOM 2A 2B 2C,
- Contrôle aérien ou maritime (MARECS...)
- Sécurité en mer (Système ARGOS)
- Etude des océans (TOPEX-POSEIDON)
- Géodésie spatiale

1- HYPOTHESES ET CALCULS -

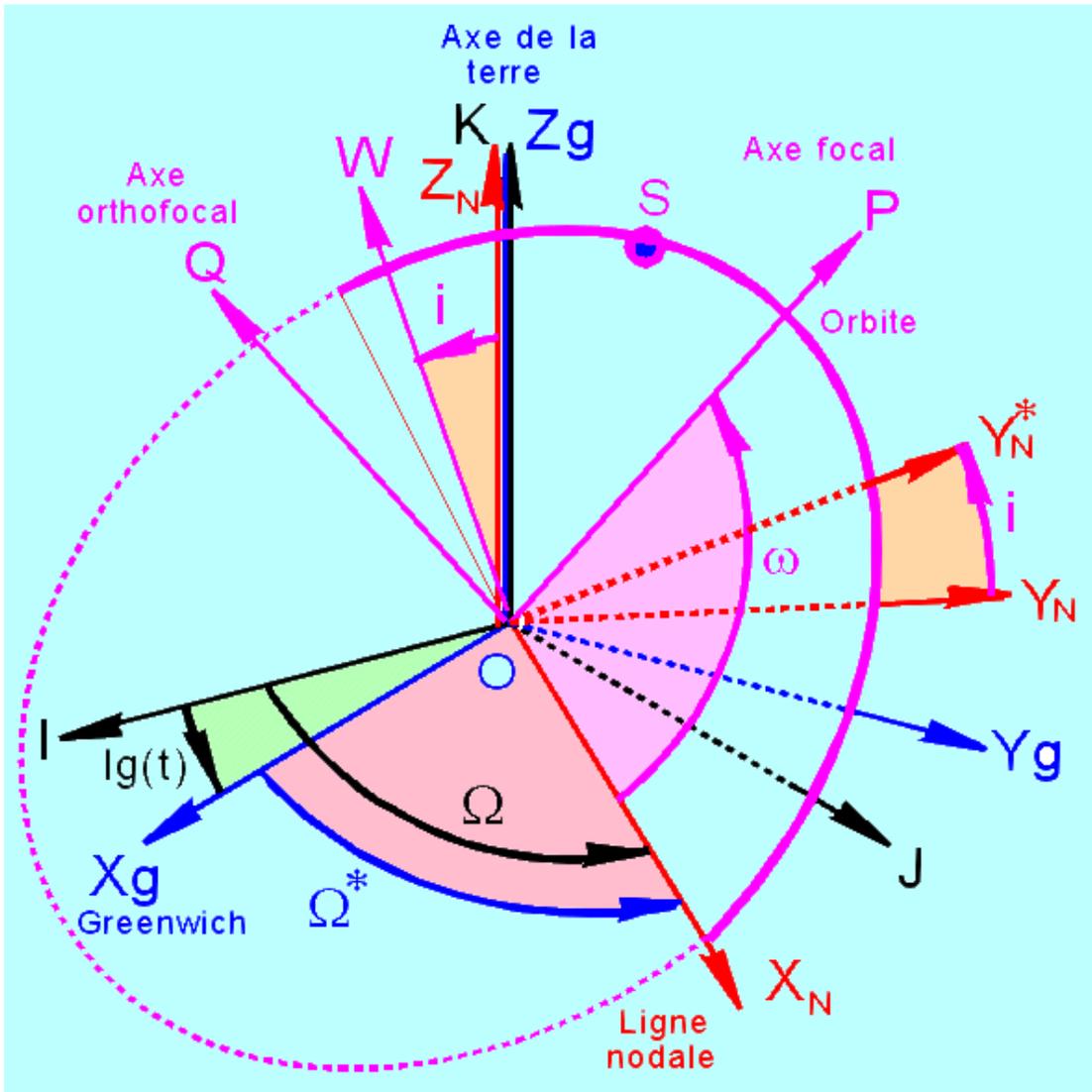
Une mission satellite est parfaitement définie par ses paramètres orbitaux, ce qui équivaut naturellement à la donnée des paramètres d'injection (voir PARAMETRES D'INJECTION ou PARAMETRES ORBITAUX)

On supposera donc connus les paramètres orbitaux a , e , i , ω , Ω , t_p et l'instant courant t . Nous devons alors calculer la position du satellite par rapport à la Terre, par ses coordonnées géographiques longitude L_S et latitude λ_S .

Les perturbations orbitales ne seront pas prises en compte dans l'étude initiale, nous travaillons en képlérien, mais nous verrons que les résultats peuvent être extrapolés au cas du mouvement réel.

1-1- Repères et notations -

- IJK désigne le repère inertiel Ra, associé à J_{2000} .
- $X_g Y_g Z_g$ ($Z_g=K$) est le repère R_g lié à la Terre, en rotation autour de l'axe nord-sud, avec X_g dans le méridien de Greenwich. L_s et λ_s sont rapportées à ce repère. Le satellite S a pour coordonnées X_g, Y_g, Z_g



- PQW est le repère périfocal déjà rencontré, associé à l'orbite, avec P pointé vers le périégée et W unitaire du moment cinétique.
- $\Omega^* = \Omega - lg(t)$ est la longitude Greenwich de la ligne des nœuds au temps t . On rappelle que $lg(t)$ est l'heure sidérale de Greenwich, calculable par la routine `heur-sid.exe` ou donnée par les éphémérides du bureau des longitudes.

1-2- Matrices de passage -

Nous verrons plus loin que le satellite est facilement repérable dans la base péricentrale, et que nous devons le positionner dans $X_g Y_g Z_g$. La matrice de passage est donc nécessaire. Un calcul analogue a déjà été réalisé, dans lequel il suffit simplement de changer Ω en Ω^* .

• Passage $X_g Y_g Z_g$ ($Z_g=K$) à $X_N Y_N Z_N$ ($Z_N=K$) : la rotation d'angle Ω^* autour de K permet ce passage, de matrice associée P_1 .

• Passage $X_N Y_N Z_N$ à $X_N Y_N^* W$: la rotation d'angle i autour de X_N permet ce passage, de matrice associée P_2 .

• Passage $X_N Y_N^* W$ à PQW : la rotation d'angle ω autour de W permet ce passage, de matrice associée P_3 .

Ce qui donne en détail les matrices :

$$P_1(\vec{X}_g \vec{Y}_g \vec{Z}_g \rightarrow \vec{X}_N \vec{Y}_N \vec{K}) = \begin{bmatrix} \cos \Omega^* & -\sin \Omega^* & 0 \\ \sin \Omega^* & \cos \Omega^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1(\Omega^*)$$

$$P_3(\vec{X}_N \vec{Y}_N^* \vec{W} \rightarrow \vec{P} \vec{Q} \vec{W}) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_3(\omega)$$

$$P_2(\vec{X}_N \vec{Y}_N \vec{K} \rightarrow \vec{X}_N \vec{Y}_N^* \vec{W}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} = P_2(i)$$

La matrice de passage cherchée est : $P=P_1(\Omega^*)P_2(i)P_3(\omega)$

2- METHODE DE CALCUL -

Les paramètres orbitaux sont connus $a, e, i, \Omega, \omega, t_p$ ainsi que l'instant t . Nous donnons ci-après l'organigramme de calcul.

1- La donnée de l'instant t permet de calculer la valeur de l'anomalie excentrique de manière unique.

$$t - t_p = a \sqrt{\frac{a}{\mu}} (\varphi - e \sin \varphi)$$

NOTE DE CALCUL : l'équation étant transcendante, une bonne méthode consiste à calculer φ par itération, en partant d'une valeur quelconque φ_0 , et d'utiliser la relation ci dessous :

$$\varphi_{n+1} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) + e \sin \varphi_n$$

La convergence est assurée et assez rapide vers la solution unique.

2- On calcule les coordonnées du satellite dans la base PQW par :

$$\vec{r} = a \left[(\cos \varphi - e) \vec{P} + \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \vec{Q} \right]$$

et donc

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{PQW} = \begin{bmatrix} a(\cos \varphi - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

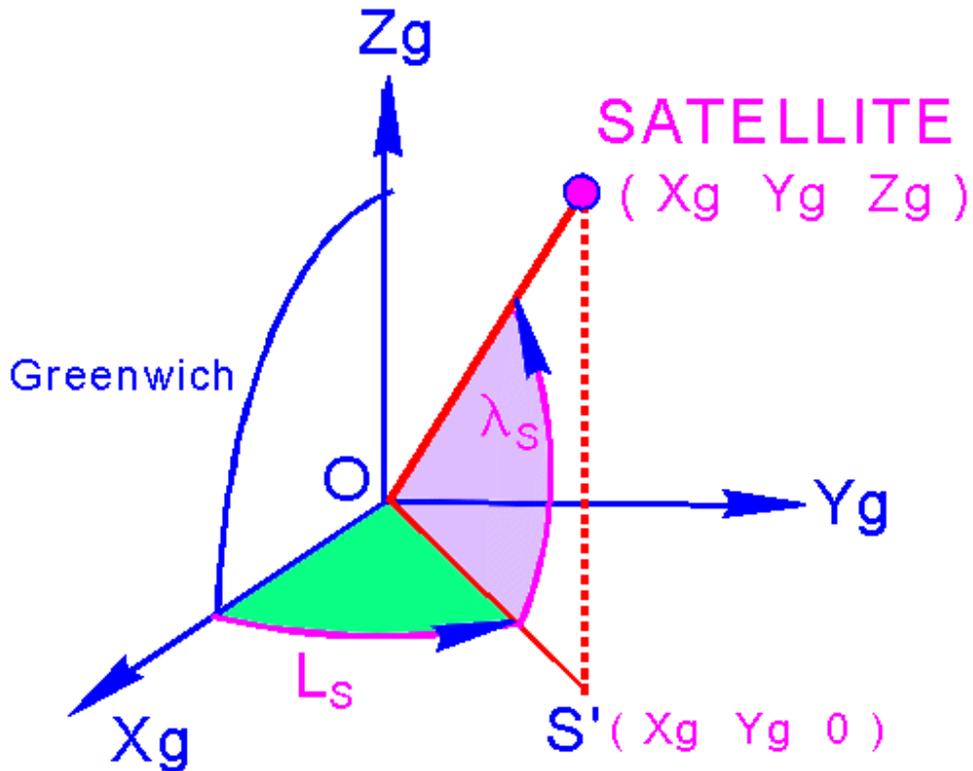
On effectue le changement de base, qui donne les coordonnées dans le repère de Greenwich

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{X_g Y_g Z_g} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{PQW} = P_1(\Omega^*) P_2(i) P_3(\omega) \begin{bmatrix} a(\cos \varphi - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit les coordonnées géographiques L_s et λ_s .

$$L_s = \arctan \frac{Y_g}{X_g} + \frac{\pi}{2} [1 - \text{sgn}(X_g)]$$

$$\lambda_s = \arctan \frac{Z_g}{\sqrt{X_g^2 + Y_g^2}}$$



3- ETUDE DE LA TRACE -

3-1- Formule explicite donnant la latitude -

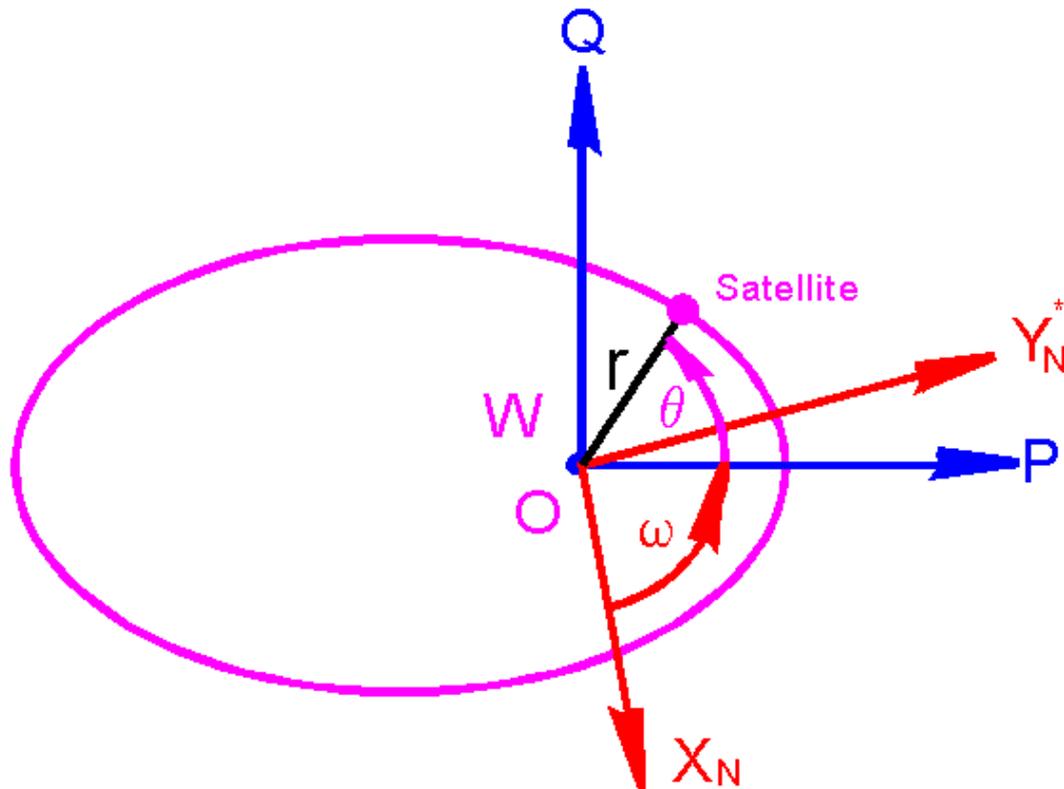
Les calculs précédents sont particulièrement obtus et ne permettent pas d'appréhender la forme de la trajectoire d'un satellite.

Si on revient au repère $X_g Y_g Z_g$, on peut écrire $Z_g = r \sin \lambda_s$, et en revenant à la base $X_N Y_N^* W$, on a aussi la relation

$$\vec{r} = r \cos(\theta + \omega) \vec{X}_N + r \sin(\theta + \omega) \vec{Y}_N$$

La combinaison des 2 relations fournit une relation très importante en pratique

$\sin \lambda_s = \sin i \cdot \sin(\theta + \omega)$	à l'instant initial, $\theta = 0$
---	-----------------------------------



3-2- Exploitation du résultat -

Sur la trajectoire l'anomalie vraie varie de 0 à 2π lors d'une orbite complète. Donc la latitude oscille entre $+i$ et $-i$. En particulier lorsqu'on souhaite pouvoir survoler une latitude donnée, il faut choisir une inclinaison orbitale supérieure ou égale à cette latitude.

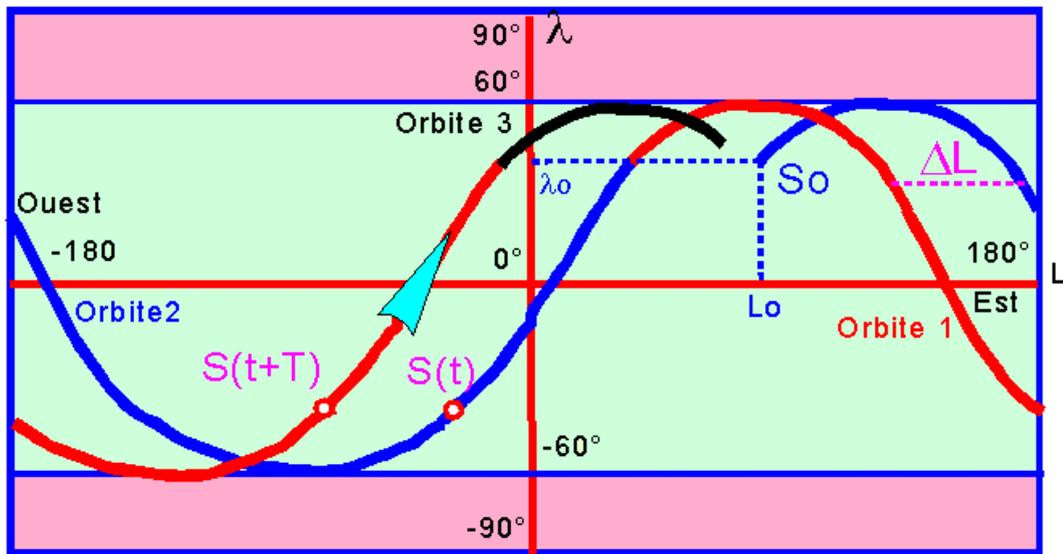
Nous avons déjà vu que lors du lancement la latitude de l'injection et l'azimut du tir définissaient complètement l'inclinaison orbitale par $\cos i = \cos \lambda_0 \sin \beta_0$

On peut donc en déduire qu'avec une inclinaison orbitale élevée, il faudra ou injecter à une latitude élevée en profitant de la rotation terrestre dégradée à une latitude forte, ou garder une latitude moyenne et choisir un azimut proche de 0 , empêchant donc de profiter pleinement de la rotation terrestre. Dans les 2 cas le tir est pénalisé. La recherche d'une inclinaison orbitale élevée est pénalisante en masse utile.

Pour les orbites basses faiblement excentriques, on peut donner l'allure d'une trace correspondant à une période.

En effet, sur orbite basse quasi-circulaire la vitesse angulaire satellite est environ 15 fois celle de la Terre. Donc le satellite se déplace rapidement et en continu vers l'Est, de plus il oscille en latitude entre +i et -i. La combinaison des deux mouvements va donner à la trace, la forme approximative d'une sinusoïde.

La trace a donc l'allure ci-dessous, pour un satellite injecté à $L_0=20^\circ$, $\lambda_0=45^\circ$, $\beta_0=45^\circ$, sur une orbite circulaire type navette US à 280 km du sol terrestre. L'inclinaison orbitale est $i = 60^\circ$, la période $T= 1 \text{ h } 30 \text{ mn } 7 \text{ s}$.



On remarque alors très simplement que la trace de l' orbite i+1 se déduit de celle de l'orbite i par une translation vers l'Ouest de ΔL donnée par :

$$\Delta L = \omega_s T_s = \frac{2\pi^2}{86164} T_s = \frac{4\pi^2}{86164} a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

3-3- Notion de phasage en képlérien -

En pratique certaines applications, notamment en surveillance militaire ou en imagerie spatiale, nécessitent que la trace se referme au bout d'un certain temps, de manière à survoler à nouveau le même lieu géographique de la Terre.

Cette propriété s'appelle PHASAGE DE L'ORBITE. Le temps séparant 2 survols consécutifs d'un même lieu s'appelle PERIODE DE REPETITIVITE T_R .

En hypothèse képlérienne, T_R est un nombre entier n de période satellite T_S et $n_{\Delta L}$ est congru à $0(2\pi)$. Si T_T désigne la période sidérale de la Terre, le phasage se traduit par :

$$n_{\Delta L} = n\omega_T T_S = 2k\pi \Rightarrow nT_S = k \frac{2\pi}{\omega_T} = kT_T$$

$\text{PHASAGE KEPLERIEN} \Leftrightarrow \exists k, n \in \mathbb{N} \quad \frac{T_S}{T_T} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$

3-3- Phasage non képlérien -

En présence de perturbations, ce qui est le cas réel, les paramètres orbitaux ont des dérivées séculaires. En particulier Ω et i varient, entraînant un mouvement Est-Ouest et Nord-Sud du plan orbital. La notion de phasage devient plus difficile. On convient de la définir à l'équateur au nœud ascendant.

T_N désignera la période nodale, temps séparant 2 passages consécutifs au nœud ascendant. T_N est très légèrement différente de T_S à cause des perturbations.

Par rapport au cas képlérien où le plan orbital est fixe, ici le plan orbital dérive autour de l'axe nord-sud, à une vitesse qui est la dérivée moyenne d' Ω . Tout se passe comme si on changeait de vitesse angulaire ω_T .

$$[\omega_T \rightarrow \omega_T - \dot{\Omega}] \Rightarrow \Delta L = (\omega_T - \dot{\Omega})T_N$$

PHASAGE NON KEPLERIEN

⇕

$$\exists k, n \in \mathbb{N} \quad n(\omega_T - \dot{\Omega})T_N = 2k\pi$$

REMARQUE : Si on ne tient compte que de la perturbation due à la non sphéricité de la Terre (perturbation due à J_2), et si on recherche l'héliosynchronisme, c'est à dire un choix de a et i de telle manière que la ligne des nœuds dérive exactement à la vitesse angulaire moyenne du soleil autour de la Terre, alors la quantité ci-dessous vaut 1 jour de 24 h.

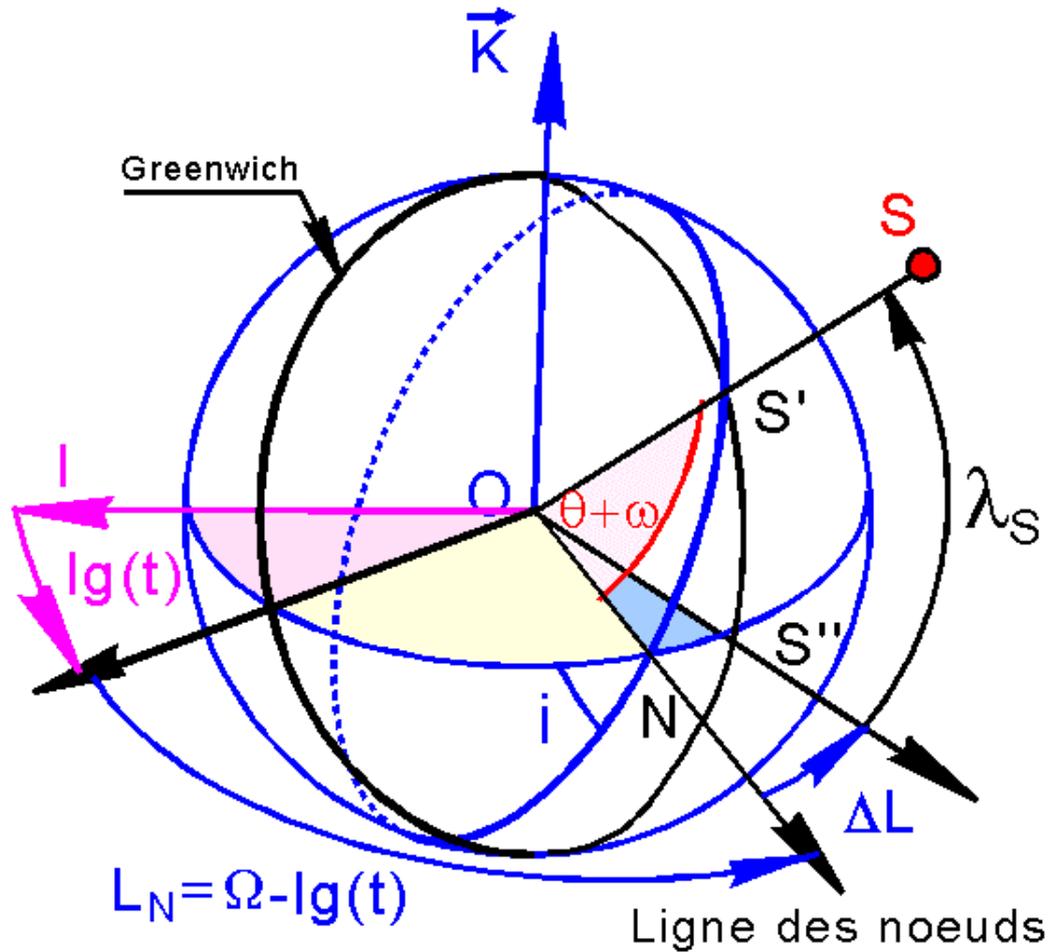
$$\dot{\Omega} = \omega(S/T) \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_T - \dot{\Omega}} = 86400s = 1 \text{ jour}$$

$$\text{Phasage} \Leftrightarrow \exists k, n \in \mathbb{N} \quad T_R = nT_N = k \text{ jours}$$

T_R est la période de répétitivité, un nombre entier de jours. C'est le cas de SPOT et d'HELIOS.

4- VARIANTE POUR LE CALCUL DE LA TRACE -

Nous exploitons ici les résultats de trigonométrie sphérique, qui vont permettre d'appréhender un peu mieux le calcul des points survolés par un satellite.



L'application des relations de trigonométrie sphérique dans le triangle rectangle S''NS' (~ABC), donne :

$$\begin{bmatrix} \sin c = \sin a \sin C \\ \cos B = \sin C \cos b \end{bmatrix} \Rightarrow \sin c = \frac{\sin a \cos B}{\cos b}$$

Moyennant les correspondances angulaires ci-dessous, on obtient :

$$\begin{bmatrix} B = i & a = \theta + \omega \\ b = \lambda_s & c = \Delta L \end{bmatrix} \Rightarrow \sin \Delta L = \frac{\sin(\theta + \omega) \cos i}{\cos \lambda_s}$$

Il est clair que l'inversion qui conduit à ΔL ne pose pas de problème si $\theta + \omega$ est entre -90° et $+90^\circ$, mais peut poser problème dans le cas contraire. Il faut alors remarquer que le dessin doit être regardé depuis le nœud descendant. Le lecteur vérifiera alors l'affirmation suivante :

$$\Delta L = \left[\begin{array}{l} \text{Arc sin} \left(\frac{\sin(\theta + \omega) \cos i}{\cos \lambda_s} \right) \Leftrightarrow \cos(\theta + \omega) > 0 \\ 180^\circ - \text{Arc sin} \left(\frac{\sin(\theta + \omega) \cos i}{\cos \lambda_s} \right) \Leftrightarrow \cos(\theta + \omega) < 0 \end{array} \right]$$

$$L_s = \Omega - L_g(t) + \Delta L$$

$$\lambda_s = \text{Arc sin}[\sin i \sin(\theta + \omega)]$$

Chapitre 8-

CHANGEMENT D'ORBITES -

1- GENERALITES -

Ce chapitre est destiné à l'étude générale des manœuvres en orbite, soit :

IMPORTANTES, DEMANDANT UN INCREMENT DE VITESSE ELEVE :

- Manœuvre d'apogée pour passer d'une orbite GTO à une orbite géostationnaire.
- Correction d'inclinaison orbitale.
- Changement de programme d'une sonde spatiale, par exemple déroutement vers une comète nouvelle.
- Manœuvre de déorbitation pour un retour sur Terre, à partir d'une station orbitale.
- Injection sur une orbite d'évasion hyperbolique préparant un voyage interplanétaire.

IMPULSIONNELLES, DE MAINTENANCE D'UN SATELLITE EN ORBITE

- Corrections minimales de paramètres orbitaux.
- Recalage de temps orbital.
- Ajustement d'une heure d'arrivée sur une planète.

La réalité physique d'une manœuvre impose une certaine durée et donc un déplacement pendant la manœuvre. Sans approximation, il est impossible "à la main" de calculer les détails de l'opération. L'expérience montre, qu'avec une excellente approximation, on peut considérer que les positions en début et en fin de manœuvre, peuvent être considérées comme identiques.

$$\vec{r}_1 \cong \vec{r}_2 \quad \Delta\vec{V} = |\vec{V}_2 - \vec{V}_1|$$

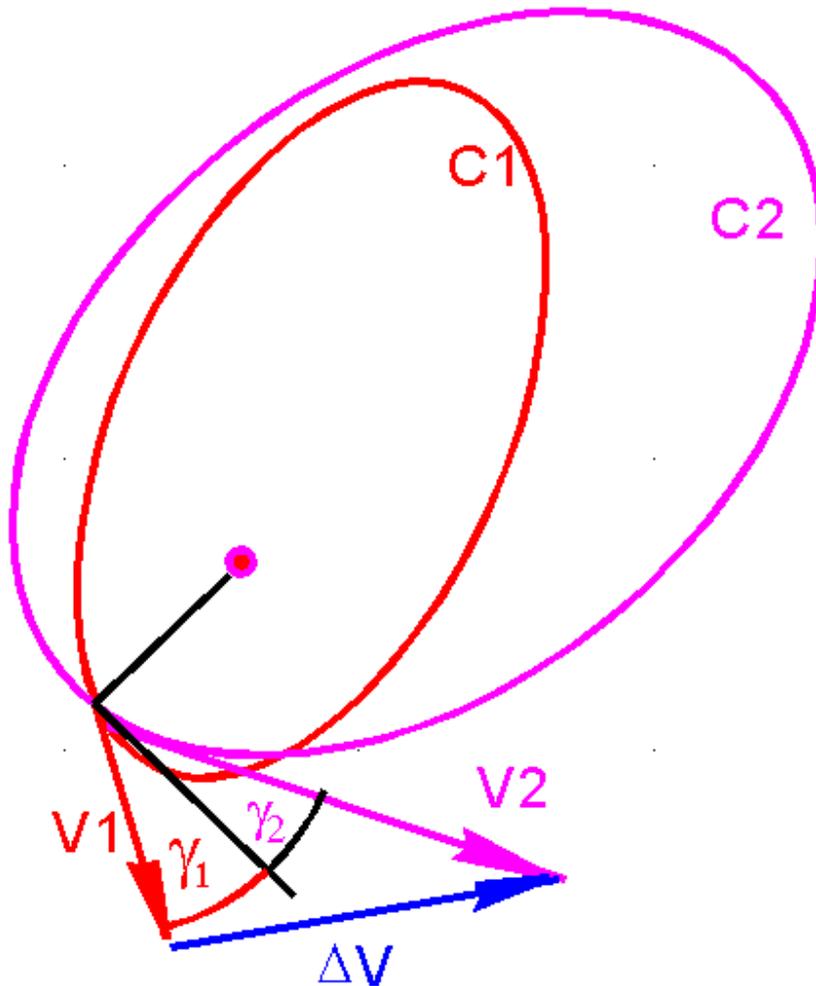
On conviendra que *le satellite repasse toujours par le point de la manœuvre.*

1-1- Données -

Afin de bien poser le problème, il faut fixer le cadre de l'étude.

- L'orbite initiale C1, est connue par ses paramètres orbitaux $a_1, e_1, i_1, \omega_1, \Omega_1, t_{p1}$.
- L'orbite après correction C2, est connue par ses paramètres orbitaux $a_2, e_2, i_2, \omega_2, \Omega_2, t_{p2}$.
- La position de la manœuvre est choisie, après étude précise.

1-2- Figure de manœuvre –



1-3- Calcul des éléments de la manœuvre –

La connaissance des paramètres orbitaux et de la position commune aux deux ellipses permet le calcul des vecteurs vitesses \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , par les relations ci-après, adaptées naturellement à chaque orbite C1 ou C2

$$\vec{r} = a(\cos \varphi - e)\vec{P} + a\sqrt{1-e^2} \sin \varphi \vec{Q} = a \left[(\cos \varphi - e)\vec{P} + \sqrt{1-e^2} \sin \varphi \vec{Q} \right]$$

$$\vec{V} = \left[-a \sin \varphi \vec{P} + a\sqrt{1-e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right] \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[-\sin \varphi \vec{P} + \sqrt{1-e^2} \cos \varphi \vec{Q} \right]$$

Les composantes des vecteurs P et Q étant accessibles, par des relations déjà vues.

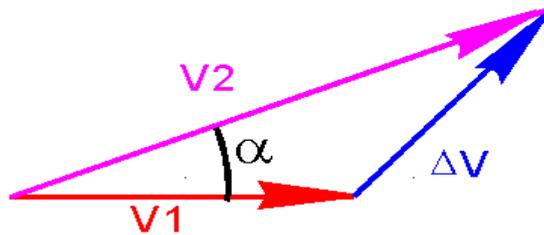
$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = \vec{P} \wedge \vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \Omega \sin i \\ \cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}$$

On obtient alors les composantes des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans le repère inertiel.

Le calcul s'achève alors par celui de l'incrément de vitesse ΔV nécessaire, caractérisé par sa norme, qui en pratique doit être la plus petite possible et une direction, celle que la poussée du moteur devra adopter dans l'espace.

Le schéma ci-dessous donne ΔV .



CAS PARTICULIER COURANT : Pour des trajectoires coplanaires, les calculs ne nécessitent pas le passage par les composantes inertielles.

La norme d'une vitesse se calcule par l'énergie

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{2a}$$

On obtient ainsi V_1 et V_2 au point commun. La pente γ apparaît dans la loi des aires :

$$K = r^2 \dot{\theta} = Vr \cos \gamma = V_0 r_p \cos \gamma_0$$

$$K = V_a r_a = V_p r_p = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

Suivant les cas, α vaut : $\alpha = |\pm \gamma_2 \pm \gamma_1|$

Le calcul s'achève alors classiquement en résolvant le triangle des vitesses, ce qui fournit la norme de l'incrément ΔV de vitesse et éventuellement l'orientation de l'axe de la poussée.

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \alpha}$$

2- EXEMPLES DE MANŒUVRES -

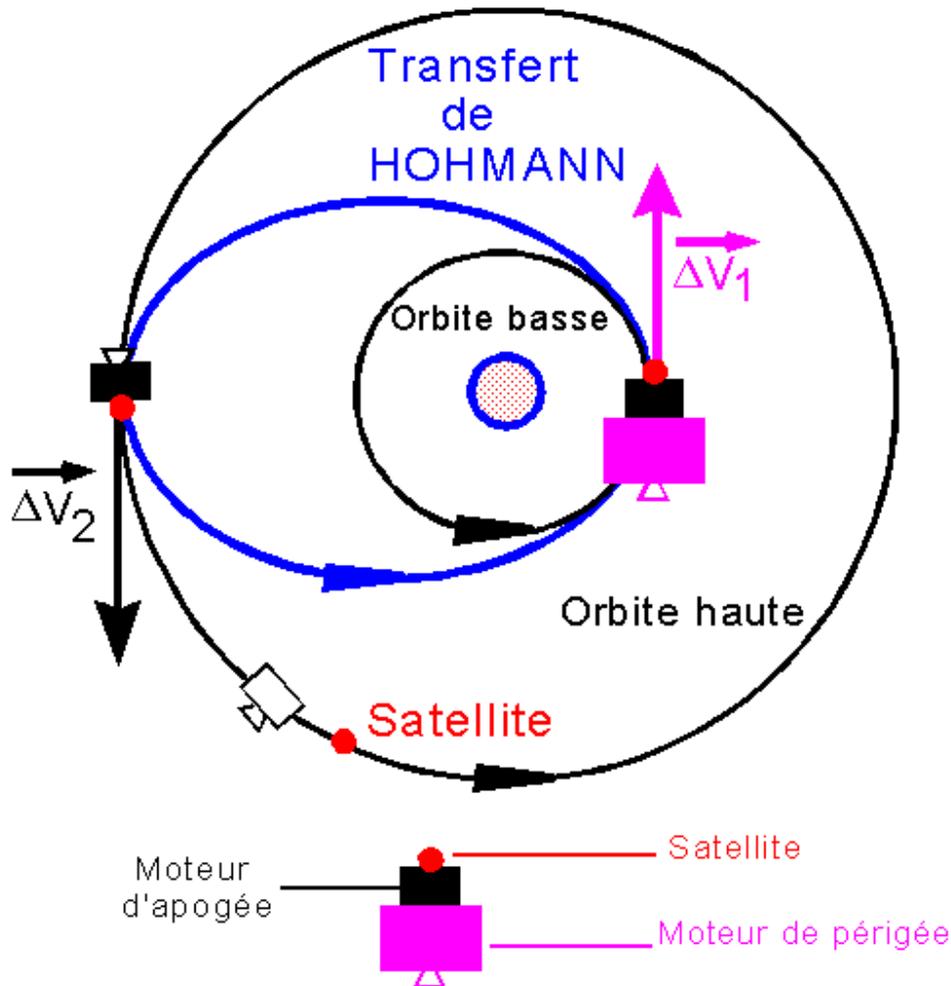
Nous ne pouvons passer en revue toutes les manœuvres, mais en indiquons de classiques.

2-1- Transfert de HOHMANN -

Le problème se pose souvent, soit pour des orbites terrestres, soit pour des trajectoires héliocentriques : *Comment transférer un engin initialement sur orbite circulaire basse (haute) sur une orbite circulaire haute(basse) coplanaire à la précédente ?*

HOHMANN a répondu à la question, en indiquant que la manœuvre la plus économique :

- Utilisait une orbite de transfert dite de HOHMANN, bitangente aux deux orbites de départ et d'arrivée.
- Nécessitait deux incréments de vitesse ΔV_1 et ΔV_2 , à délivrer au périégée et à l'apogée de ce transfert.



La figure suivante illustre la procédure, qui nécessite deux moteurs et deux allumages. C'est ce qui fait la différence entre un vol Ariane, où la manœuvre de périgée disparaît, réalisée dans la phase propulsée par l'étage 3, et une mise en orbite par la navette américaine, avec une orbite d'attente circulaire basse qui demande la double motorisation.

NB : Ce type de transfert est encore couramment utilisé lors de tirs interplanétaires, où l'orbite de départ est celle de la Terre, et celle d'arrivée sensiblement l'orbite quasi circulaire décrite par la planète cible.

2-2- Correction d'apogée (périgée) -

Un tir présente toujours des dispersions et des ajustements minimes d'orbite sont nécessaires. Nous nous plaçons dans cette hypothèse d'une manœuvre quasi impulsionnelle de faible incrément ΔV . On ne souhaite pas modifier la position du périgée, donc la

manœuvre a lieu en ce point. Comme $a = r_p + r_a$, et r_p constant, nous avons $\Delta r_a = 2\Delta a$, l'équation de l'énergie fournit :

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \Delta r_a = \frac{4a^2 V_p}{\mu} \Delta V_p$$

On notera qu'une manœuvre du même type réalisée à l'apogée, permet de rectifier le périégée moyennant la relation :

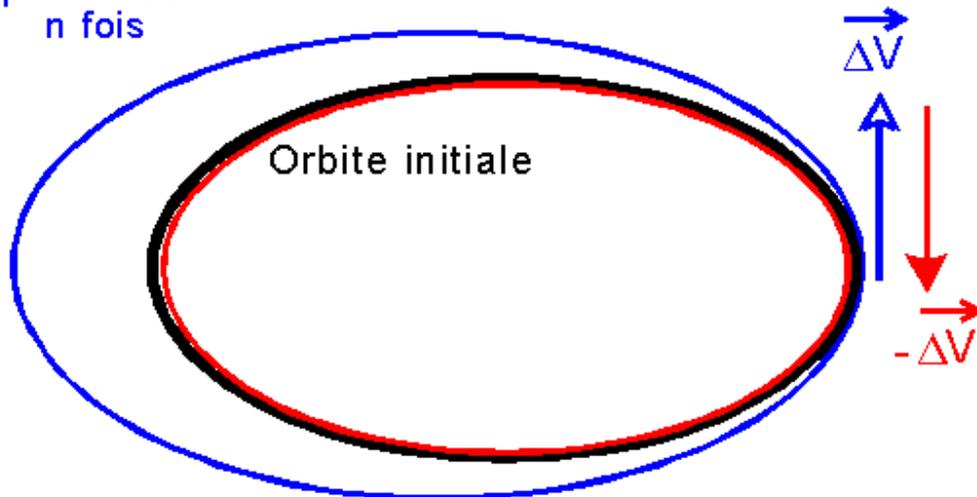
$$\Delta r_p = \frac{4a^2 V_a}{\mu} \Delta V_a$$

On peut également vérifier que pour une même modification de a ou d'une altitude apogée ou périégée, le coût est minimal avec une manœuvre au périégée.

2-3- Correction du phasage -

Là encore on supposera que l'erreur de date (écart de phasage), est petite, nous permettant de travailler en calcul différentiel. L'idée est d'utiliser une orbite de dérive voisine de l'orbite initiale, parcourue n fois (n à choisir en fonction de critères économiques), telle que les n décalages de période compensent l'écart Δt initial.

Orbite de dérive
parcourue
 n fois



La correction totale demande un retour à l'orbite initiale, donc avec deux incréments de vitesse opposés, ainsi on obtient le coût total en s'appuyant sur des différentielles de relations simples comme :

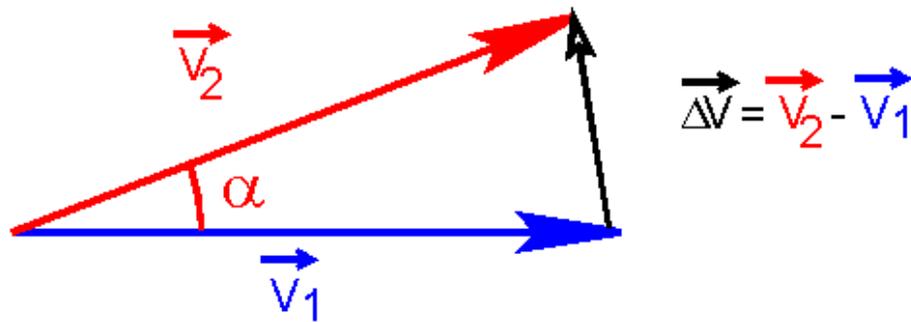
$$\frac{T^2}{a^3} = cste \quad E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\Delta V = 2\Delta V_p = \frac{2}{3} \frac{\mu}{aTV_p} \frac{\Delta t}{n}$$

Ce type de correction couplé est classique pour ramener un géostationnaire dans sa fenêtre de positionnement, puisqu'un décalage en longitude équivaut à un décalage horaire.

2-4- Correction d'inclinaison -

C'est certainement la correction qui donne le plus de soucis, dans la maintenance d'un satellite. La lune et le soleil, en particulier, provoquent une dérive nord-sud du plan orbital, avec variation annuelle de l'ordre de 1°/an. Corriger l'inclinaison est équivalent à faire tourner un vecteur vitesse, en pratique sans variation de norme.



$$\Delta V = |\Delta \vec{V}| = 2V_1 \sin \frac{\alpha}{2}$$

REMARQUE : On comprend alors facilement que, pour un satellite en orbite basse terrestre, où la vitesse avoisine 8 km/s, une correction de 1° coûte environ 140 m/s.

Pire dans les trajectoires héliocentriques, on peut avoir des vitesses de 20 à 30 km/s sinon plus. Ainsi pour $V=30$ km/s une correction d'inclinaison orbitale coûterait 523 m/s.

Supposons donc que l'on veuille uniquement corriger l'inclinaison orbitale sans changement des autres paramètres orbitaux.

- La correction doit obligatoirement être réalisée à un des nœuds de l'orbite.
- Le vecteur vitesse doit tourner, sans changer de norme afin de ne pas altérer le demi grand axe. Il faut donc choisir le nœud le plus élevé en altitude ce qui minimise la vitesse et garde l'énergie spécifique E constante.
- Autre conséquence de la rotation, qui ne peut se faire qu'en conservant l'excentricité, la constante des aires K doit rester invariante :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EK^2}{\mu^2}}$$

Donc la vitesse orthoradiale se conserve. Elle vaut $V \cos \gamma$, et elle doit tourner de Δi .

- La correction nécessite donc:

$$\Delta V = V \cos \gamma \sin \frac{\Delta i}{2} = 2 \frac{K}{r} \sin \frac{\Delta i}{2} = 2 \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{r} \sin \frac{\Delta i}{2}$$

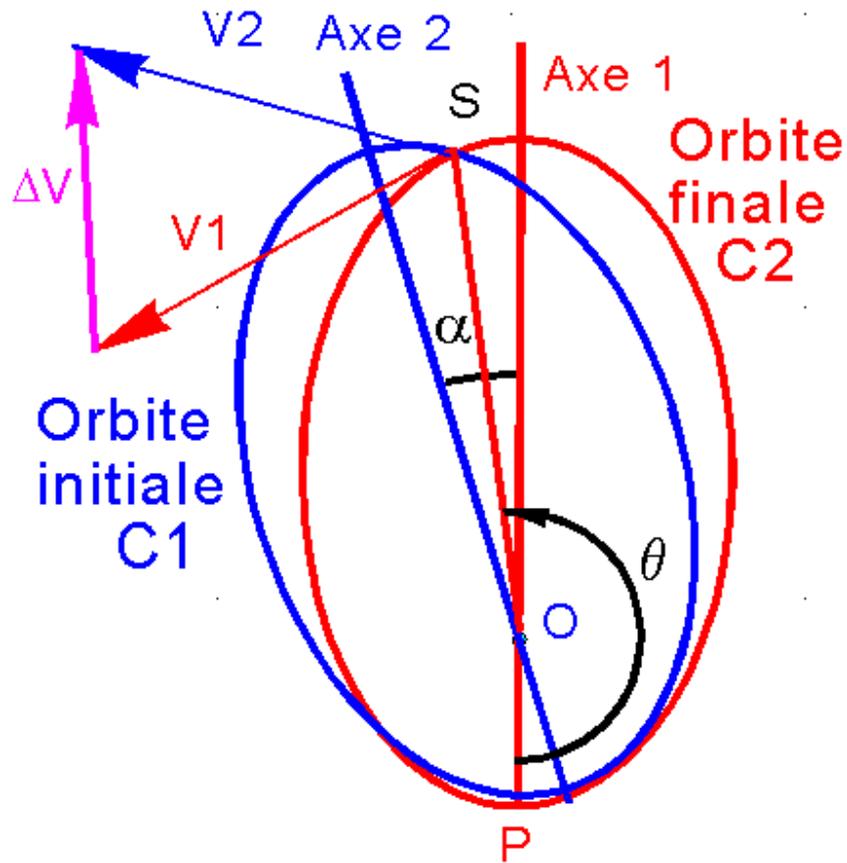
2-5- Réorientation du grand axe -

Ce cas correspond à une correction de ω argument nodal du périhélie, sans modification des autres paramètres orbitaux.

On souhaite faire pivoter le grand axe d'une orbite C_1 , d'un angle orienté α , pour l'amener dans une configuration 2, et ceci sans modification de la forme de l'ellipse.

S est le point commun aux deux orbites, donc le point de manœuvre. La géométrie impose que la droite OS est axe de symétrie des deux C_1 et C_2 :

- Le demi-grand axe étant inchangé, E est inchangée et donc la norme V de la vitesse est la même.



- L'excentricité demeurant inchangée, la constante des aires reste la même. Donc la vitesse orthoradiale $V \cos \gamma$ est inchangée. Force est donc de conclure que la vitesse radiale est algébriquement la même et que seule la pente est inversée.
- Ainsi nous obtenons ci-dessous la position angulaire θ du point de manœuvre S sur l'orbite C_1 et la valeur ΔV de la manœuvre en fonction de α .

$$\left[\begin{array}{l} \Delta V = -2V \sin \gamma = -2e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \theta \\ \theta = \pi + \frac{\alpha}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta V = 2e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \theta = \pi + \frac{\alpha}{2} \end{array} \right]$$

Chapitre 9-

ETUDE DE L'ORBITE GEOSTATIONNAIRE

Cette partie concerne une application très importante, celle des satellites géostationnaires avec :

- La caractérisation de l'orbite dite géostationnaire et son intérêt.
- Le lancement GTO.
- Quelques éléments de la mise à poste.
- Les perturbations qui affectent le satellite.
- Le principe de la maintenance à poste.

1- ORBITE GEOSTATIONNAIRE -

Les télécommunications ont envahi notre monde moderne, et la nécessité de disposer de satellites fixes par rapport à la Terre, s'est rapidement imposée. En effet, un tel satellite joue le rôle de relais de transmission ou d'un œil pour la surveillance globale de la Terre. Nous allons vérifier que ce type d'application est possible.

1-1- Orbite géosynchrone -

On appelle ainsi une orbite de période identique à celle de la Terre, soit $T=23$ h 56 mn 4.1 s = 86164.1 s. En hypothèse képlérienne, le demi-grand axe est donné par :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \Rightarrow a_g = \left(\frac{\mu T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42164,16 \text{ km}$$

Une telle orbite possède la propriété de survoler un même lieu géographique, à chaque période, puisque la Terre et le satellite auront tous les deux effectué un tour complet et retrouvé la même position par rapport aux étoiles, mais avec l'inconvénient de ne pas rester à la verticale d'aucun point de la Terre.

1-2- Orbite géostationnaire képlérienne -

Si on impose en plus à ce satellite de rester fixe par rapport à un point de la Terre, alors :

- Ce point ne peut être que sur l'équateur, sinon le satellite serait à la fois au nord et au sud de l'équateur.
- L'orbite est nécessairement équatoriale.
- L'orbite est obligatoirement circulaire pour éviter une oscillation Est-Ouest.

Il n'existe donc qu'une seule orbite satisfaisant à ces critères :

Orbite circulaire équatoriale de rayon $R_g = 42164.16$ km en képlérien.

REMARQUE : Classiquement, on rencontrera dans la littérature, qu'un tel satellite gravite à 36000 km du sol. C'est en réalité la valeur arrondie correspond à une altitude réelle képlérienne de 35786.16 km.

1-3- Orbite géostationnaire réelle -

Nous savons que la Terre est en première approximation assimilable à un ellipsoïde. Le renflement équatorial terrestre crée donc un supplément d'attraction qui accélère la vitesse. Pour que le satellite retrouve la bonne vitesse angulaire ou linéaire, donnant la période sidérale, il faut le placer un peu plus haut. Le calcul, que vous trouverez dans les exercices, donne une ALTITUDE GEOSTATIONNAIRE VRAIE DE 42164.68 KM, en ne prenant pas en compte les autres perturbations.

1-4- Intérêt de l'orbite géostationnaire réelle -

On comprend aisément que trois satellites disposés à 120° sur l'orbite géostationnaire, permettent "de voir" quasiment toute la Terre, à part une petite zone polaire située aux extrêmes.

En utilisant deux satellites on peut communiquer d'un point quelconque de la Terre à un autre sans problème.

Seules les latitudes au-dessus de 81° environ ne sont pas accessibles.

2- POINT DE STATIONNEMENT -

Un satellite en orbite géostationnaire est caractérisé par sa LONGITUDE DE STATIONNEMENT = L_S . Cette donnée est capitale pour la réception des émissions par une antenne satellite, car elle conditionne l'orientation en azimut et en déclinaison locale de l'axe de l'antenne.

La longitude de stationnement est surveillée à 0.1° près.

Exemples pour les satellites européens : Actuellement en 1998, les principaux satellites utilisés en France sont :

- ASTRA à $19^\circ.2$ EST
- EUTELSAT II-F3 à 16° EST
- EUTELSAT II-F1 et HOT BIRD 1 -> 3 à 13° EST
- TELECOM 2B/2D à 5° OUEST
- TELECOM 2A à 8° OUEST

2-1- Calcul de l'orientation de l'antenne -

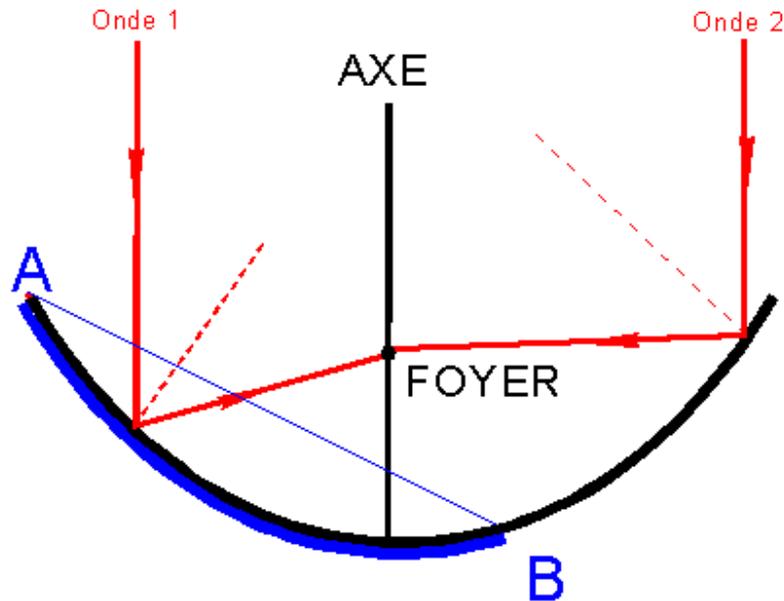
La réception correcte d'une émission satellite consiste à orienter l'axe de la parabole de réception vers le satellite. Ce qui demande la connaissance de :

- La longitude de stationnement L_S .
- Les coordonnées géographiques longitude L et latitude λ du lieu de réception.

On peut alors calculer par des considérations géométriques simples, dans le repère géographique local : l'azimut géographique A_z mesuré positivement vers l'Est et l'élévation E_l , qui est l'inclinaison sur le plan horizontal local de l'axe de l'antenne.

2-2- A propos de l'antenne -

Peut être avez-vous oublié la propriété géométrique d'un miroir parabolique : celle de réfléchir tous les rayons lumineux, parallèles à l'axe de la parabole, vers un point remarquable qu'on appelle le foyer. Cette propriété est utilisée dans les télescopes pour concentrer soit des rayons lumineux, soit des ondes de nature diverse.



Naturellement la tête de réception est placée au foyer. Pour éviter en pratique qu'elle ne fasse ombre sur le miroir, on "taille" la parabole de manière non symétrique de façon à placer la tête réceptrice hors du faisceau des ondes. C'est donc la partie bleue AB qui est montée comme antenne, ce qui a comme autre avantage de donner l'illusion que l'axe antenne est moins incliné, en général on gagne 25° d'inclinaison.

3- LANCEMENT GEOSTATIONNAIRE -

Nous allons voir que rejoindre le point de stationnement n'est pas une affaire simple. Il n'est pas question ici, de détailler à l'extrême toutes les opérations, mais simplement de sensibiliser le lecteur aux principales étapes simplifiées pour une meilleure compréhension.

3-1- Base de lancement équatoriale -

C'est le cas idéal, pour diverses raisons évidentes :

- L'orbite géostationnaire est équatoriale, donc un départ coplanaire à cette orbite évite les corrections d'inclinaison orbitale.
- Le gain de vitesse dû à la rotation terrestre est maximal dans le plan équatorial, pour un tir vers l'EST. La base de KOUROU avec une latitude de 5° est de ce point de vue excellente.

- On peut éviter une mise en orbite d'attente quasi circulaire et injecter la charge utile directement en orbite GTO (GEOSTATIONARY TRANSFER ORBIT)
- Cette procédure qui consiste à "grimper" jusqu'au niveau géostationnaire, présente l'avantage de n'utiliser qu'un seul moteur pour une correction d'apogée, alors qu'un parking intermédiaire demande deux incréments de vitesse et donc deux allumages de moteurs différents, car ces incréments ne sont pas négligeables.

REMARQUES : Un tir effectué par le Lanceur Ariane, qui effectue une injection directe sur l'orbite GTO, ne demandera au satellite qu'un seul moteur d'apogée. Par contre, la navette américaine réalise une mise en orbite de "parking" vers 280 km du sol, et impose donc à la charge utile ainsi satellisée d'être pourvue de 2 moteurs :

- Un moteur d'apogée qui placera le satellite sur l'orbite GTO.
- Un moteur d'apogée qui réalisera les mises en orbite de dérive et la mise à poste définitive.

La manœuvre est donc plus délicate et moins sûre, puisque demandant un allumage moteur supplémentaire.

3-2- ORBITE GTO -

Détaillons ces calculs élémentaires, donnant des ordres de grandeur, reposant sur un transfert de type HOHMANN, entre une injection au périégée bas, vers 200 km du sol et une position haute, vers 42164 km du centre de la Terre.

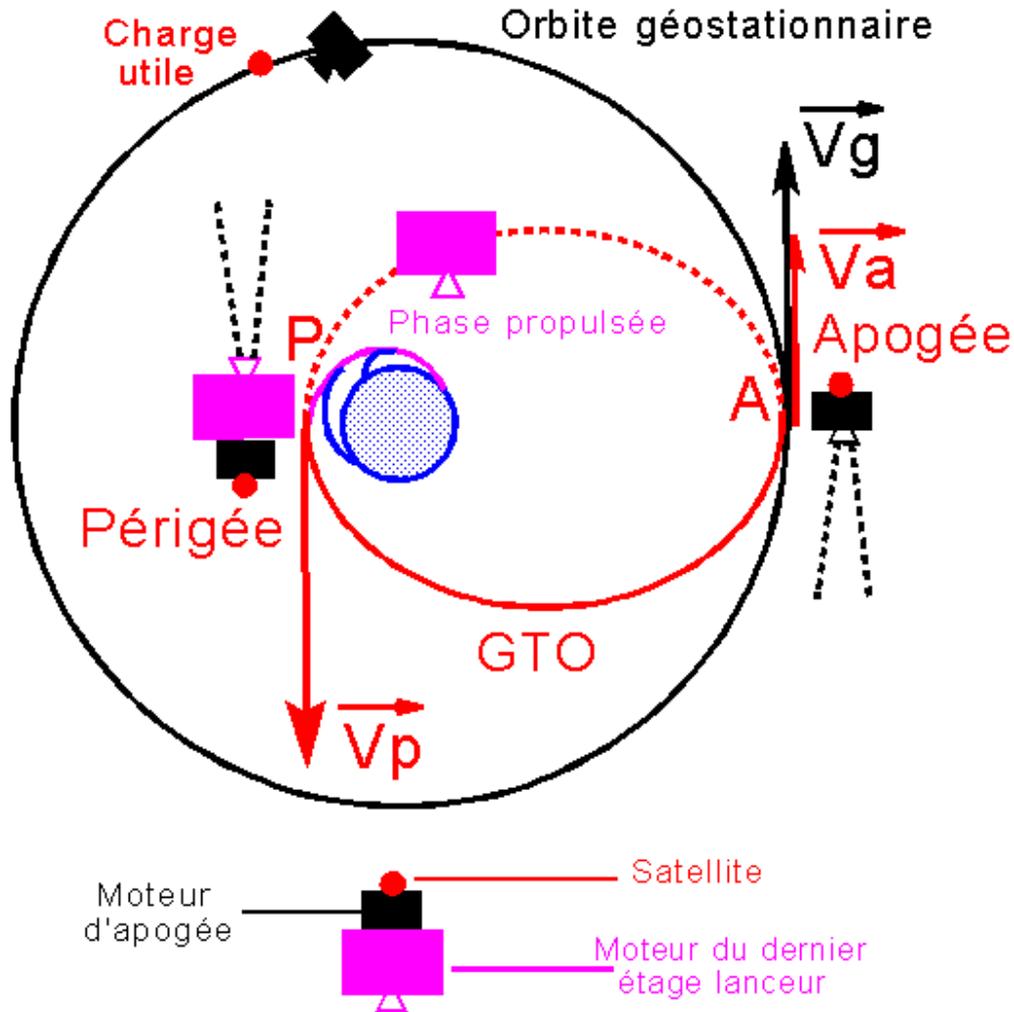
Le lancement consiste, grâce à une phase propulsée, utilisant en pratique trois étages d'un lanceur, à injecter au périégée P d'une orbite GTO une masse qui comprend : Le moteur du dernier étage (en rose) accompagné d'un moteur inutilisé (en noir) et de la charge utile proprement dite (le point rouge).

Cet ensemble est satellisé à une vitesse V_p que l'on calcule sur l'orbite GTO :

$$2a = 42164 + 6378 + 200 = 48742 \text{ km}$$

$$E = -\frac{\mu_T}{2a} = -8.17778 \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu_T}{r_p}$$

$$r = 6578 \text{ km} \Rightarrow V_p = 10,239 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$



Si l'on se souvient que la première vitesse cosmique pour rester en circulaire est de 7.784 km/s à 200 km du sol, on réalise que la vitesse $V_p=10.240$ km/s est un exploit, ce qui explique que l'on ait attendu avant de lancer des géostationnaires.

Nous sommes maintenant sur l'orbite GTO, pour laquelle le lecteur se convaincra, en calculant la période qu'on parvient à l'apogée après 5 h 15 mn 32 s de vol. Cette phase de montée a permis d'affiner les paramètres de l'orbite GTO, de définir l'orientation précise de la poussée d'apogée, d'orienter le moteur d'apogée après s'être débarrassé du troisième étage lanceur. Celui-ci va rester sur l'orbite GTO un certain temps, pendant lequel la traînée au périgée usera l'orbite, le satellite spiralant sur une trajectoire de moins en moins excentrique, jusqu'à ce que, le périgée descendant, une rentrée atmosphérique se produise. L'ensemble finit alors par brûler complètement dans l'atmosphère.

3-3- Manœuvres de mise à poste -

Il ne faut pas perdre de vue, que le but est de placer à une longitude imposée, un satellite qui doit rester fixe par rapport à la Terre.

De toute évidence, comme le satellite repasse toujours par le lieu où une correction de trajectoire est réalisée, lorsque le géostationnaire est à poste, obligatoirement la dernière correction a lieu à cet endroit. Toutes les orbites ont en commun la propriété d'avoir le grand axe comme ligne des nœuds, de manière à avoir l'apogée sur l'équateur terrestre. Ainsi en général l'argument nodal ω du périégée vaut $\omega=180^\circ$, c'est le cas des lancements Ariane.

Il faut donc qu'une orbite intermédiaire passe à l'apogée par le point de stationnement. Il n'y a pratiquement aucune chance pour que l'apogée de l'orbite GTO passe par le stationnement, même après plusieurs orbites GTO consécutives. En effet, depuis Kourou, le périégée est toujours au même endroit sur l'équateur, parce que la phase propulsée est verrouillée. Le temps de montée (demi-période) est également toujours le même, donc le premier apogée est sensiblement toujours au même endroit par rapport à la Terre, et cette position n'a aucune raison d'être le stationnement.

Nous donnons dans la suite une procédure de principe idéale.

a- Orbites GTO primaires -

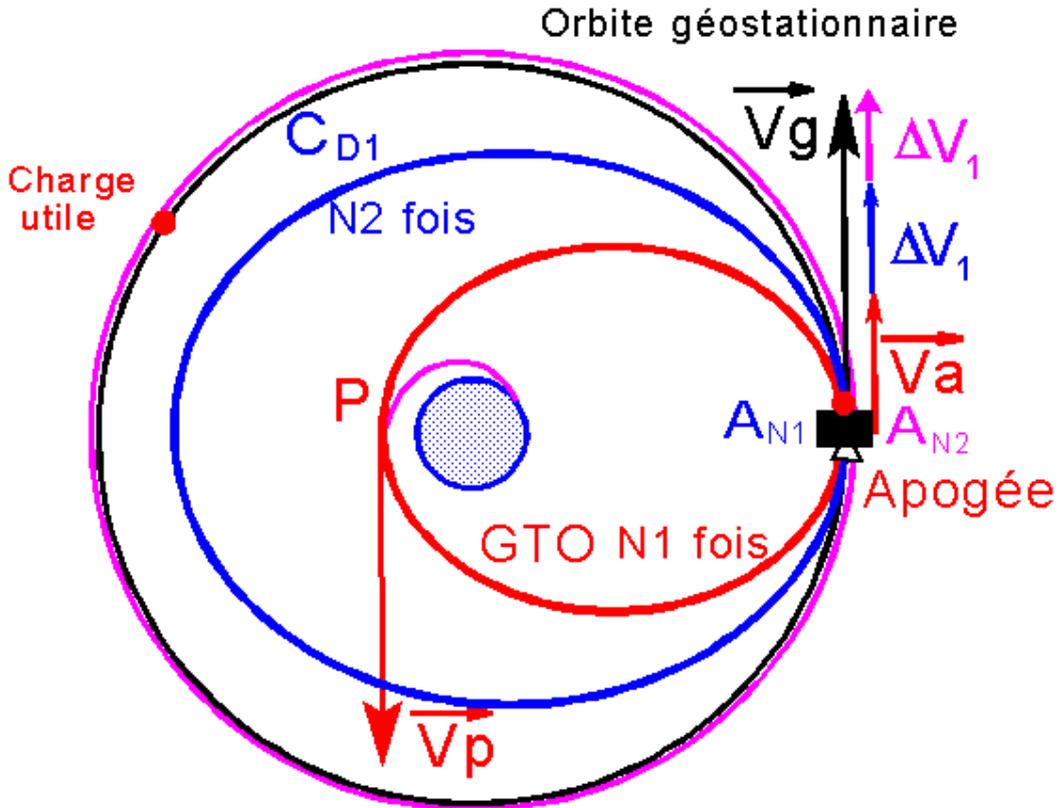
En pratique, on laisse parcourir un certain nombre N_1 de fois, pas plus de 10, l'orbite GTO, jusqu'à UN APOGEE PROCHE DU STATIONNEMENT=. Un écart $\Delta L=L_s-L_a$ entre le stationnement et l'apogée existe, de quelques degrés.

b- Orbites de dérives -

Le principe est maintenant de passer sur une orbite très proche de l'orbite géostationnaire, telle que parcourue N_2 fois, le dernier apogée soit exactement au point de stationnement. Un incrément de vitesse ΔV_1 est nécessaire.

Cette orbite de dérive C_{D1} est donc ajustée avec le plus grand soin.

REMARQUE : Les corrections ne pouvant pas être parfaites, on conçoit qu'en réalité, il faille des orbites de dérive plus nombreuses, permettant de réduire avec précision l'écart en longitude.



c- Manœuvre de circularisation -

Une ultime manœuvre dite de circularisation, permet à l'apogée, grâce à un nouvel incrément de vitesse ΔV_2 , de fixer définitivement le satellite sur son poste. La mise à poste est achevée. Commencera maintenant la maintenance à poste.

d- Coût en vitesse -

Dans ce cas simple, la motorisation devra en tout délivrer un incrément total de vitesse ΔV donné par :

$$\Delta V = V_p + \Delta V_1 + \Delta V_2 = V_p + V_g - V_a$$

$$\Delta V = V_p \left(1 - \frac{r_p}{r_a} \right) + V_g = 10,24 \left(1 - \frac{6578}{42164} \right) + \sqrt{\frac{39,86 \cdot 10^4}{42164}}$$

Au total en km/s, il vient : $\Delta V = 11,717 \text{ km/s}$

On remarquera que la vitesse de libération requise pour entrer dans le système solaire, n'est que de 11 km/s environ à 200 km du sol. Donc la mise en géostationnaire d'une masse

donnée coûte plus cher qu'un envoi en libération. Il suffit de rappeler qu'avec 11.5 km/s on atteint Mars ou Vénus.

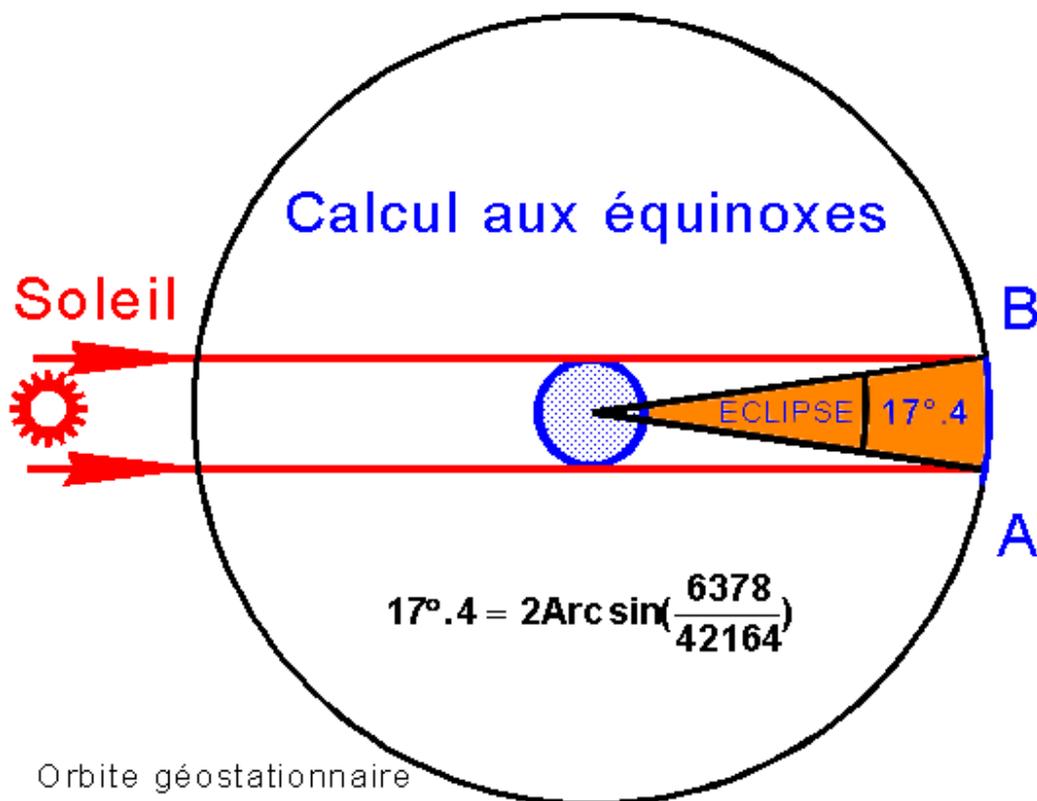
4- MISE À POSTE RÉELLE -

Sans entrer dans trop de détails, donnons quelques idées sur la mise à poste réelle.

4-1- Contraintes solaires-

Lors de l'analyse de mission, il n'y a pas que l'aspect trajectoire qui soit important.

Le satellite demande une certaine autonomie et donc une puissance électrique minimale. Donc la direction du soleil est capitale, en particulier l'angle axe satellite-direction du soleil qu'on appelle ANGLE D'ASPECT SOLAIRE. De plus le soleil intervient dans les problèmes thermiques, et enfin dans la détermination de l'attitude, à l'aide de senseurs solaires en particulier.



Le mouvement orbital sur les orbites GTO ou de dérives, entraîne des périodes d'éclipses solaires, durant lesquelles les références solaires n'étant pas disponibles, les

manœuvres sont interdites. Le maximum de durée est autour des équinoxes, avec un maximum de l'ordre de 70 mn/jour. La période d'éclipse dure 42 jours en continu.

Les télécommunications Station sol - Satellite, notamment en phase de restitution d'orbite, ne doivent pas être parasitées par les émissions électromagnétiques du soleil. Il faut donc pendant ces phases prendre une certaine sécurité par rapport à l'alignement Terre-Satellite-Soleil.

Enfin au coucher et au lever du soleil, des perturbations de transmission sont à craindre, ainsi qu'un aveuglement des senseurs Terre.

4-2- Contraintes de visibilité -

Le vol lanceur, puis le satellite, sont suivis à partir de stations sol. Quelquefois dans certaines opérations, deux stations doivent "voir" le satellite avec un angle minimal sur l'horizon et une durée minimale imposée.

De plus, même si le satellite est visible d'une station, il se pourrait que son attitude (orientation spatiale) ne permette pas une liaison correcte.

4-3- Créneau de tir -

L'ensemble des remarques et contraintes ci-dessus et bien d'autres non soulevées, font que l'analyse de mission doit définir les créneaux de tir acceptables et indiquer leur répartition dans l'année pour tel ou tel lancement.

4-4- Problème des bases non équatoriales -

a- Kourou -

Pour les tirs Ariane, notre base de Guyane conduit à des injections au voisinage de l'équateur, avec une inclinaison orbitale de l'ordre de 7° , qu'il faudra corriger, naturellement à un nœud de l'orbite (ici périgée ou apogée) et nous savons que l'optimisation impose l'apogée. La correction d'inclinaison conduit à un supplément de coût propulsif.

b- Bases URSS -

Le problème est plus important, car après un tir vers l'EST, qui conduit à une inclinaison égale à la latitude de la base de tir, une orbite de parking circulaire est obligatoire. L'inclinaison de l'orbite d'attente basse est de l'ordre de 45° - 50° , c'est à dire très forte.

L'optimisation de la mise à poste conduira à effectuer une petite correction au survol d'un nœud, celui-ci devenant péricée de l'orbite GTO, et à achever la plus grosse partie de la correction d'inclinaison à l'apogée où la vitesse est plus petite qu'au péricée.

4-5- Perturbations -

On peut constater qu'une mise à poste d'un géostationnaire, peut prendre deux à quatre semaines. Durant cette période les perturbations orbitales font leur effet. Il faut donc penser les manœuvres en fonction de ces perturbations et faire en sorte qu'elles agissent de manière favorable pour économiser du carburant et ainsi augmenter la durée de vie du satellite opérationnel.

En particulier, il faut éviter de rester trop longtemps sur des orbites intermédiaires de bas péricée, fortement affectées par la perturbation luni-solaire.

Le problème complet prenant en compte toutes les remarques précédentes, demande une ETUDE D'OPTIMISATION.

5- MAINTENANCE -

On appelle ainsi l'ensemble des opérations consistant à maintenir les paramètres orbitaux du satellite dans un intervalle acceptable pour la mission.

5-1- Notion de fenêtre de position -

Un satellite géostationnaire est défini par sa longitude de stationnement. Sous l'effet de perturbations diverses, son orbite, initialement circulaire et équatoriale, de période $T = 86164$ secondes, va évoluer.

- Le satellite va donc quitter le plan équatorial, c'est le décalage Nord-Sud (inclinaison perturbée).
- Le satellite change de grand axe, donc de période, son orbite devient légèrement excentrique, et donc le satellite se décale en Est-Ouest.

On fixe donc des bornes en longitude et en latitude, centrées sur le point de stationnement. Ce petit domaine dans lequel il faut maintenir le satellite, durant sa durée de vie, s'appelle la FENETRE DE MAINTIEN A POSTE, une tolérance de 0.1 degré est acceptée.

5-2- Maintenance et contraintes -

Pour rétablir les paramètres orbitaux du satellite, des manœuvres sont prévues, soit commandées du sol soit gérées par l'ordinateur de bord.

Une manœuvre est caractérisée par un INCREMENT DE VITESSE ΔV :

De module si possible MINIMAL

D'orientation connue

A délivrer à une date bien déterminée correspondant à une position précise sur orbite

Une manœuvre devra être définie :

- Pour être compatible avec les caractéristiques des actionneurs : moteurs à gaz chauds, tuyères à gaz froids,
- en tenant compte de l'évolution naturelle de l'orbite, car certains paramètres dérivent toujours dans le même sens, donc on cherche à les ramener du côté de la fenêtre où ils évolueront vers le centre,
- En fonction de la date et de la durée de la manœuvre (problèmes de senseurs solaires ou terrestres, éclipses, angle d'aspect solaire).

5-3- Optimisation -

Compte tenu de la manœuvre et des contraintes à respecter, le problème se ramène à une MINIMISATION SOUS CONTRAINTES. En général ce n'est pas simple. La solution est rarement totalement optimale et des simplifications sont tolérées. De même une correction est rarement effectuée en une seule fois. Une stratégie tenant compte des dispersions doit être mise en œuvre pour prendre en compte les incertitudes des systèmes physiques.

Techniquement, parce que les équations le permettent, on DECOUPLE les mouvements EST-OUEST et NORD-SUD. On exerce alors :

- des poussées tangentielles pour la correction de longitude
- des poussées normales au plan orbital pour des corrections nord-sud.

Seules les imperfections d'alignement des poussées vont créer de petits couplages entre ces mouvements. La stratégie ignore aussi les effets perturbateurs périodiques qui ne font pas sortir le satellite de sa fenêtre.

5-4- Coût du maintien à poste -

La surveillance LONGITUDE - DERIVE EST-OUEST - CORRECTION D'EXCENTRICITE demande à chaque correction de l'ordre de 5 m/s limité à 12 m/s maximum.

Une correction d'inclinaison de 0.2 degré (0°.1 ramené à -0°.1) coûte environ 11 m/s. c'est la correction la plus onéreuse et malheureusement inévitable sous l'effet de la perturbation lunaire notamment.

La périodicité du maintien à poste n'est pas fixe, elle dépend du positionnement sur l'équateur, du type de satellite. En général elle est de l'ordre de 2 semaines (TELECOM 2), 3 semaines (TELECOM 3).

Le budget annuel est de l'ordre de :

- Corrections NORD-SUD de l'ordre de 50 m/s
- Corrections EST-OUEST de l'ordre de 2 à 3 m/s

REMARQUE FINALE : La qualité et la précision d'un tir géostationnaire, permettent de gagner énormément sur la durée de vie d'un satellite. Le gain sur la correction d'orbite durant la mise à poste devient une réserve supplémentaire de vitesse pour la maintenance à poste.

6- UTILISATION D'UNE ORBITE SUPERSYNCHRONE -

La tendance actuelle, depuis quelques années, est d'utiliser une orbite primaire très particulière, appelée ORBITE DE TRANSFERT SUPERSYNCHRONE (SSTO = SuperSynchronous Transfert Orbit).

A titre d'exemples :

- Satellite géostationnaire ORION F1 lancé par une fusée ATLAS IIA le 29/11/94 sur une SSTO d'apogée 123500 km, pour terminer après manœuvres à 37°.5 de longitude en géostationnaire.
- Lancement par une fusée ARIANE 44LP d'un satellite de télécommunication US TELSTAR-7 en septembre 1999 sur une SSTO de périégée 200 km et d'apogée de l'ordre de 60000 km, inclinée de 7°. Son stationnement géostationnaire est de 129° et la durée de vie prévue de 15 ans.

6-1- Description de l'orbite SSTO -

Une orbite SSTO est une première orbite de transfert, obtenue après la séparation lanceur, présentant un apogée de très haute altitude et une inclinaison non négligeable. Il y a quelques années, on parlait de passage par l'infini. Une série de manœuvres permettra ensuite de ramener le satellite à sa longitude de stationnement géostationnaire.

6-2- Rôle de l'orbite SSTO -

Vous constaterez plus tard que l'INCLINAISON ORBITALE dépend directement de la latitude du point d'injection qui, pour des tirs plein Est, profitant au maximum de la rotation terrestre est égale à celle de la base terrestre de tir. Citons les inclinaisons classiques :

Environ 23° à 27° pour les tirs US

De l'ordre de 7° pour les lancements Ariane à partir de Kourou

Enfin sensiblement 45° à 52° pour des lancements russes.

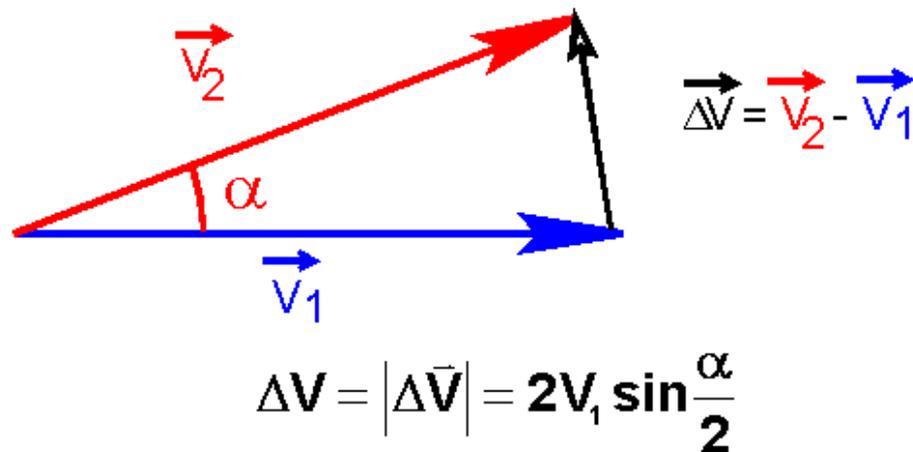
Pour un satellite de télécommunication l'orbite finale est équatoriale et la position extrêmement précise. On comprend bien dès lors que 2 types de correction sont à effectuer :

Sur la forme de l'orbite

Sur l'inclinaison orbitale qui doit être en théorie ramenée à 0°.

Or corriger une inclinaison ne peut se faire qu'au-dessus d'un nœud (voir corrections orbitales) et amène à faire tourner le vecteur vitesse avec ou sans changement de module. Dans le meilleur des cas pour une vitesse d'apogée de l'ordre de 1500 m/s une correction de 1° coûte 26.2 m/s, et pour 25° 649.3 m/s. On constate donc un coût propulsif important, dont l'économie, même partielle, pourrait allonger la durée de vie, notamment en maintenance d'orbite.

Le bon sens montre que la norme de la correction de vitesse est d'autant plus petite, pour une rotation fixée, que la vitesse initiale est petite. L'apogée est donc le point idéal et le reste quasiment même si la correction affecte aussi la forme de l'orbite.



Avec un apogée "très haut" et donc une faible vitesse à cet apogée, la SSTO devient intéressante.

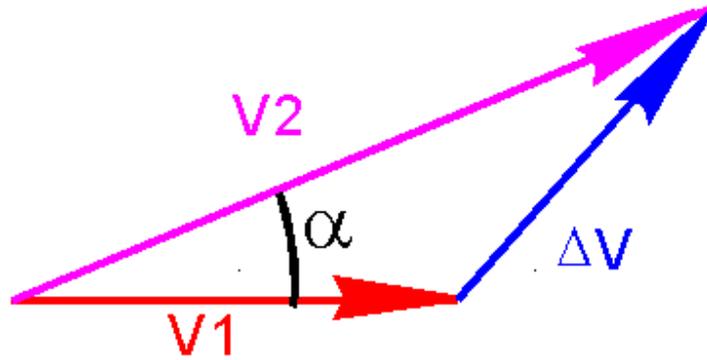
NB : On n'oubliera pas cependant que pour "monter haut", il faut une vitesse d'injection plus grande, ce qui pénalise le lanceur et fait perdre de la masse utile satellite.

6-3- Détail de la mise en orbite -

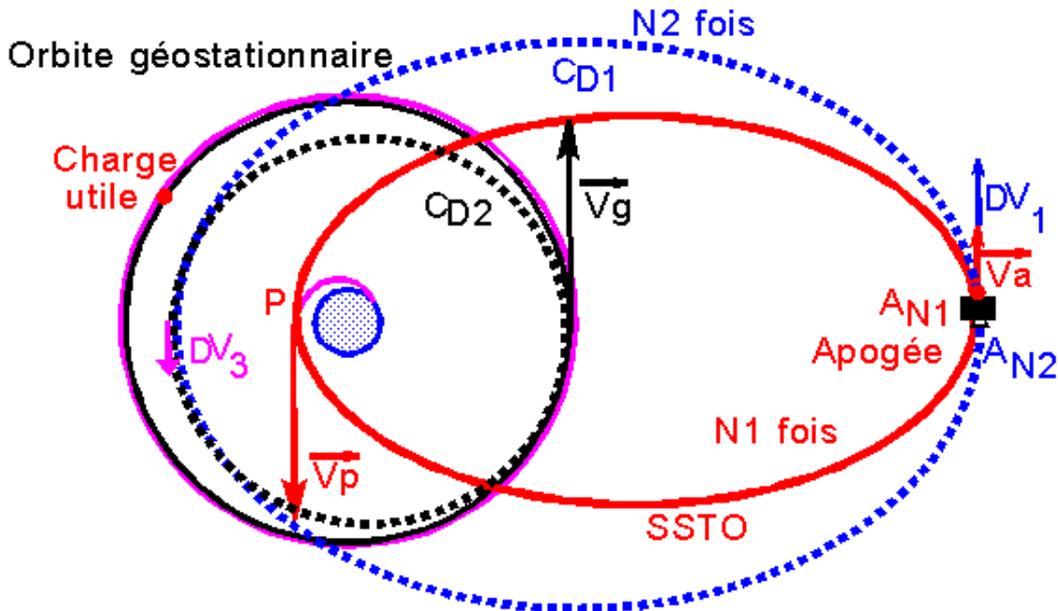
Le schéma ci-dessus résume la procédure de mise à poste géostationnaire:

Injection initiale en P ou au voisinage de P (périgée) sur une SSTO (orbite rouge), parcourue, suivant les besoins N_1 fois. Cette orbite est de grande période, de l'ordre de 1 à 2 jours.

- On réalise à l'apogée de la SSTO une correction ΔV à la fois de l'inclinaison qui est ramenée à 0° ou au voisinage de 0° , par une rotation du vecteur vitesse d'un angle α , et du périgée remonté pratiquement au niveau géostationnaire. L'orbite elliptique C_{D1} (dite de dérive, en pointillés bleus), est parcourue suivant le cas N_2 fois. Sa période est encore plus grande que celle de la SSTO.



- L'apogée est ensuite placé au niveau géostationnaire par une manœuvre ΔV_3 , on est alors sur une autre orbite de dérive C_{D2} .
- Le périhélie définitivement est enfin calé au bon niveau par une dernière opération opérée à l'apogée de C_{D2} . Naturellement cette dernière opération est en pratique plus complexe, nécessitant des réglages très fins.



NB1: De toute évidence, comme le satellite repasse toujours par le lieu où une correction de trajectoire est réalisée, lorsque le géostationnaire est en poste, obligatoirement la dernière correction a lieu à cet endroit. Toutes les orbites ont en commun la propriété d'avoir le grand axe comme ligne des nœuds, de manière à avoir l'apogée sur l'équateur terrestre.

Ainsi en général la longitude vernale de la ligne des nœuds vaut $\Omega = 180^\circ$, c'est le cas des lancements Ariane.

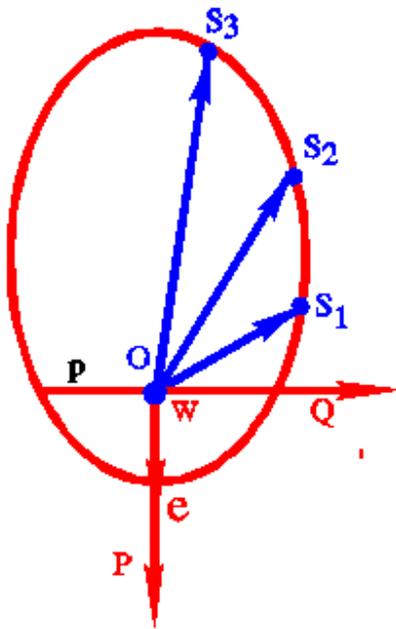
NB2 : L'ensemble de la mise en orbite après l'étape 2 est analogue à celui d'un tir GTO classique. On notera tout de même que plus l'apogée est haut, plus longue sera la période de la SSTO et donc la durée de la manœuvre, pouvant atteindre 1 à 3 semaines.

6-4- Inconvénients et avantages liés à une SSTO -

- Durée de la mise à poste : elle est relativement longue, classiquement de l'ordre de 10 à 15 jours.
- Problèmes technologiques : vue la grande altitude de l'apogée, il est clair que le pilotage ou la restitution d'altitude demande des senseurs terrestres particuliers. De même, les liaisons Centre de contrôle-Satellite vont demander des équipements spécifiques grandes distances.
- Effets des perturbations : avec un apogée pouvant atteindre 150000 km, la perturbation luni-solaire devient non négligeable et affecte notamment la ligne des nœuds et la ligne des apsides. La vitesse angulaire de rotation qui peut devenir importante devra être prise en compte dès le lancement, dans la stratégie de mise à poste. De plus, la perturbation luni-solaire affecte l'altitude du périégée, qu'il faut surveiller pour éviter une rentrée atmosphérique prématurée du satellite.
- Intérêt : ce type d'orbite est intéressant dans le cas d'un lanceur sur-performant, permettant d'atteindre une plus grande vitesse d'injection et diminuant en conséquence le coût de mise à poste. A contrario, pour un lanceur sous-performant, on utilisera une orbite de transfert SOUS-SYNCHRONE, c'est à dire avec un apogée très en dessous du niveau géostationnaire, laissant à la motorisation satellite le soin de toute la mise à poste.

Chapitre 10- PROBLEME DE GIBBS

1- POSITION DU PROBLEME -



On suppose que des observations optiques ou radar, ont permis de préciser trois positions, naturellement coplanaires, d'un satellite en mouvement dans un champ newtonien. L'orbite est donc une conique, ellipse ou hyperbole en général.

Nous connaissons donc trois rayons vecteurs : $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

La résolution que nous allons donner, fournit alors :

- le paramètre p (visualisé ci-contre en noir).
- l'excentricité e.
- les vecteurs P Q, W du repère perifocal.
- la vitesse V en chacun des points de l'orbite.

2- RAPPELS -

A toute orbite képlérienne on associe des invariants scalaires ou vectoriels, qui constituent des intégrales premières du mouvement, donnons les trois utiles à cette étude :

- Le vecteur moment cinétique réduit, normal au plan orbital et orientant le sens du mouvement orbital : $\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V}$
- Le vecteur excentricité qui pointe le périégée, donne donc le grand axe et l'excentricité par sa norme : $\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{V} \wedge \vec{h} - \frac{\vec{r}}{r} \right] = e\vec{P}$

- Le paramètre p (visible sur la figure), longueur constante caractéristique de l'orbite. On rappelle que dans le repère perifocal galiléen PQW, l'équation de la conique s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

3- RESOLUTION -

On définit trois nouveaux vecteurs associés à l'orbite :

$$\begin{aligned} \vec{N} &= r_3 \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 + r_1 \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 + r_2 \vec{r}_3 \wedge \vec{r}_1 & \vec{D} &= \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \wedge \vec{r}_1 \\ \vec{S} &= (r_2 - r_3) \vec{r}_1 + (r_3 - r_1) \vec{r}_2 + (r_1 - r_2) \vec{r}_3 \end{aligned}$$

Dans les axes du repère perifocal, on a de toute évidence :

$$\vec{Q} = \frac{\vec{N} \wedge \vec{e}}{Ne} \leftrightarrow Ne\vec{Q} = r_3(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \wedge \vec{e} + r_1(\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) \wedge \vec{e} + r_2(\vec{r}_3 \wedge \vec{r}_1) \wedge \vec{e}$$

Utilisant le développement du double produit vectoriel et la relation donnant p - r , on a :

$$\begin{aligned} Ne\vec{Q} &= r_3(\vec{r}_1 \cdot \vec{e})\vec{r}_2 - r_3(\vec{r}_2 \cdot \vec{e})\vec{r}_1 + r_1(\vec{r}_2 \cdot \vec{e})\vec{r}_3 - r_1(\vec{r}_3 \cdot \vec{e})\vec{r}_2 + r_2(\vec{r}_3 \cdot \vec{e})\vec{r}_1 - r_2(\vec{r}_1 \cdot \vec{e})\vec{r}_3 \\ Ne\vec{Q} &= p[(r_2 - r_3)\vec{r}_1 + (r_3 - r_1)\vec{r}_2 + (r_1 - r_2)\vec{r}_3] = p\vec{S} \end{aligned}$$

De toute évidence le calcul s'achève par :

$$e = \frac{S}{D} \quad \vec{Q} = \frac{\vec{S}}{S} \quad \vec{W} = \frac{\vec{N}}{N} \quad \vec{P} = \vec{Q} \wedge \vec{W}$$

Enfin un calcul plus complexe, que nous ne faisons pas, fournit la vitesse en un point :

$$\vec{V} = \sqrt{\frac{\mu}{ND}} \left[\frac{\vec{D} \wedge \vec{r}}{r} + \vec{S} \right]$$

Le calcul se termine classiquement par celui des paramètres orbitaux connaissant le vecteur position et le vecteur vitesse.

Chapitre 11-

ECLIPSE – VISIBILITE -

Ce chapitre est consacré au calcul des conditions d'éclipse et à la détermination de la visibilité d'une station sol, depuis un satellite.

1- ECLIPSE -

Un problème important dans l'espace est l'alimentation électrique des systèmes embarqués. Suivant le type d'application, l'énergie est produite de manière différente :

- Soit de manière autonome, indépendante de l'environnement, pour des missions lointaines vers des planètes, la distance au soleil croissante ne permettant pas d'exploiter la lumière solaire de manière régulière. On utilise alors des générateurs nucléaires ou des piles à combustibles.
- Soit en utilisant l'effet photoélectrique qui convertit le flux de photons solaires captés par des panneaux solaires en énergie électrique. Cette méthode est applicable pour les orbites terrestres où la distance au soleil reste constante.

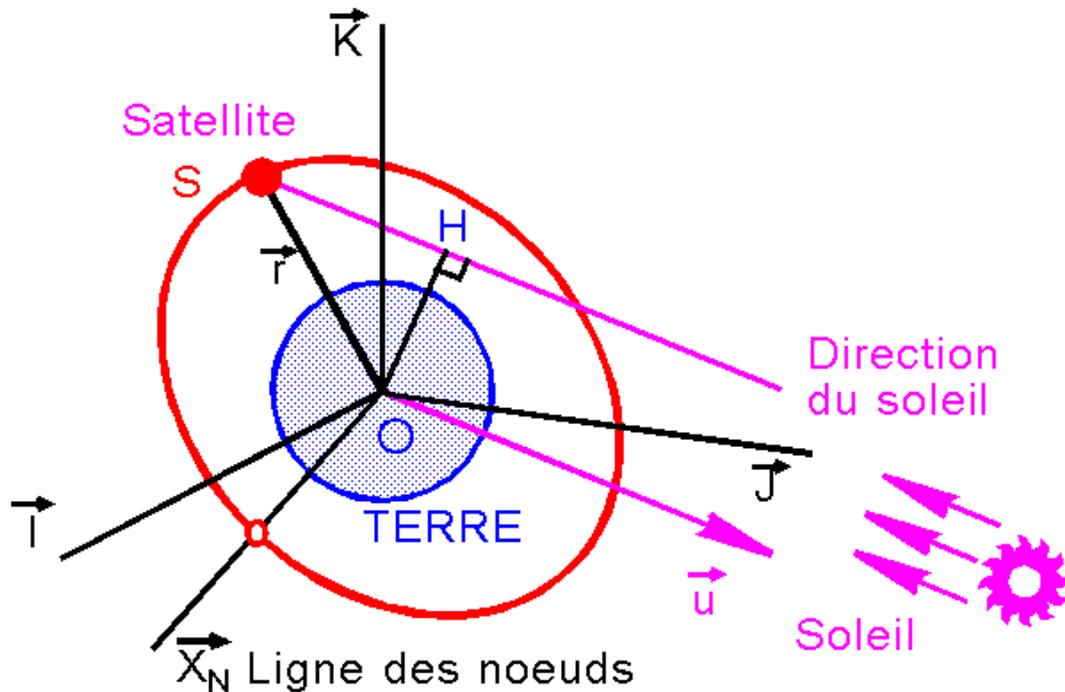
Dans ce dernier cas, il peut se présenter des périodes d'ECLIPSE DE SOLEIL, où la lumière du soleil est interceptée par la lune ou la Terre. La production d'énergie est donc stoppée, imposant donc un stockage de secours sous forme de batteries pour une alimentation minimale.

De telles périodes d'éclipse sont donc importantes à connaître, notamment parce qu'il faut éviter de programmer des manœuvres lorsqu'elles se présentent.

1-1- Calcul des périodes d'éclipse –

H désigne le point projection du centre de la Terre O sur la direction, d'unitaire u , partant du satellite vers le Soleil.

Nous dirons que le satellite S est en éclipse si la longueur TH est inférieure au rayon terrestre et si le satellite n'est pas devant la Terre.



Ceci se traduit très simplement, le lecteur y réfléchira, à l'aide des 2 vecteurs ci-dessous aisément calculable dans la base du repère IJK associé à J2000.

- Unitaire de la direction du soleil, le vecteur \vec{u}
- Rayon vecteur du satellite, le vecteur \vec{r}

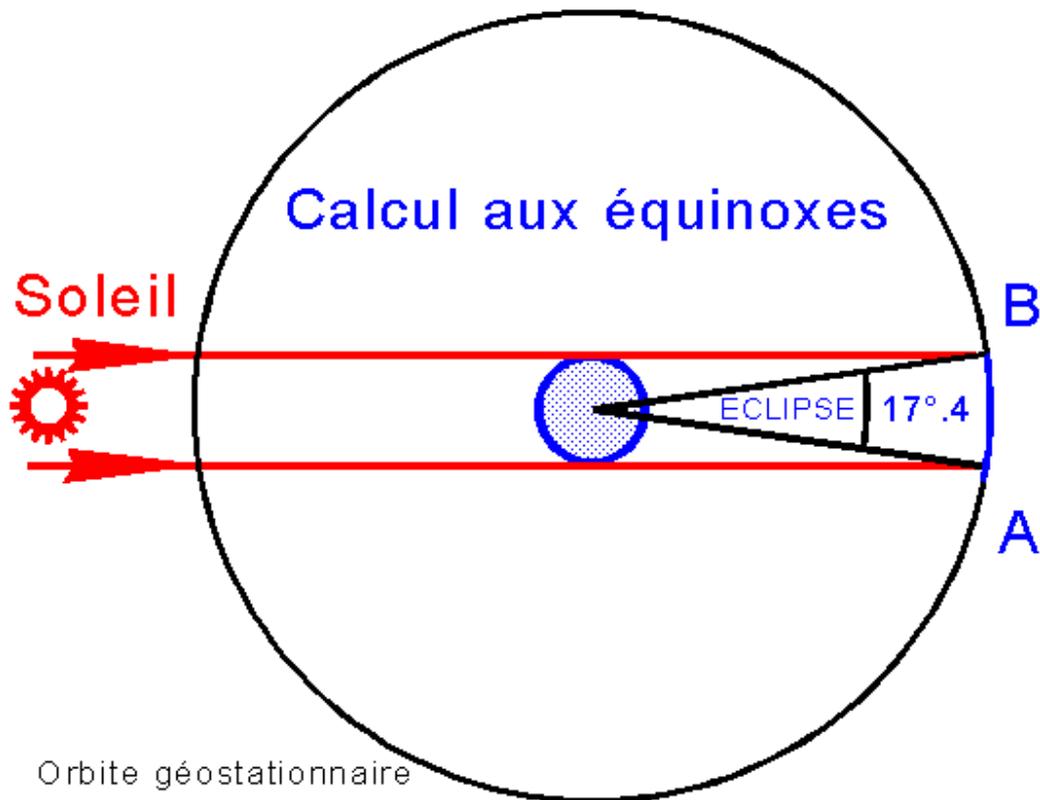
$$\mathbf{Eclipse} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \|\vec{r} \wedge \vec{u}\| < R_T \\ \vec{r} \cdot \vec{u} \leq 0 \end{bmatrix}$$

Connaissant la loi du mouvement satellite en fonction du temps et les éphémérides du Soleil à la date t du calcul, vous pourrez déterminer les périodes d'éclipse. En général, ces calculs demandent l'intervention de moyens informatiques, notamment en prenant en compte les perturbations orbitales

1-2- Cas particuliers -

a- Cas particulier d'un géostationnaire -

La configuration la plus défavorable, donnant la plus longue période d'éclipse, se présente lorsque le soleil traverse le plan équatorial terrestre, c'est à dire aux équinoxes.



Le lecteur pourra vérifier que la durée maximale d'éclipse est de 70 mn environ. De plus, il vérifiera que le nombre total de jours où une éclipse peut se produire est de 84 jours (42 jours Mars à mi-avril et 42 jours septembre à mi-octobre)

b- Remarques pour les satellites héliosynchrones -

Ce cycle se reproduira fidèlement à chaque période vu que la géométrie de la configuration est invariante grâce à l'héliosynchronisme (plan orbital tournant à la même vitesse que le plan méridien du soleil).

2- VISIBILITE D'UNE STATION SOL -

2-1- Présentation et données -

Cette note de calcul donne les moyens de déterminer si un satellite est visible ou non d'une station sol, pour l'établissement d'une communication:

- Envoi d'ordre de télécommande pour des manœuvres ou changement d'orientation.

- Réception de télémessure et restitution d'orbite.
- Récupération de données scientifiques ou d'images codées, etc.

Seront supposée connus ou calculables :

- Les coordonnées géographiques de la station sol T*.
- Latitude λ^* .
- Longitude L^* .

Les coordonnées géographiques et l'altitude du satellite à l'instant t considéré.

- Latitude λ
- Longitude L
- Altitude Z

NB : tous les calculs de coordonnées et les opérations vectorielles classiques seront opérés dans le repère orthonormé $X_g Y_g Z_g$ associé au méridien de Greenwich d'origine le centre O de la Terre avec :

- X_G orienté vers l'intersection du méridien de Greenwich et de l'équateur.
- Z_G axe nord-sud de la Terre

2-2- Définition de visibilité d'un satellite –

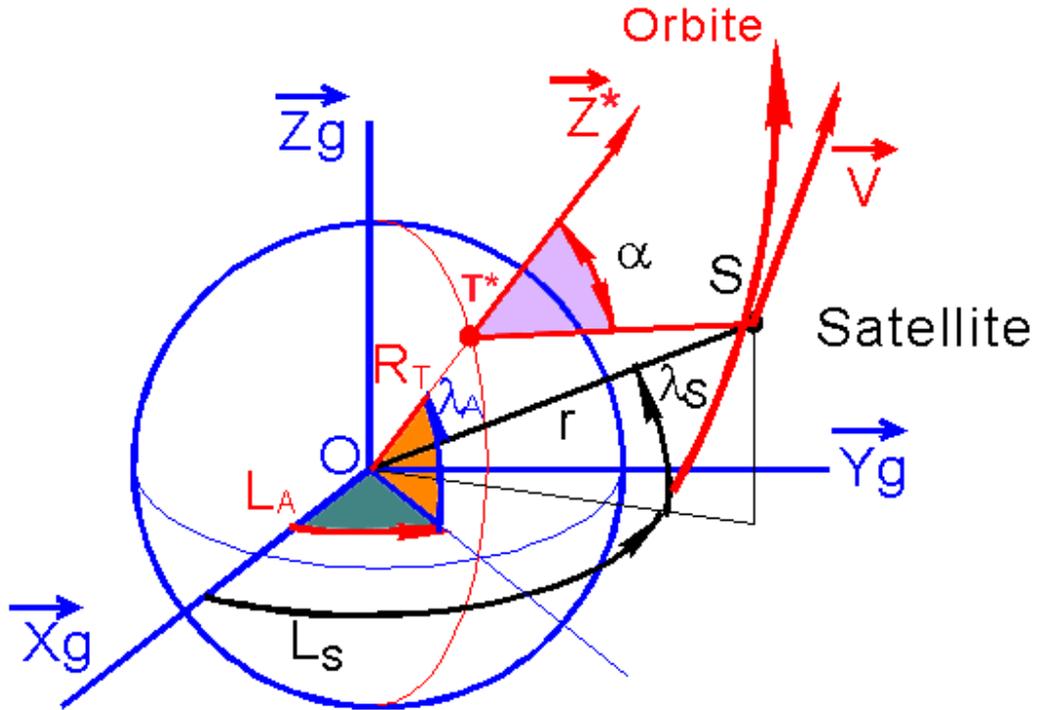
Nous conviendrons de dire qu'un satellite S est visible depuis une station sol T* si la ligne de visée T*S du satellite se trouve au moins à 10° au-dessus de l'horizon de T*.

Calcul des conditions de visibilité :

Le satellite sera donc visible, s'il se trouve dans un cône, dit de visibilité, d'axe la verticale de la station, de sommet la station et d'ouverture environ $\alpha = 80^\circ$

Les coordonnées du satellite S et de la station T* sont :

$$S = \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = (R_T + Z) \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos L \\ \cos \lambda \sin L \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \quad T^* = R_T \begin{bmatrix} \cos \lambda^* \cos L^* \\ \cos \lambda^* \sin L^* \\ \sin \lambda^* \end{bmatrix}$$



L'axe Z^* vertical ascendant a pour composantes :

$$\vec{Z}^* = \begin{bmatrix} \cos \lambda^* \cos L^* \\ \cos \lambda^* \sin L^* \\ \sin \lambda^* \end{bmatrix}$$

On exprime la visibilité du satellite par l'angle $0 < \alpha < 80^\circ$

$$\text{VISIBILITE} \Leftrightarrow 0^\circ < \text{Arc cos} \frac{\vec{T}^* \cdot \vec{S} \cdot \vec{Z}^*}{\|\vec{T}^* \vec{S}\|} < 80^\circ$$

B- PERTURBATIONS ORBITALES

Chapitre 1-

PERTURBATIONS ORBITALES

Nous abordons dans cette partie le problème du mouvement d'un corps dans un champ gravitationnel perturbé. Cela signifie que la force principale est la gravitation newtonienne, mais qu'il s'y ajoute une force perturbatrice qui va affecter de manière continue l'orbite.

En pratique, une surveillance par restitution d'orbite s'impose et une maintenance appropriée doit être mise en place, pour assurer la mission nominale du satellite.

1- NOTION DE PERTURBATION -

1-1- Origine des perturbations sur un satellite terrestre -

On peut distinguer plusieurs types de perturbations, caractérisées par leur accélération.

1-1-1- Gravitationnelles -

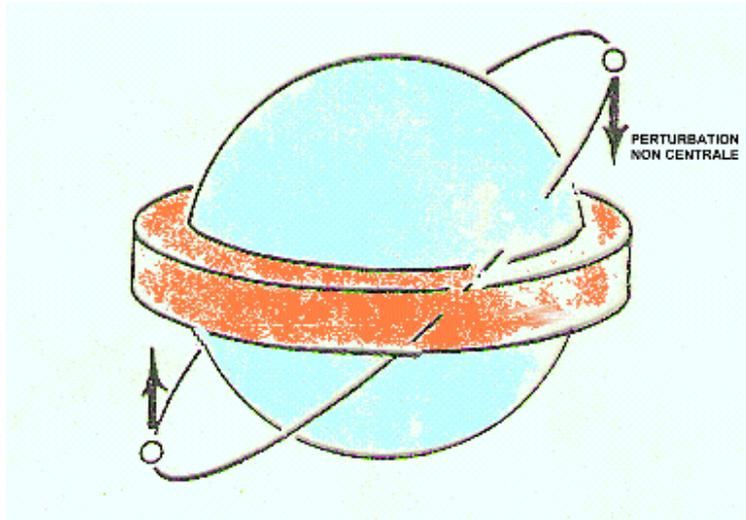
a- Dues à la Terre elle-même, non sphérique, non homogène par couches, le potentiel réel de gravitation est alors complexe, développé en série, avec le premier terme principal représentant le potentiel newtonien et une partie perturbatrice traduisant les divers "défauts" de la Terre. Nous n'entrons pas dans le détail des termes de la série, renvoyant le lecteur aux ouvrages spécialisés notamment du CNES, mais signalons que pour les applications les plus courantes, seul est pris en compte le terme dit en J_2 traduisant l'aplatissement polaire de la Terre, dans le potentiel perturbateur U_P , alors que U_K désigne le potentiel képlérien (pour 1 kg).

$$U = U_K + U_P \quad U_K = -\frac{\mu}{r} \quad U_P = \frac{J_2}{2} \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \lambda - 1)$$

λ est la latitude géocentrique et r le rayon vecteur scalaire.

NB 1 : Voir note de calcul des composantes de la force perturbatrice gravitationnelle.

NB 2 : Le calcul ci-dessus montre que l'aplatissement polaire crée d'une part une force supplémentaire centrale qui modifie le moyen mouvement et d'autre part une force parallèle à l'axe nord - sud, qui perturbe les paramètres orbitaux angulaires. En effet, la Terre se comporte comme une sphère avec un "bourrelet" équatorial, comme sur la figure, on comprend mieux alors l'origine de la perturbation.



b- Dues à l'attraction luni-solaire : On fera attention au fait que l'accélération due à ces perturbations sur un satellite n'est pas constituée par les attractions de la lune ou du soleil, mais est une différence de deux termes voisins, l'un l'accélération créée sur le satellite, l'autre l'accélération créée sur la Terre.

NB 3 : Voir note de calcul des composantes de la force perturbatrice luni-solaire.

c- Frottement atmosphérique résiduel : cette perturbation se fait surtout sentir au périhélie pour les orbites elliptiques et partout, sur les orbites circulaires basses au dessous de 500 km d'altitude. Le freinage résulte de la traînée, non négligeable car, bien que la masse volumique de l'air soit très faible, la vitesse relative est de l'ordre de 7 à 10 km/s, intervenant par son carré dans l'expression de la traînée.

Son effet est d'autant moins important que le satellite soit "gros", en effet la surface augmente comme le carré des dimensions alors que la masse croît avec le cube des dimensions, le rapport S/M décroît donc avec les dimensions.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{R}_x}{M} = -\frac{1}{2} \rho(Z) \frac{SC_D}{M} V \vec{V}$$

$\rho(Z)$ est la masse volumique de l'air à l'altitude Z (voir tables de Jacchia ou atmosphère standard) S surface de référence, CD un coefficient de traînée de l'ordre de 2 à 3, V la vitesse air.

d- Pression de radiation solaire ou pression photonique : due à la réflexion des particules et de la lumière sur les surfaces réfléchissantes du satellite. A un degré moindre la Terre réémet de la lumière vers le satellite créant une pression de radiation rediffusée par la Terre.

e- Accélération perturbatrice : C'est la notion importante de ce cours, elle est définie comme quotient de la résultante de toutes les perturbations par la masse du satellite. Le lecteur se convaincra que cette accélération, tout comme les forces en mécanique, ne peut dépendre que de la position, de la vitesse et du temps t .

f- Ordre de grandeur des accélérations perturbatrices en orbite $Z = 822 \text{ km}$ -

Soleil $6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$, lune $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$, traînée variable $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$, pression de radiation $5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$

1-2- Equation générale du mouvement -

La loi fondamentale de la dynamique donne :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{\gamma}_K + \vec{\gamma}_P = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{\gamma}_P$$

Rappelons que les techniques d'intégration numérique demandent la mise sous forme canonique du système sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.

On posera donc une nouvelle variable \vec{Y} vérifiant le système différentiel fermé

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \frac{d\vec{V}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V} \\ -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} + \vec{\gamma}_p(\vec{r}, \vec{V}, t) \end{bmatrix} = \vec{F}(\vec{Y}, t)$$

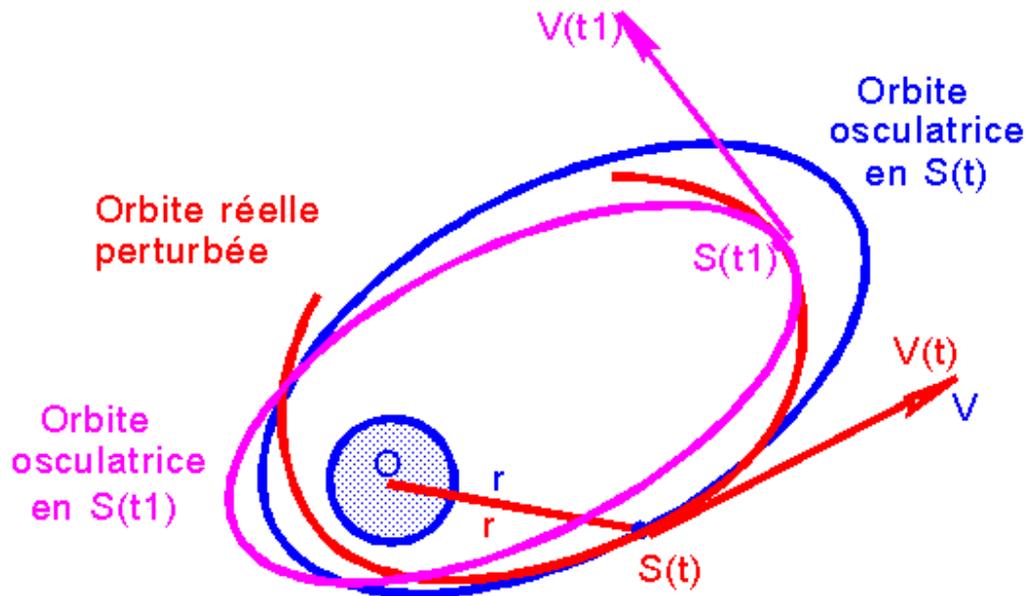
1-3- Notion d'orbite osculatrice à l'orbite réelle -

Sous l'effet de la perturbation, l'orbite réelle n'est pas képlérienne, ni plane, ni fermée et naturellement il devient impossible de donner une période et de parler des paramètres orbitaux.

De là l'idée qu'il faut définir pour chaque position orbitale $S(t)$ ou encore à chaque instant t une orbite képlérienne $C(t)$ "aussi voisine que possible de l'orbite réelle". Elle portera le nom d'ORBITE OSCULATRICE A L'INSTANT t .

Comment est-elle définie: tout simplement en disant que $C(t)$ est l'orbite képlérienne qui serait parcourue par le satellite S après l'instant t , si la perturbation cessait. Cette orbite est donc parfaitement définie par ses conditions initiales et naturellement les paramètres orbitaux sont calculables.

$$C(t) \Leftrightarrow [\vec{r}(t), \vec{V}(t), t] \Leftrightarrow [a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), M(t)]$$



NB₁ : On observera que deux instants distincts conduisent à deux orbites oscultrices distinctes.

NB₂ : Quelle est l'utilité de l'orbite osculatrice à l'instant t_0 ? De toute évidence elle permet de prédire des positions futures grâce à des relations simples et maîtrisées des mouvements képlériens. Ces prédictions seront d'autant plus précises que la date est proche de t_0 .

EXEMPLE : ORBITE GEOSTATIONNAIRE

- Orbite képlérienne $a = 42164.16$ km
- Orbite réelle, circulaire géostationnaire vraie, perturbée, non képlérienne $a = 42164.69$ km
- Orbite képlérienne osculatrice à l'orbite précédente, (le satellite est toujours au périégée de son orbite osculatrice) on trouve alors $a = 42166.25$ km, $e = 3.71 \cdot 10^{-5}$.

Remarque sur les paramètres orbitaux : En hypothèse képlérienne, les 5 premiers paramètres orbitaux sont constants et représentent des intégrales premières du mouvement, le sixième, M , variant linéairement en fonction du temps t .

En présence de perturbations, les vecteurs fondamentaux sont lentement variables entraînant une dérive des paramètres orbitaux. C'est précisément l'objet de ce cours que de donner les équations d'évolution.

2- EQUATIONS DE GAUSS -

2-1- Introduction -

Nous souhaitons former les équations d'évolution des paramètres orbitaux. Pour y parvenir, opérons un changement de fonction inconnue, en posant par exemple :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \omega \\ \Omega \\ M \end{bmatrix} = \vec{K}(\vec{Y}, t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul univoque des} \\ \text{paramètres orbitaux} \\ \text{en fonction de } \vec{r} \text{ et } \vec{V} \end{array} \right.$$

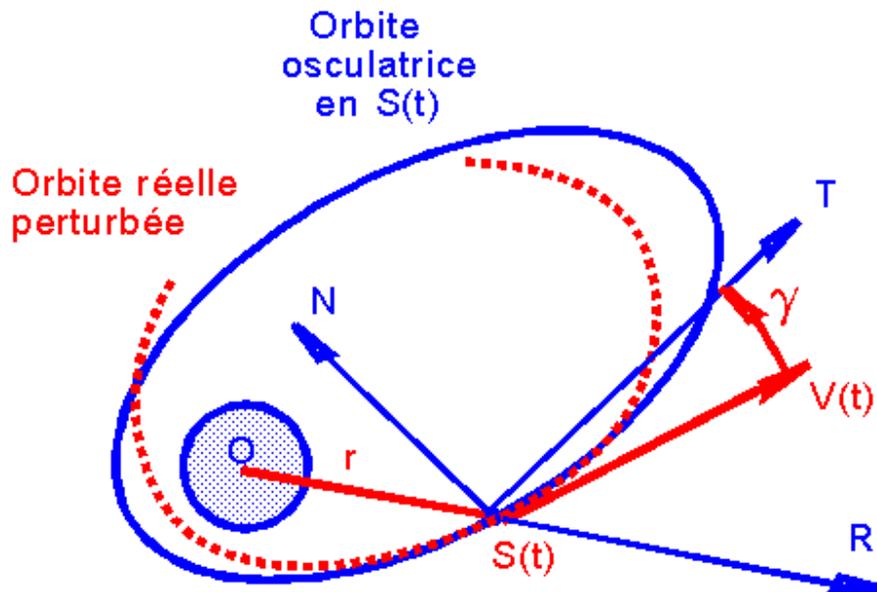
Une étude mathématique plus fine montre qu'alors le vecteur \vec{X} vérifie une équation différentielle fermée de la forme :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = G(\vec{X}, t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(a, e, i, \omega, \Omega, M, t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ g_6(a, e, i, \omega, \Omega, M, t) \end{bmatrix}$$

ces équations s'appellent "EQUATIONS DE GAUSS", nous allons les expliciter.

2-2- Formation des équations de GAUSS -

a- Notations et conventions de calcul -



On définit des axes R, T, N, respectivement radial, orthoradial et normal et des composantes radiale R_p , orthoradiale T_p et normale N_p , de la perturbation :

$$\vec{\gamma}_p = R_p \vec{R} + T_p \vec{T} + N_p \vec{N} \quad \text{où} \quad \begin{bmatrix} \vec{R} = \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{N} = \frac{\vec{h}}{h} \\ \vec{T} = \vec{N} \wedge \vec{R} \end{bmatrix}$$

b- Calcul de l'évolution de a -

Les calculs sont relativement lourds et pénibles, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés, mais donnons le détail de formation de la première équation concernant la dérivée du demi grand axe a.

Tout repose sur l'équation de l'énergie et le théorème de l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) &= dW(\text{toutes forces}) = dW(\text{gravitation}) = dW(\text{perturbations}) \\ &= -dU + m\vec{\gamma}_p \cdot \vec{V}dt = -d\left(-\frac{\mu m}{r}\right) + m(R_p \vec{R} + T_p \vec{T} + N_p \vec{N}) \cdot \vec{V}dt \\ d\left[\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}\right] &= V \cos \gamma T_p + V \sin \gamma R_p = d\left(-\frac{\mu}{2a}\right) = \frac{\mu}{2a^2} da \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation polaire de l'ellipse

$$\begin{aligned} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{l} \sin \gamma = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} e \sin \theta}{V} \\ \cos \gamma = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos \theta)}{V} \end{array} \right] \\ \frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin \theta R_p + (1 + e \cos \theta) T_p \right] \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \end{aligned}$$

Telle est la première des équations de Gauss.

c- Tableau récapitulatif des équations de GAUSS -

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin \theta R_p + (1 + e \cos \theta) T_p \right] \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\sin \theta R_p + (\cos \varphi + \cos \theta) T_p \right] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \cos(\omega + \theta) N_p \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r \sin(\omega + \theta) N_p}{a \sin i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-\cos\theta R_p + \frac{2+e\cos\theta}{1+e\cos\theta} \sin\theta T_p - \frac{e\cos i}{1-e^2} \frac{r \sin(\omega + \theta) N_p}{a \sin i} \right]$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[\left(\cos\theta - \frac{2e}{1+e\cos\theta} \right) R_p - \frac{2+e\cos\theta}{1+e\cos\theta} \sin\theta T_p \right]$$

$$M = \varphi - e \sin \varphi \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi - e}{1 + e \cos \varphi}$$

3- MANOEUVRES IMPULSIONNELLES -

Très courantes, ce sont des opérations de très courte durée, mettant en jeu un moteur à poussée finie, résultant de l'éjection de gaz chaud (combustion) ou de gaz froid stocké (méthane, azote ...). F_p est la poussée, considérée durant le temps de fonctionnement comme une perturbation γ_p .

La représentation du phénomène fait appel à la fonction de Dirac.

On note ΔV l'impulsion de vitesse fournie durant le temps Δt très court, on admet que la position reste inchangée.

$$\vec{\gamma}_p = \frac{\vec{F}_p \delta(t, t_0)}{m} \quad \Delta \vec{V} = \Delta V_R \vec{R} + \Delta V_T \vec{T} + \Delta V_N \vec{N}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{\gamma}_p dt = \Delta \vec{V} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\vec{F}_p \delta(t, t_0)}{m} dt = \frac{\vec{F}_p}{m} \Rightarrow \vec{\gamma}_p = \Delta \vec{V} \delta(t, t_0)$$

$$\Rightarrow R_p = \Delta V_R \delta(t, t_0) \quad T_p = \Delta V_T \delta(t, t_0) \quad N_p = \Delta V_N \delta(t, t_0)$$

La manœuvre a pour conséquence une variation Δx_i du paramètre x_i , or chaque paramètre x_i satisfait à une équation de Gauss de la forme :

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(\dots x_k, \dots, t) R_p + B_i(\dots x_k, \dots, t) T_p + C_i(\dots x_k, \dots, t) N_p$$

Les fonctions A_i , B_i , C_i sont données dans les équations de Gauss, ainsi :

$$\Delta x_i = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx_i}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} (A_i R_p + B_i T_p + C_i N_p) dt = A_i \Delta V_R + B_i \Delta V_T + C_i \Delta V_N$$

Conclusion très simple, dans une manœuvre impulsionnelle, les variations des paramètres sont :

$$\Delta x_i = A_i \Delta V_R + B_i \Delta V_T + C_i \Delta V_N$$

4- QUELQUES EXEMPLES -

Les perturbations étant très faibles devant l'attraction newtonienne, les variations instantanées des paramètres orbitaux présentent peu d'intérêt dans la plupart des applications. Seules les variations séculaires moyennées sur une période sont intéressantes.

4-1- Aplatissement terrestre -

A 622 km du sol (sensiblement le périégée GTO de Ariane V), on obtient une accélération perturbatrice, indépendante de l'engin, de $1.5 \cdot 10^{-3}$ g. Donnons deux exemples, celui des variations séculaires de ω et Ω sous le seul effet de J_2 . Voir le calcul sous forme d'exercice.

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{5\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \sqrt{1-e^2} (3\cos^2 i - 1)$$

Plus loin nous verrons tout l'intérêt de la première dérivée dans l'étude des applications de l'HELIO SYNCHRONISME aux satellites d'imagerie spatiale civile ou militaire.

La deuxième dérivée est classiquement exploitée par les Russes, pour empêcher une rotation de l'orbite dans son plan, ce qui bloque la direction du grand axe par rapport à

l'équateur. En effet, $i=63^\circ.4$ annule $5\cos^2i-1$ et constitue une valeur exploitable de i , permettant le survol de la Russie et des applications domestiques, notamment les Molnya.

4-2- Freinage atmosphérique -

Agissant par les composantes radiale et orthoradiale l'action se fait sentir sur de nombreux paramètres, pas sur l'inclinaison mais surtout sur a et e .

Estimation de la force de freinage : la masse volumique de l'air vaut :

$$\begin{aligned} \rho(200 \text{ km}) &= 2.10^{-9} \text{ kg/m}^3 & \rho(300 \text{ km}) &= 10^{-10} \text{ kg/m}^3 \\ \rho(600 \text{ km}) &= 2.10^{-12} \text{ kg/m}^3 & \rho(700 \text{ km}) &= 4,5.10^{-13} \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Pour un satellite de 2500 kg, une surface de 16 m², un coefficient de traînée $C_D = 2,2$, au périégée avec une vitesse de 7900 m/s, on obtient une accélération $\gamma = 8,8.10^{-4} \text{ m/s}^2$ à 200 km et $8,8.10^{-7} \text{ m/s}^2$ à 600 km.

4-3- Attraction luni-solaire -

L'effet principal est une diminution de l'inclinaison orbitale, nécessitant des corrections annuelles coûteuses.

4-4- Pression de radiation solaire -

La pression vaut $p=9.10^{-6}$ Pascal en tout lieu au voisinage de la Terre et donne sur le satellite précédent une accélération de 6.10^{-8} m/s^2 .

Chapitre 2-

HELIOSYNCHRONISME

Ce cours fait suite à l'étude des perturbations et des équations de Gauss. Il suppose que l'on s'est intéressé au calcul des perturbations orbitales dues à J_2 , c'est à dire l'aplatissement terrestre.

Nous abordons, dans ce chapitre, les applications modernes, actuelles des satellites d'IMAGERIE SPATIALE, le satellite étant devenu, en particulier, le géomètre de l'espace.

En effet, le besoin d'images est de plus en plus nécessaire, pour des usages très divers :

- Cartographie, vue du relief en 3D à usage civil ou militaire (missiles de croisière ...)
- Surveillance militaire et acquisitions de données (Hélios ...)
- Images pour l'industrie ou des particuliers (SPOT ...)
- Etudes scientifiques d'évolution de phénomènes terrestres (pollution, déforestation, cultures, archéologie ...)

1- SATELLITE D'IMAGERIE SPATIALE -

On demande à un système optique embarqué de réaliser depuis l'espace, des prises de vue de détails sur le sol terrestre. Cela requiert des conditions de fonctionnement très précises, que nous ne traiterons pas toutes en détail.

- Choix naturel d'une orbite circulaire, afin de ne pas avoir à modifier la focale le long de l'orbite, de plus la vitesse angulaire de tangage reste alors constante.
- Suite à la remarque ci-dessus, le satellite doit avoir une stabilisation de la vitesse de tangage extrêmement précise.

C'est une des contraintes du SCAO (Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite).

- La nécessité de comparaison des images impose aussi, de toute évidence, de survoler périodiquement les mêmes lieux de la Terre, ce qui signifie que la trace

sol doit de refermer au bout d'un certain temps T , appelé PERIODE DE REPETITIVITE, le satellite d'imagerie doit donc respecter une CONDITION DE PHASAGE.

- On comprend bien que la contrainte précédente impose une stabilité de l'orbite, notamment en altitude de manière à conserver une période de révolution stable.

Ceci ne peut être atteint qu'en évitant de freiner sur les couches hautes de l'atmosphère, il faut donc choisir une orbite circulaire au dessus de 500 km sol.

- La précision de la prise de vue, ou si l'on veut la résolution, impose de limiter l'altitude, on choisit donc un maximum de 1500 km d'altitude.
- Enfin l'usage constant de prise de vues dans des longueurs d'onde précises, notamment en infra rouge, impose de maîtriser au mieux l'activité solaire, surtout si l'on veut comparer des enregistrements de même site.

La condition est donc d'essayer de survoler un même lieu toujours à la même heure locale. Cette condition à respecter s'appelle la condition d'HELIOSYNCHRONISME.

Nous allons constater, dans les rubriques qui suivent, que la non sphéricité de la Terre va permettre de satisfaire aux conditions imposées. En somme on va tirer bénéfice de la perturbation due à J_2 .

2- CONDITION D'HELIOSYNCHRONISME -

L'acquisition de cette notion présente quelques difficultés qu'il faut lever par quelques préliminaires.

2-1- Temps universel -

La communauté scientifique, pour éviter les problèmes locaux de changement d'heure et de fuseau horaire, a choisi comme heure de référence d'un événement en un point quelconque de la Terre, l'heure solaire de Greenwich, appelée Temps universel, temps TU, temps UT.

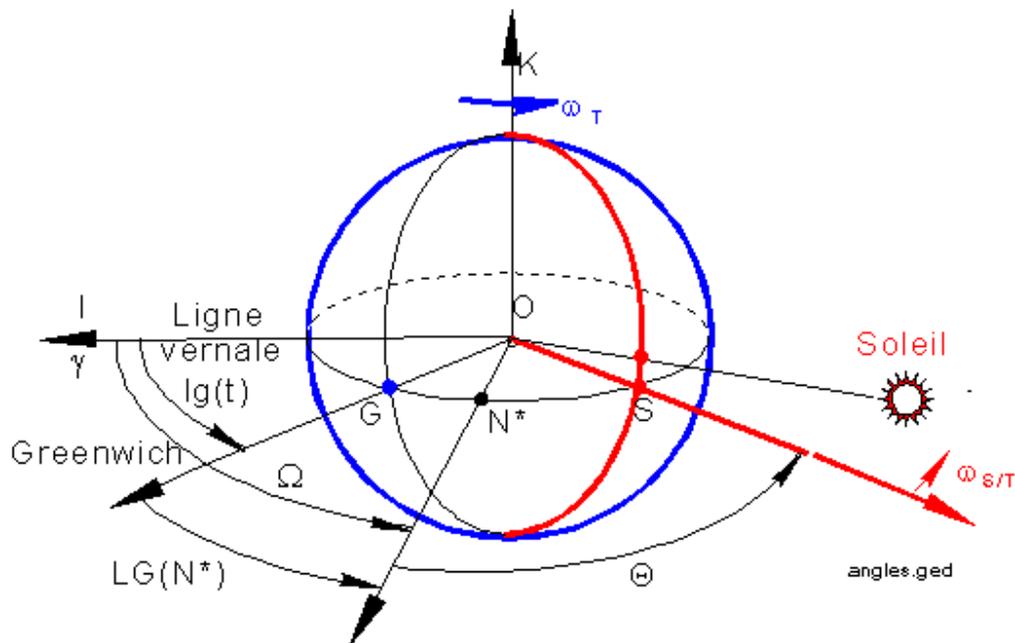
2-2- Heure solaire locale en un lieu -

Naturellement, cette heure est importante pour la vie courante. Rappelons qu'il est 12 h localement lorsque le soleil passe au méridien du lieu. Ne pas confondre ce temps avec le temps légal du pays, qui est souvent le même pour tous les lieux du territoire.

Nous la notons H_L , elle est liée à la longitude Greenwich terrestre L par :

$$H_L = H_{TU} + \frac{L_G}{15} \quad (L_G \text{ en degrés})$$

2-3- Heure solaire locale au nœud ascendant -



Si θ désigne l'angle en degrés, compté positivement vers l'est, entre la ligne des nœuds de l'orbite et le méridien du soleil, l'heure solaire locale au nœud ascendant est :

$$H(N^*) = 12 - \frac{\theta}{15} \quad \theta \text{ en degrés}$$

2-4- Condition d'héliosynchronisme -

On dira, par définition, qu'un satellite est *héliosynchrone* si et seulement si l'heure locale au nœud ascendant est constante.

Cela signifie qu'à chaque survol du nœud ascendant, la montre de l'habitant du lieu survolé à cet instant, indiquera toujours la même heure. Mais attention, cet habitant n'est naturellement pas le même à chaque orbite.

L'héliosynchronisme est donc équivalent à dire que l'angle θ reste constant dans le temps. Mais par quel miracle est-ce possible ? Réponse : en annulant la dérivée de θ , ce que montrons au paragraphe suivant.

a- comment réaliser l'héliosynchronisme ?

Le secret réside dans la perturbation gravitationnelle, principale due à la non sphéricité de la Terre, représentée dans le potentiel perturbateur par le terme de coefficient J_2 . Voir exercices EX₁ pour le potentiel et la force perturbatrice et EX₂ pour le calcul des effets séculaires "moyennés" sur une période, effets que nous rappelons ici : $J_2=1.082616 \cdot 10^{-3}$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}$$

Nous savons que vu du centre de la Terre, dans le repère géocentrique équatorial, le soleil dérive, en longitude, autour de l'axe nord-sud à la vitesse angulaire $\omega_{S/T}$ correspondant à un tour en 365.24219 jours solaires moyens de 24 heures exactement, donnant sensiblement 1°/jour.

Il est clair que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{S/T} - \dot{\Omega}$$

$$\theta = cste \Leftrightarrow \dot{\Omega} = \omega_{S/T} = \frac{2\pi}{365.24219 \times 86400} \text{ rd/s}$$

Partant de l'expression de $d\Omega/dt$, vous traduirez la condition ci-dessus, qui montre que l'héliosynchronisme s'exprime par une relation entre a et i , le choix du rayon de l'orbite impose donc l'inclinaison et réciproquement.

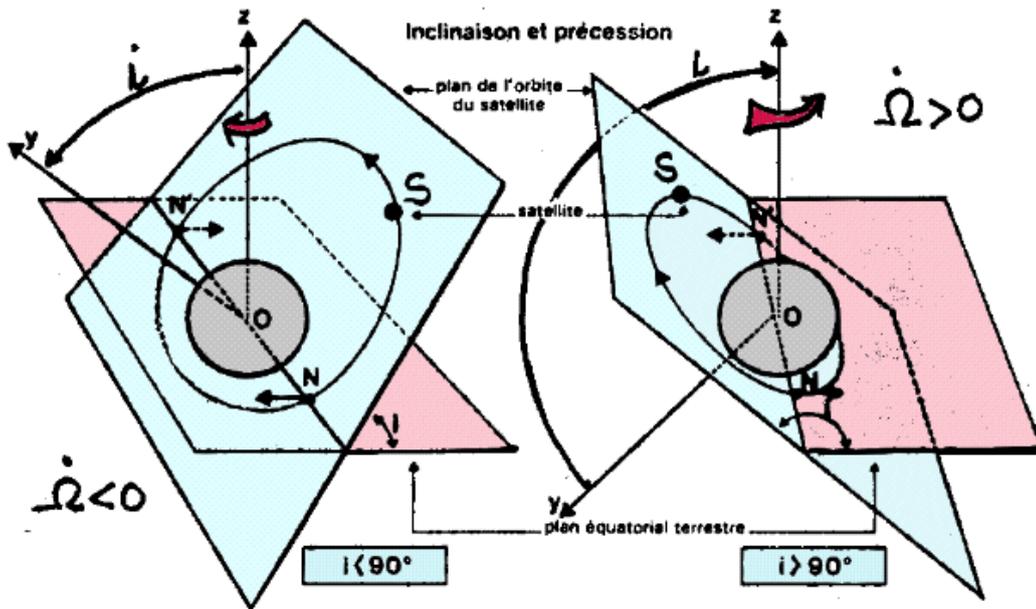
$$a = f(i) \Leftrightarrow \frac{a}{R_T} = 1.93669 (-\cos i)^{2/7}$$

Pour des inclinaisons supérieures à 90° , de manière à avoir une précession positive comme pour le soleil, et pour des altitudes entre 500 km et 1500 km, il est possible de choisir une inclinaison i donnant une précession égale à $\omega_{S/T}$. La fourchette des inclinaisons possibles se situe sensiblement entre 97° et 104° environ.

CONCLUSION : l'héliosynchronisme est possible pour $a < 1.937 R_T = 12354$ km, mais impose des inclinaisons supérieures à 90° et des orbites quasi polaires, notamment pour les orbites basses. En particulier, le lancement devra être effectué vers le nord-ouest, ce qui est défavorable pour utiliser la rotation terrestre.

b- interprétation de l'héliosynchronisme -

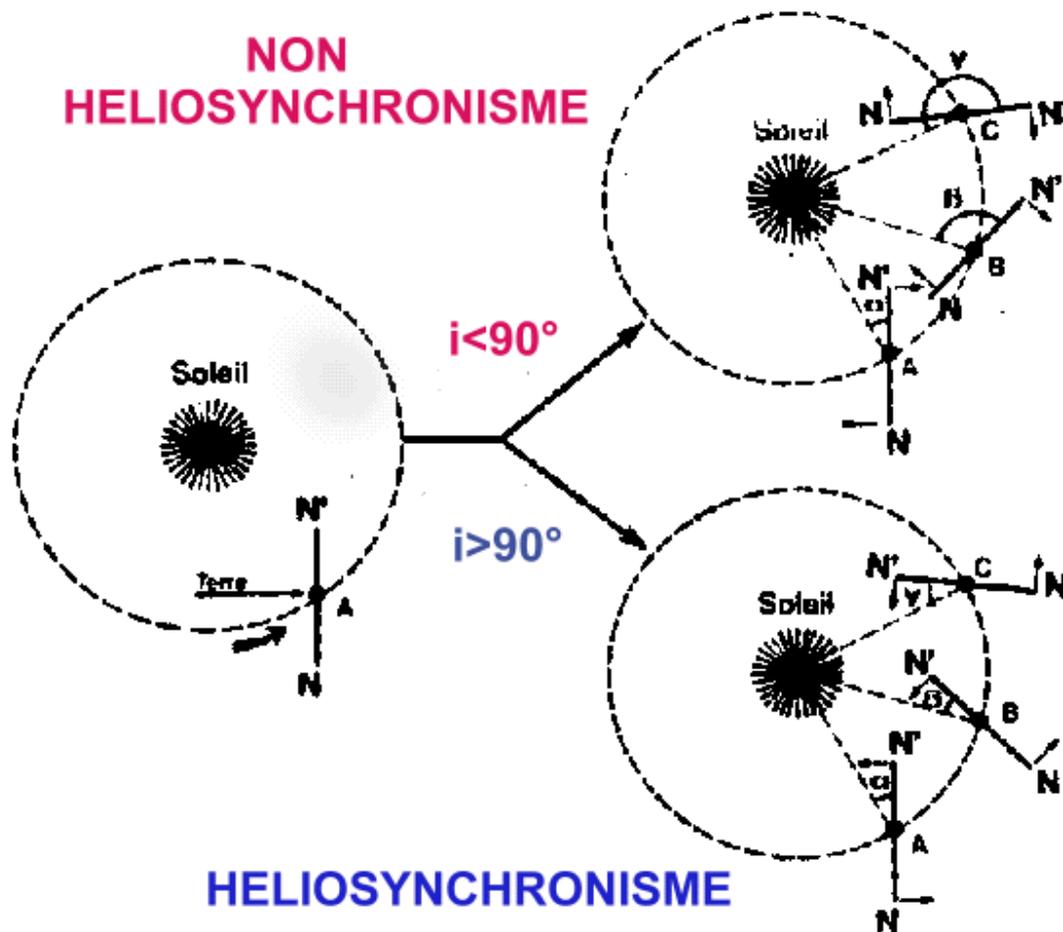
Les figures ci-dessous illustrent bien le mouvement de précession du soleil et de la ligne des nœuds en présence ou non de l'héliosynchronisme.



c- intérêt de l'héliosynchronisme -

Nous l'avons souligné dès le départ, la constance de l'angle θ assure un survol du nœud ascendant systématiquement à la même heure locale. Cette propriété se retrouve d'ailleurs de toute évidence pour une latitude donnée quelconque, toujours survolée à une même heure solaire locale, naturellement pas la même qu'au nœud ascendant.

Cette propriété garantit alors une grande stabilité d'image, en ce qui concerne les ombres, le relief, les couleurs, la réflexion d'albédo de la Terre.



Vous aurez sûrement réalisé que le nœud descendant est survolé à l'heure locale $H+12$ après l'heure H

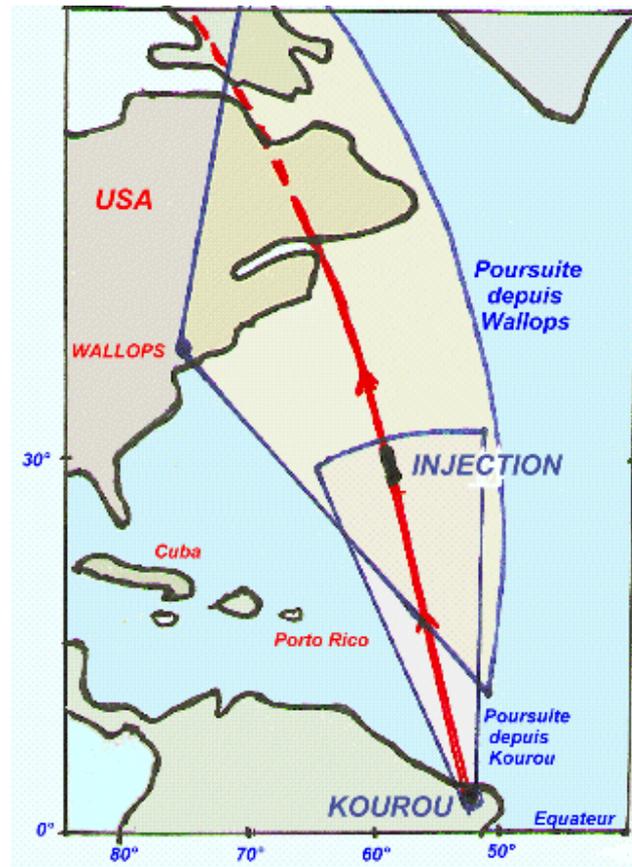
CONCLUSION : L'heure locale H de survol du nœud ascendant est une caractéristique du satellite, qui doit être soigneusement choisie en fonction de la mission. Par exemple SPOT passe au nœud descendant (là où se font les prises de vue) à 10 h 30 mn, donnant donc au nœud ascendant $H= 22h 30mn$.

Un avantage des orbites quasi polaires est d'assurer une couverture pratiquement complète de toutes les zones habitées du globe, ce qui est un atout en matière d'imagerie spatiale.

Un autre avantage, et pas des moindres, vue la grande quantité d'informations binaires nécessaires au codage des images, est que le survol des zones quasi polaires, assure une longue visibilité pour les centres de réception près du cercle polaire (ex: Kiruna)

d- contraintes imposées par l'héliosynchronisme -

Une inclinaison $i > 90^\circ$, nécessite, pour un tir de type Ariane à partir de Kourou, une injection à une latitude de $\lambda_0 = 30^\circ$ à 35° nord environ, avec obligation d'un azimut β_0 négatif, puisque $\cos i = \cos \lambda_0 \sin \beta_0$.



Il en résultera une perte de performance propulsive, car on ne profite pas du tout de la vitesse d'entraînement de la Terre, il y a même perte de vitesse (cas où la vitesse relative est plus grande que la vitesse absolue).

La deuxième contrainte est liée à l'heure H de survol du nœud ascendant, qui impose de toute évidence une heure de tir extrêmement précise. Les documents du CNES donnent, pour un lancement SPOT, une plage horaire de 5 mn de part et d'autre de l'heure nominale de tir. C'est donc très strict. Par contre le tir peut être réalisé tous les jours à la même heure.

3- CONDITION DE PHASAGE -

On appelle phasage d'une orbite, la propriété de la trace de se refermer au bout de la période de répétitivité T , ce qui signifie qu'après n "révolutions" le satellite repasse à la verticale du même point physique de la Terre.

En hypothèse képlérienne, cette notion est simple et se traduit par la condition que le rapport de la période satellite T_s à la période de la Terre T_t , est un nombre rationnel. Ou encore, il existe k et n entiers tels que $nT_s = k T_t$, avec k et n premiers entre eux.

La notion se complique notablement en présence de la perturbation due à J_2 , car les références d'angles et de vitesses angulaires sont mobiles.

3-1- Rappels sur les perturbations -

On rappelle les relations nécessaires, adaptées aux orbites circulaires uniquement, et sous la seule action de J_2 .

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) n_K$$

$$n = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\text{moyen}} = \left[1 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 (3 \cos^2 i - 1) \right] n_K$$

$$n_K = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad T_K = \frac{2\pi}{n_K}$$

3-2- Introduction de la période nodale –

Nous sommes amenés à approfondir la notion de période. En effet, dans le cas où la perturbation J_2 sévirait, l'orbite n'est plus fermée et donc en apparence la notion de période orbitale disparaît. Dans le cas d'une orbite héliosynchrone, le survol important est celui du nœud ascendant. Or c'est un point qui est toujours sur l'orbite, même si celle-ci est ouverte.

a- Définition : On appellera donc PERIODE NODALE le temps T_N qui sépare deux passages consécutifs au nœud ascendant.

b- Calcul de la période nodale : posant $\psi = \omega + \theta$ et tenant compte du fait que les valeurs moyennes des dérivées de ω et θ sont constantes, celle de θ valant n (moyen mouvement) sur un cercle, on a donc une expression simple de T_N .

$$T_N = \frac{2\pi}{n + \dot{\omega}} = \frac{2\pi}{n_K \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 (4 \cos^2 i - 1) \right]}$$

$$T_N \cong T_K \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 (4 \cos^2 i - 1) \right)$$

NB : en pratique comme i est quasiment nul, $T_N > T_s$, avec un écart dans le cas de SPOT de l'ordre de 1.8%.

3-3- Période nodale et répétitivité pour un héliosynchrone-

Tout repose sur la période de répétitivité T :

- T est un nombre entier k de jours solaires moyens de 24 h = 86400 s, car lorsque la trace se referme, l'heure locale au même lieu, est restée la même.
- T est un nombre entier N de période nodale, puisque lorsqu'on survole après le temps T le même lieu de l'équateur, on se retrouve toujours sur le nœud ascendant.
- les nombres entiers k et N sont nécessairement premiers entre eux, sinon l'occurrence de fermeture de la trace ne serait pas la première.

EXEMPLE : pour SPOT k =26, N=369, ce qui signifie une répétitivité de 26 jours avec 369 orbites différentes dans le cycle, soit pratiquement, à l'équateur, une trace par degré de longitude, fournissant une intertrace de 108 km.

4- LE SATELLITE D'IMAGERIE -

Suite à ces considérations, il faut faire le choix de l'orbite. Nous ne pouvons pas traiter à fond cette vaste question qui requiert des compétences techniques dans de nombreux domaines, notamment en optique spatiale, choix des bandes spectrales, numérisation des images, transmission de données, stabilisation du satellite, prises de vue pour des images stéréoscopiques etc...nous pouvons cependant retenir qu'un facteur dimensionnant important est l'optique et la résolution de la chaîne optique.

On n'oubliera pas non plus que d'autres perturbations comme celle provenant de la lune, agissent sur l'inclinaison, faussant ainsi la relation d'héliosynchronisme. Une maintenance du satellite est donc strictement obligatoire, elle n'est pas abordée ici.

C'est le choix des 2 nombres k et N qui détermine totalement la mission. Le lecteur intéressé par la question, étudiera dans les ouvrages spécialisés du CNES, en particulier sur les conséquences des propriétés arithmétiques de ces deux nombres, pour la création de sous cycles beaucoup plus courts que la période de répétitivité T .

La méthode est la suivante :

- k et N permettent de calculer exactement la période nodale T_N .
- il faut alors récupérer la période képlérienne T_K . Or celle ci dépend de a , i et T_N , mais $a = f(i)$, donc elle ne dépend que de a et T_N . On trouve donc a , soit par itération, soit par résolution d'une équation en a .
- la relation d'héliosynchronisme fournit alors l'inclinaison orbitale.
- Le calcul de l'heure de l'injection dépend du lanceur et de la base de tir et de l'heure locale H au nœud ascendant.

NB : La meilleure façon de s'initier à l'imagerie est de reconstituer la mission SPOT avec $a=7200$ km, $i=98^\circ.7$.

Chapitre 3-

FREINAGE ATMOSPHERIQUE

DUREE DE VIE

Ce cours est consacré au calcul de l'effet de l'atmosphère sur l'orbite d'un satellite. Le freinage atmosphérique limite la durée de vie d'un satellite.

Là encore, il ne faut pas attendre une extrême précision dans la modélisation de l'atmosphère, tant celle-ci est difficile et fluctuante.

1- FREINAGE ATMOSPHERIQUE -

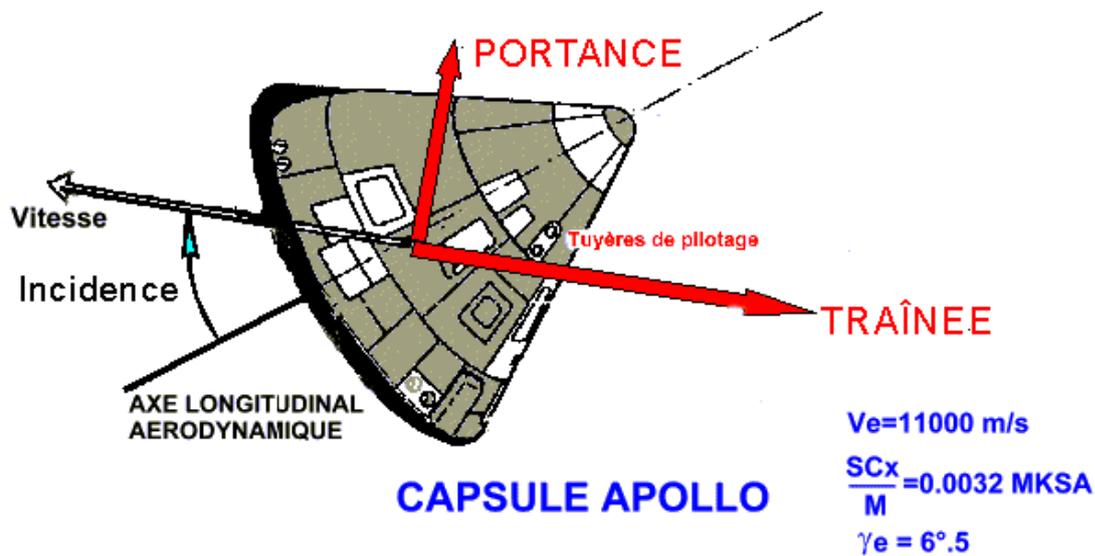
La Terre est entourée d'une couche de gaz, constituant l'atmosphère. Il est bien difficile de dire où l'atmosphère s'arrête.

1-1- Forces de traînée et de portance -

La présence de molécules même très raréfiée dans un gaz peut produire un effet de traînée si la vitesse du véhicule est très importante. Jusqu'à 1500 km l'effet peut être pris en compte.

Conventionnellement, on modélise l'effet de freinage d'un milieu gazeux, par une force dite AERODYNAMIQUE qui se décompose en deux composantes :

- L'une R_x , appelée TRAÎNÉE, opposée au vecteur vitesse (relative par rapport à l'atmosphère)
- L'autre R_z , appelée PORTANCE, normale au vecteur vitesse, dont le sens dépend de l'incidence i , sur la figure ci-dessous, l'incidence est dite >0 et la portance est vers le haut (vol sur le ventre). Si l'axe aérodynamique est "au dessus" du vecteur vitesse, la portance est vers le bas (vol dos).



On note conventionnellement ces deux forces :

$$\vec{R}_x = -\frac{1}{2} \rho(Z) SC_D V_R^2 \frac{\vec{V}_R}{V_R}$$

$$|\vec{R}_z| = \frac{1}{2} \rho(Z) SC_L V_R^2$$

- Z désigne l'altitude terrestre sol (mais ce pourrait être une autre planète pourvue d'une atmosphère comme Mars ou Vénus).
- $\rho(Z)$ est la fonction modélisation de l'atmosphère, dépendant de Z dans les modèles simples, mais aussi pour des modèles plus élaborés de :
 - L'activité solaire
 - De l'heure, qui conditionne la position en rotation de la Terre par rapport au soleil (ombre ou soleil)
 - De la latitude
 - De la saison qui influence le flux solaire suivant l'hémisphère et la latitude.
- C_D et C_L des coefficients aérodynamiques dits de traînée ou de portance, dépendant du satellite et de sa forme notamment. Ces coefficients sont de l'ordre de 2 à 4.
- V_R est la vitesse relative du satellite par rapport à la masse d'air.

1-2- Accélération perturbatrice –

Sauf pour des cas de rentrées atmosphériques où une portance est volontairement utilisée, en général on ne prend en compte que la traînée.

L'accélération perturbatrice s'obtient en divisant la force par la masse M, d'où :

$$\vec{\gamma}_p = -\frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} V_R \vec{V}_R$$

REMARQUE IMPORTANTE ET NON EVIDENTE :

Signalons ici, un résultat qui en général surprend le profane : celui qui est d'affirmer que plus un corps a des dimensions importantes, moins il est freiné. En effet l'accélération freinante a un module proportionnel à la quantité $A = SC_D/M$, qui est un coefficient de forme, appelé COEFFICIENT BALISTIQUE. Or la surface S du "maître couple" croît comme le carré de la dimension moyenne, alors que la masse croît comme le cube de la dimension moyenne. Il s'ensuit que A décroît quand la dimension moyenne croît. Ce phénomène est vérifiable pour toutes les pénétrations dans un fluide ou un gaz.

- Sprinters de 100 ou 200 m, fortement charpenté
- Nageurs, skieurs de descente et descendeurs de km lancé sur neige
- Différence de distance d'arrêt d'un petit navire et d'un gros tanker, etc...

Conclusion : les gros satellites sont moins perturbés que les microsattellites d'amateurs radio par exemple.

1-3- Modèles et ordres de grandeur –**a- Modèles de masse volumique de l'air -**

Divers modèles sont utilisés, citons en deux parmi 8 ou 9 possibles (voir ouvrages du CNES) :

- JACCHIA pour $Z > 115$ km.
- CIRA88 pour $Z < 120$ km, utiles pour les problèmes de retour d'engins ou de débris. Il apparaît comme le meilleur actuellement.

- Souvent en première approximation, on modélise l'évolution de la masse volumique de l'air, en utilisant des lois exponentielles, qui se raccordent par morceaux.

b Quelques ordres de grandeur -

- Orbites basses : $Z=250$ km avec $\rho(Z)= 6.8 \cdot 10^{-11}$ kg/m³
- Orbites héliosynchrones de type SPOT : $Z= 22$ km avec $\rho(Z)= 3 \cdot 10^{-14}$ kg/m³

c- Traînée -

- Pour SPOT à 822 km du sol, par exemple $M= 1800$ kg, $S= 12$ m², $C_D= 2.7$. On a V valant environ 7440 m/s et donc une perturbation d'accélération $\gamma_P= 1.5 \cdot 10^{-8}$ m/s².
- Ce même satellite à 250 km subirait $\gamma_P= 3.4 \cdot 10^{-5}$ m/s², ce qui est loin d'être négligeable.

1-4- Effets sur l'orbite -

De toute évidence, le freinage va dégrader l'énergie mécanique m_E , qui diminue. Comme l'énergie spécifique décroît, le demi grand axe, en particulier diminue.

Les équations de Gauss montrent aussi, que l'excentricité décroît, il y a naturellement des effets sur d'autres paramètres orbitaux.

L'effet conjugué sur a et e , a pour conséquences les plus visibles :

- Une circularisation de l'orbite
- Une diminution de l'altitude de l'apogée, plus importante que celle du périégée, car pour une orbite elliptique, le freinage est plus fort au périégée qu'à l'apogée (Vitesse plus grande et masse volumique de l'air plus élevée aussi).
- Une diminution moindre du périégée.

L'ensemble des effets conduira le satellite non piloté à rentrer dans les couches denses de l'atmosphère pour y mourir brutalement calciné en quelques dizaines de minutes. Ceci nous amènera à parler de la durée de vie.

PARADOXE : Pour une orbite circulaire, il est facile de montrer à partir du théorème de l'énergie, que l'effet de la traînée, conduit non pas à une perte de vitesse, mais à une

augmentation de celle-ci, parce que le rayon de l'orbite diminue constamment. D'où vient le surcroît d'énergie? Tout simplement de la récupération sur le potentiel gagné lors de la descente.

2- DUREE DE VIE D'UN SATELLITE -

Il est clair que nous parlons ici de ce qu'il reste à "vivre" pour un satellite livré à lui-même, lorsque les opérations de maintenance d'orbite ne sont plus assurées. On appelle cette phase, la CHUTE du satellite.

Quelle que soit la finesse du modèle d'atmosphère, il est difficile de prévoir à un jour près, la durée de la chute. Il est tout aussi difficile de prévoir longtemps à l'avance, le point de chute sur le sol, d'éventuels débris. Ces prévisions ne peuvent se faire que dans les toutes dernières heures de la vie du satellite.

L'activité solaire dont le cycle est de 11 ans, un flux pouvant varier de 80 à 200 KW/m² et celle géomagnétique de la Terre jouent beaucoup sur les prévisions.

De plus, il faut impérativement prendre en compte les perturbations d'orbite qui font évoluer les paramètres orbitaux et donc notamment les périodes d'éclipse.

2-1- Ordre de grandeur -

Donnons donc quelques valeurs approximatives :

	Altitude Z en km	Durée de vie en jours
$\frac{SC_D}{M} = 2.2$	200	Quelques
	250	60
	300	220
	500	Quelques années
	1000	Siècles
A titre indicatif	1500	10000 ans

Le satellite Spot, vers 822 km, descend de 2.5 m/jour. Naturellement, il est surveillé et son altitude est régulièrement rétablie à sa valeur nominale.

2-2- Paramètres importants -

L'expérience et les simulations montrent que les deux paramètres importants, sur la durée de vie sont :

- Le coefficient balistique
- L'activité solaire

Chapitre 4-

Perturbation luni-solaire

Afin de bien cerner l'origine des perturbations créées sur une orbite, par la Lune ou le Soleil, nous détaillons le calcul de ces forces perturbatrices en revenant au principe de base de la mécanique.

Il n'est pas question ici de traiter toutes les conséquences de ces perturbations mais seulement de dégager le mode de calcul permettant leur introduction dans les équations du mouvement.

1- RAPPELS SUR LE PROBLEME DES N CORPS -

Considérons un véhicule M de masse m, en mouvement sous l'action d'un corps central la Terre et de 2 astres la Lune et le Soleil. Nous désirons tout naturellement rapporter le mouvement à un repère R de directions stellaires et d'origine le centre de la Terre. Un tel repère est par exemple le géocentrique équatorial.

1-1- Loi fondamentale de la dynamique en axes galiléens -

$$m\vec{\Gamma}_a(M) = \Sigma \vec{F}_{ex}$$

Cette loi ne peut s'appliquer que dans un repère inertiel (galiléen).

Problème: notre repère R dont l'origine, la Terre, est soumise à l'attraction conjuguée de la lune et du soleil, n'est pas galiléen car cette origine a une accélération non nulle:

U_S et U_L sont les unitaires pointant depuis la Terre le Soleil et la Lune et D_S , D_L les distances du soleil et de la lune à la Terre à l'instant du calcul.

Ces distances sont accessibles, si précision est souhaitée, par l'intermédiaire des éphémérides, à demander au Bureau des Longitudes à Paris ou grâce à des routines.

Le principe de relativité de Einstein - Galilée indique que la parade à cette difficulté consiste à rajouter aux forces réelles en jeu, les forces dites d'inertie.

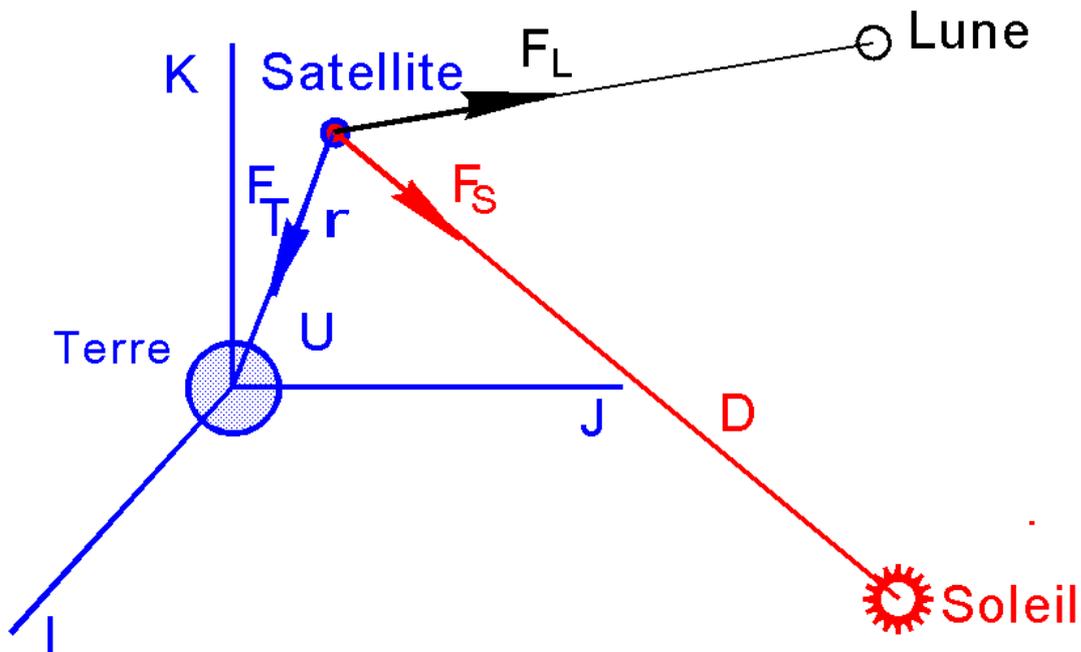
Ces forces fictives se réduisent dans le cas où R est en translation par rapport à un galiléen, aux forces d'inertie d'entraînement de l'origine du repère c'est à dire de la Terre soumise aux attractions conjuguées du Soleil et de la Lune.

Il faudra donc ajouter exactement le vecteur accélération de la Terre vérifiant :

$$m\vec{\gamma}_a(T) = -\frac{m\mu_s}{D_s^2}\vec{u}_s^* - \frac{m\mu_l}{D_l^2}\vec{u}_l^*$$

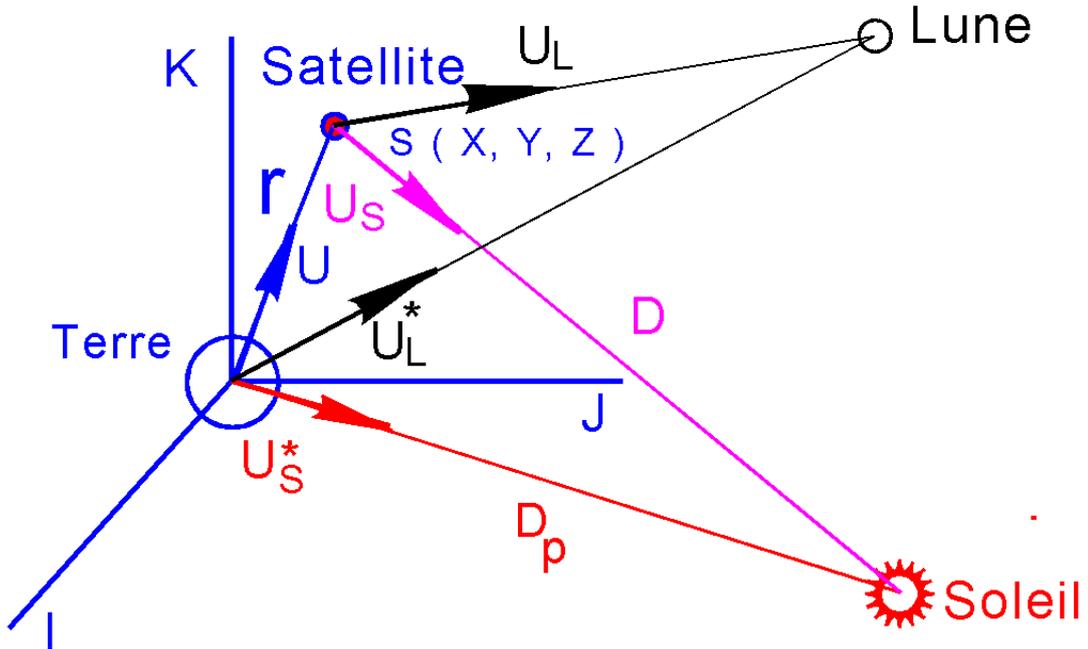
aux forces attractives extérieures réelles:

$$\vec{F}_{ex} = \vec{F}_T + \vec{F}_s + \vec{F}_l = -\frac{m\mu_T}{r^2}\vec{u} + \frac{m\mu_s}{r_s^2}\vec{u}_s + \frac{m\mu_l}{r_l^2}\vec{u}_l$$



Finalement en axes relatifs du repère R nous aurons l'accélération du véhicule donnée par la relation ci-après, à utiliser telle quelle lorsque le véhicule est loin de la Terre et avec des développements limités au voisinage de la Terre, ce que nous montrons plus loin:

$$\vec{\gamma}(M) = -\frac{\mu_T}{r^2}\vec{u} + \left[\frac{\mu_s}{r_s^2}\vec{u}_s - \frac{\mu_s}{D_s^2}\vec{u}_s^* \right] + \left[\frac{\mu_l}{r_l^2}\vec{u}_l - \frac{\mu_l}{D_l^2}\vec{u}_l^* \right]$$



1-2- Notion de perturbation -

La relation encadrée fait apparaître nettement 2 crochets représentant les accélérations perturbatrices créées par les 2 astres au regard de l'accélération considérée comme principale créée par l'attraction de la Terre.

$$\vec{\gamma}_{\text{Pert Soleil}} = \frac{\mu_s}{r_s^2} \vec{u}_s - \frac{\mu_s}{D_s^2} \vec{u}_s^* \quad \vec{\gamma}_{\text{Pert Lune}} = \frac{\mu_l}{r_l^2} \vec{u}_l - \frac{\mu_l}{D_l^2} \vec{u}_l^*$$

2- TRAITEMENT DE LA PERTURBATION D'UN ASTRE -

Restons généraux avec p indice de l'astre (p = s ou p = l), la perturbation est :

$$\vec{F}_p = \frac{\mu_l}{|\vec{D}_p - \vec{r}|^2} \vec{u}_p - \frac{\mu_l}{D_p^2} \vec{u}_p^*$$

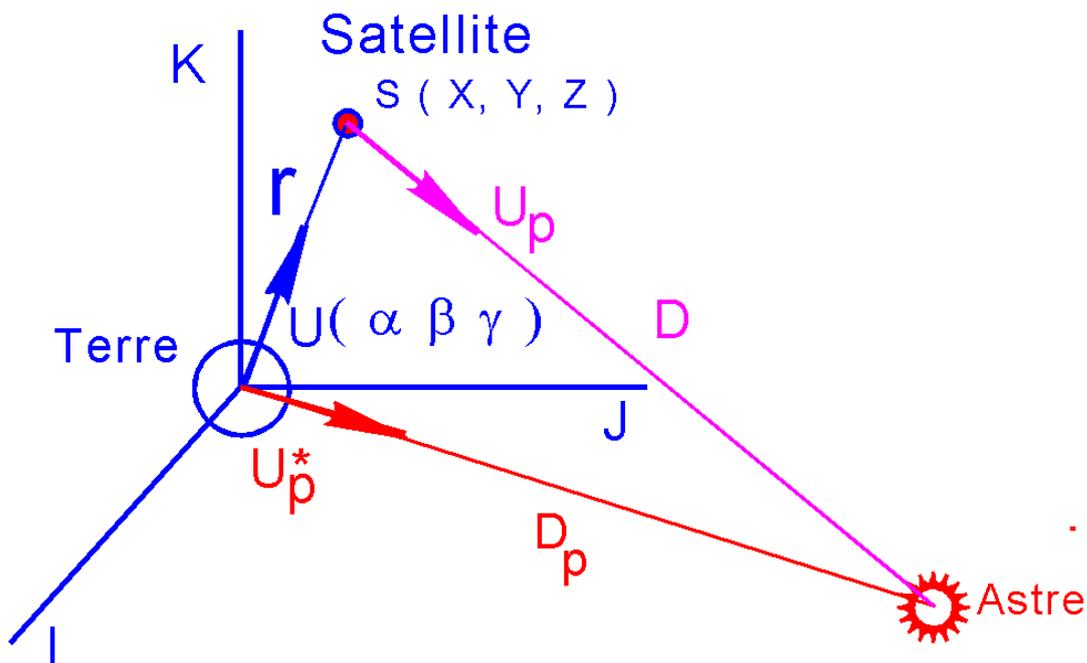
2-1- Le potentiel associé -

A cette encore accélération ou force (par kg), on associe une énergie potentielle U_p plus facile à traiter en tant que scalaire que les vecteurs, lors de développements limités.

Revenant aux définitions du potentiel et considérant que la variable est le rayon vecteur et non le temps t , le lecteur établira l'expression de l'énergie potentielle (au sens de la mécanique lagrangienne) grâce à la relation différentielle :

$$\delta W = \vec{F}_p \cdot \delta \vec{r} = -\delta U$$

$$U = -\mu_p \left[\frac{1}{\|\vec{D}_p(t) - \vec{r}\|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{D}_p(t)}{\|\vec{D}_p(t)\|^3} \right]$$



2-2- Application au calcul de la force perturbatrice au voisinage de la Terre -

r reste petit devant D_p ce qui nous permet un développement limité à l'ordre 2 par rapport à r/D . Le calcul donne, en faisant intervenir l'angle S entre les 2 directions véhicule et Soleil vus depuis la Terre:

$$\frac{1}{\|\vec{D}_p(t) - \vec{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2rD \cos S}}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_p}{D(t)^3} r^2 \left[1 - 3 \cos^2 S(r,t) \right] + f(t)$$

Nous rappelons que la force se calcule à partir du potentiel par le gradient (à temps bloqué) c'est à dire uniquement par rapport à la position $r(x, y, z)$.

L'expression cartésienne du potentiel découle des coordonnées x, y, z du véhicule et du calcul de l'angle S par les relations :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad r \cos S = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_p}{D(t)^3} \left[x^2 + y^2 + z^2 - 3(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \right] + f(t)$$

On trouve ainsi l'expression de la perturbation utilisable dans une simulation numérique au voisinage de la Terre, où a, b, γ désignent les cosinus directeurs de la direction du Soleil vu depuis la Terre

$$\vec{F}_p \cong \begin{bmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\mu_p}{D^3} \begin{bmatrix} 3\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z) - x \\ 3\beta(\alpha x + \beta y + \gamma z) - y \\ 3\gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z) - z \end{bmatrix}$$

2-3- Ordre de grandeur de la perturbation -

Plaçons-nous dans un cas simple, mais réaliste d'une orbite dans l'écliptique, le soleil pointé par l'unitaire J .

Alors $a = 0, b = 1, \gamma = 0$.

$$\vec{F}_p \cong \frac{\mu_p}{D^3} \begin{bmatrix} -x \\ 2y \\ 0 \end{bmatrix}$$

CAS DU SOLEIL : $\mu_s = 13.27 \cdot 10^{19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ $D = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Parcourons les sommets de l'orbite et indiquons dans le tableau le niveau des accélérations perturbatrices en m/s^2 :

Périgée	C (petit axe)	Apogée	D(petit axe)
$F_x = -2.6 \cdot 10^{-6}$	$F_x = -6.6 \cdot 10^{-6}$	$F_x = 1.68 \cdot 10^{-6}$	$F_x = 6.6 \cdot 10^{-7}$
$F_y = 0$	$F_y = 8.4 \cdot 10^{-6}$	$F_y = 0$	$F_y = 8.4 \cdot 10^{-7}$

Le lecteur maintenant averti du mode de calcul de la perturbation, montrera que la perturbation lunaire a des effets nettement plus importants.

Les ouvrages spécialisés du CNES, en particulier traitent les conséquences de cette perturbations dans le plus grand détail.

$$\text{CAS DE LA LUNE : } \mu_L = 4.89 \cdot 10^{11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \quad \Delta L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Supposant la lune disposée sur l'axe x_2 comme le soleil précédemment mais naturellement plus près (à environ 384000 km de la Terre) des calculs analogues montrent qu'il faut multiplier les résultats par 2.

Périgée	C (petit axe)	Apogée	D(petit axe)
$F_x = -5.72 \cdot 10^{-6}$	$F_x = -1.45 \cdot 10^{-6}$	$F_x = 3.7 \cdot 10^{-6}$	$F_x = 1.45 \cdot 10^{-6}$
$F_y = 0$	$F_y = 1.85 \cdot 10^{-6}$	$F_y = 0$	$F_y = 1.85 \cdot 10^{-6}$

C- VOYAGES INTERPLANÉTAIRES

Nous abordons maintenant les voyages interplanétaires qui constituent l'une des plus grandes aventures humaines du 20^{ème} siècle, dans la recherche de l'origine de l'univers et plus particulièrement de la vie terrestre ou extra-terrestre. Ces voyages peuvent concerner une planète, un astéroïde ou une comète. Tous ces corps du système solaire, présentant chacun un intérêt spécifique, sont donc des cibles privilégiées.

1- HISTORIQUE SUCCINT -

Il n'est pas possible de passer en revue toutes les missions réalisées à ce jour. On peut cependant rappeler les principales étapes de l'exploration et de l'étude des planètes ou de l'environnement solaire. *Les encyclopédies de tout type fourniront de manière exhaustive les renseignements souhaités.*

- 12 septembre 1959 : La sonde soviétique LUNA II atteint la lune en 36 H.
- 4 octobre 1959 : Premières photos de la face cachée de la lune par LUNA III.
- 31 janvier 1966 : Premier alunissage en douceur.
- 1966-1973 : Préparation des vols Apollo par les missions américaines LUNA ORBITER.
- 1970 : Première sonde soviétique VENERA 7 qui explore l'atmosphère de Vénus.
- 3 mars 1972 : Envoi de PIONEER 10 vers Jupiter survolée en décembre 1973.
- 5 avril 1973 : Envoi de PIONEER 11 vers Jupiter, planète utilisée pour un tremplin vers Saturne survolée en décembre 1979.
- 29 mars 1974 : Lancement de MARINER 10 pour une visite de Mercure, avec utilisation d'un tremplin gravifique assisté par Vénus.
- 1972-1975 : Avec les sondes VENERA 9 et 10 en 1975, sur le sol de Vénus, viendront les premières photographies du sol.
- 1976 : Récupération de sol lunaire par les soviétiques.
- 1971-1975 : Lancements vers Mars des sondes soviétique Mars 2 à Mars 7 et des sondes américaines VIKING le 20/08/75 et le 9/09/75.
- 1978 : Ensemble de missions américaines PIONEER-VENUS pour une étude poussée de Vénus.
- 24 janvier 1986 : VOYAGER 2 survole Uranus.

- 14 mars 1986 : traversée de la comète de Halley par une sonde européenne GIOTTO lancée par Ariane sur étude de l'ESA. Giotto après avoir photographié Halley continuera vers une autre comète.
- 5 mai 1989 : Lancement par la navette Atlantis de la sonde MAGELLAN pour une cartographie radar de Vénus.
- Octobre 1990 : Lancement par la navette US de la sonde ULYSSES pour une étude des pôles du Soleil en novembre 94 et juillet 95. La trajectoire très fortement inclinée de 79° sur l'écliptique a utilisé un tremplin sur Jupiter.
- Novembre 1995 : Lancement de la sonde SOHO placée à un des points de Lagrange du système Terre-Soleil, dans une situation idéale pour étudier le Soleil en continu.
- 1996 : Survol de Jupiter par la sonde GALILEO qui utilise 3 trempins gravitationnels (2 sur la Terre et 1 sur Vénus) et visite au passage deux astéroïdes IDA et GASPRA. Cette sonde avait été lancée en octobre 1989.
- 20 janvier 2003 : Lancement prévu de la sonde ROSETTA vers la comète P/Wirtanen atteinte en 2011. Il est prévu de poser un module sur le noyau de la comète.

2- PROBLEME DE LAMBERT -

2-1- Enoncé du problème -

L'hypothèse de travail est celle d'un potentiel newtonien à un seul corps attractif.

Le problème de Lambert consiste à déterminer une trajectoire képlérienne, qui relie deux points donnés A et B, non alignés avec le centre attractif O, en un temps de vol fixé ΔT .

2-2- Résultat -

C'est un problème avec conditions aux limites, présentant :

- Une seule solution à moins d'un tour, pour les orbites elliptiques et naturellement pour celles ne permettant pas deux tours, hyperbole ou parabole.
- Deux solutions pour le cas elliptique à plus d'un tour.

2-3- Formulation géométrique -

Notons les données:

- O, le centre principal attractif.
- A et B, les deux points de départ et d'arrivée du voyage.
- ΔT la durée imposée du voyage.

a- Remarques initiales -

La donnée du centre attractif O et de deux points A et B, n'appartenant pas à un diamètre focal, permet de définir complètement le plan orbital OAB. Ceci équivaut à connaître l'inclinaison orbitale i et la longitude vernale Ω à 180° près.

Il reste donc 3 paramètres orbitaux à préciser : a , e , ω , et les valeurs φ_A et φ_B de l'anomalie excentrique en A et B. La connaissance des deux coordonnées de A et B dans le plan orbital et la durée ΔT du voyage entre A et B sont donc suffisantes pour calculer 5 inconnues avec 5 équations.

b- approche géométrique -

Nous recherchons 2 inconnues, le second foyer F de la conique (ellipse ou hyperbole), et son demi grand axe a_s , tels que soient satisfaites les relations:

- ELLIPSE SOLUTION: $AO+AF=BO+BF=2a_s$, ce qui équivaut à $FA-FB=OB-OA > 0$ dans le cas de figure du dessin. Le foyer F appartient donc à une branche d'hyperbole (la noire sur la figure) définie par ses 2 foyers A et B et le grand axe $2a=OB-OA$.

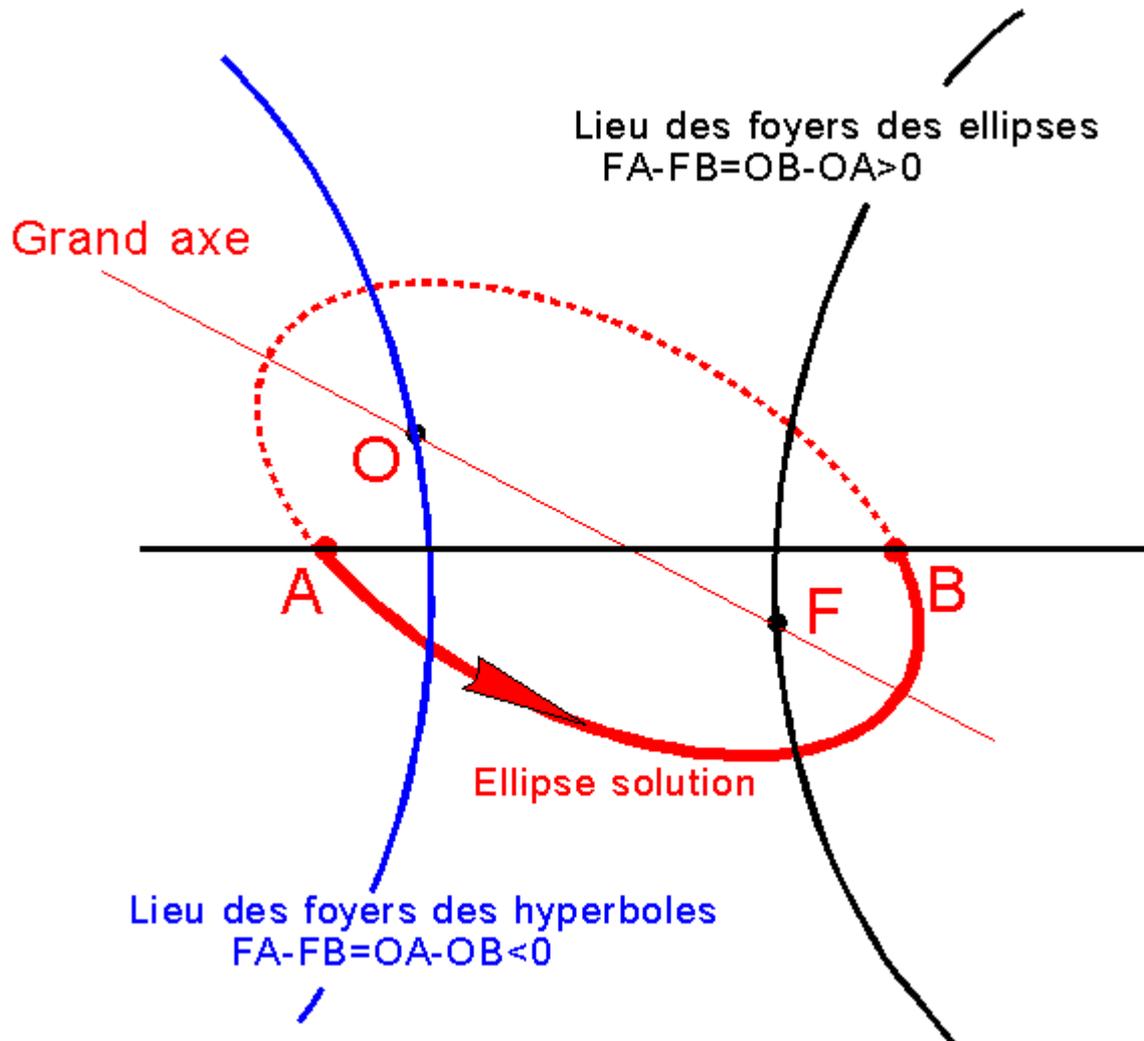
Ou

- HYPERBOLE SOLUTION: $AO-AF=BO-BF=2a_s$ et aussi $AO-AF=BO-BF=-2a_s$, ce qui donne dans les deux cas, $FA-FB=OA-OB < 0$ et une seule interprétation: Le foyer F appartient donc à une branche d'hyperbole (la bleue sur la figure) définie par ses 2 foyers A et B et le grand axe $2a=OB-OA$.

Considérons le cas de la recherche, si elle existe, d'une solution elliptique. Alors à chaque position de F sur sa branche d'hyperbole, position donc repérée par un paramètre x , correspond une valeur $a_s(x)$ du demi grand axe, et un temps de parcours de A à B, $\Delta T(x)$.

La solution cherchée, est celle qui répond au temps de parcours fixé par le problème de Lambert. On est donc ramené à la résolution d'une équation à une inconnue.

NB : Dans le cas d'une ellipse, on conçoit aisément que si le temps de parcours est trop petit, une solution elliptique n'est pas possible. Par contre pour l'hyperbole, elle existe toujours.



c- Routine de calcul -

Vous trouverez un exécutable et un programme source en Pascal résolvant le problème de Lambert dans le cadre d'hypothèses simplifiées, comme exposé ci-après. De plus ce programme n'envisage que les orbites de transfert elliptiques.

3- HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES -

Nous l'avons déjà souligné, dans la présentation des mouvements képlériens, sous l'action simultanée de plusieurs centres attractifs, le mouvement ne possède pas de solution exprimable analytiquement. Seule la simulation numérique permet de résoudre le problème.

En pratique, on a besoin de tester l'influence sur la trajectoire de tel ou tel paramètre, et surtout sans avoir recours dans un premier temps à une simulation numérique lourde. On est donc tenu de poser quelques simplifications.

3-1- Hypothèse des sphères d'influence associées aux planètes -

Pour une présentation détaillée: voir cours sur les mouvements képlériens.

Un voyage classique consiste :

- 1- A partir d'une planète, jusqu'à ce jour la Terre.
- 2- A utiliser l'attraction principale du soleil, pour rejoindre la banlieue de la planète cible.
- 3- Manœuvrer pour se faire capturer par la planète visée et travailler en orbite autour d'elle ou "descendre" se poser sur le sol de cette planète, ou éventuellement utiliser cette planète comme tremplin gravifique.
- 4- Dans ce dernier cas ,pour le moment non réalisé, il faut prévoir pour l'avenir :
 - a- De repartir.
 - b- De revenir vers la Terre.
 - c- De se poser sur le sol terrestre.

Rappelons quand même succinctement, que l'on peut considérer, dans le système solaire, que chaque planète est entourée d'une zone quasiment sphérique, " sa banlieue", ou mieux sa sphère d'influence telle que :

- Dans la sphère d'influence, on néglige les autres attractions et on ne prend en compte que celle de la planète.
- Hors de la sphère d'influence, on ne conserve que l'attraction du corps principal, le soleil, en négligeant les autres actions.

NB : Indiquons que le rayon de la sphère d'influence de la Terre est de l'ordre de 805 à 930000 km, suivant son mode de calcul.

3-2- Comment faut-il, dans les calculs, comprendre cette hypothèse ?

Au stade d'un avant projet, on procédera ainsi, en décomposant le voyage en trois étapes classiques essentielles et une quatrième à la demande :

PHASE DE DEPART : Dans la sphère d'influence de la planète de départ, temps de vol court moins de 1 jour :

- Trajectoire hyperbolique d'évasion.
- Repère inertiel planétocentrique (par exemple géocentrique équatorial) avec vitesses rapportées à la planète et distance à la planète.
- Corps principal unique et force attractive unique : la planète de départ.
- Rayon de la sphère d'influence de la planète, considéré comme infini.

PHASE HELIOCENTRIQUE : C'est la partie principale du voyage, de quelques mois à quelques années :

- Trajectoire en principe elliptique, mais rien ne s'oppose à ce qu'elle soit hyperbolique.
- Repère inertiel héliocentrique (par exemple héliocentrique écliptique), avec vitesses rapportées au soleil et distance au soleil.
- Corps principal unique le soleil, force attractive unique.
- La sphère d'influence des planètes (départ et arrivée), considérées comme infiniment petites et donc de rayon nul. C'est le premier stade de l'approximation.

PHASE D'ARRIVEE : Comme la "sonde" se présente à l'infini de la planète, la trajectoire d'arrivée est obligatoirement une conique à branche infinie, donc une hyperbole. La durée de cette phase est en général petite, moins d'un jour, pour les planètes basses, sauf peut être pour Jupiter, avec une durée de l'ordre de 40 jours.

- Repère inertiel planétocentrique, avec vitesses rapportées à la planète et distance à la planète.
- Corps principal unique et force attractive unique : la planète d'arrivée.
- Rayon de la sphère d'influence de la planète, considéré comme infini.

MANŒUVRES : Naturellement, au voisinage du périégée de l'hyperbole de descente vers la planète, on peut envisager différents scénarios :

- Un freinage et une insertion sur une orbite de travail elliptique, de période bien choisie pour correspondre à un phasage avec la Terre 6, 12, ..., 48 heures, par exemple. Une telle manœuvre nécessite un moteur fonctionnant en rétrofusée.
- Une manœuvre identique à la précédente suivie d'une insertion en orbite circulaire basse, pour préparer une descente sur la surface de la planète (si

celle-ci le permet). L'utilisation partielle ou totale de l'atmosphère (si elle existe) est donc possible, en parallèle avec un freinage contrôlé, motorisé.

- Un survol, éventuellement corrigé par des manœuvres intermédiaires, peut aussi conduire à une réinsertion dans le système solaire, soit pour gagner de la vitesse, soit pour changer de direction, et en général les deux. Une telle manœuvre est appelé *Tremplin gravifique*.

3-3- Hypothèse sur les planètes -

Restant au niveau des approximations les plus grossières, bien qu'excellentes, on rajoute :

- Les planètes appartiennent (à part Pluton) à l'écliptique, donc inclinaison orbitale nulle.
- Les planètes sont sur des orbites circulaires, naturellement de centre le soleil. Donc excentricité nulle.

3-4- Méthode des coniques juxtaposées -

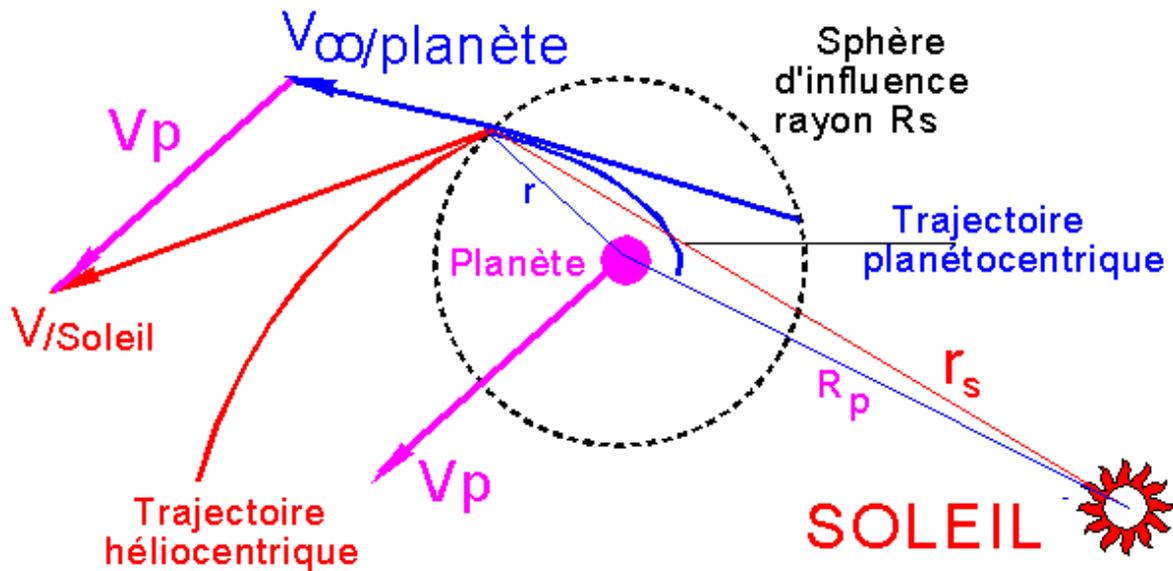
On ne retient que l'hypothèse des sphères d'influence, de toute évidence incontournable pour des calculs à la main. On ne suppose pas le rayon des sphères d'influence nul.

Un voyage interplanétaire apparaît donc constitué de trois arcs de conique, dites juxtaposées :

- Un ARC HYPERBOLIQUE d'évasion au départ.
- Un ARC ELLIPTIQUE DE TRANSITION d'une sphère à l'autre.
- Un ARC HYPERBOLIQUE de descente à l'arrivée.

Ces trois arcs se raccordent à la traversée des sphères d'influence, avec continuité de la tangente.

NB : Il ne faut pas être choqué par le fait que lors du changement de phase, la nature de la trajectoire change. C'est simplement le changement de repère de référence qui donne l'illusion, que brutalement la norme de la vitesse a changé.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_s = \vec{R}_p + \vec{r} \quad |\vec{r}| = R_s \\ \vec{V}_{\text{Soleil}} = \vec{V}_{\infty/\text{planète}} + \vec{V}_P \end{array} \right.$$

4- TIR QUELCONQUE -

La libération de l'attraction terrestre nécessite une conique à branche infinie, qui ne peut donc être qu'une hyperbole.

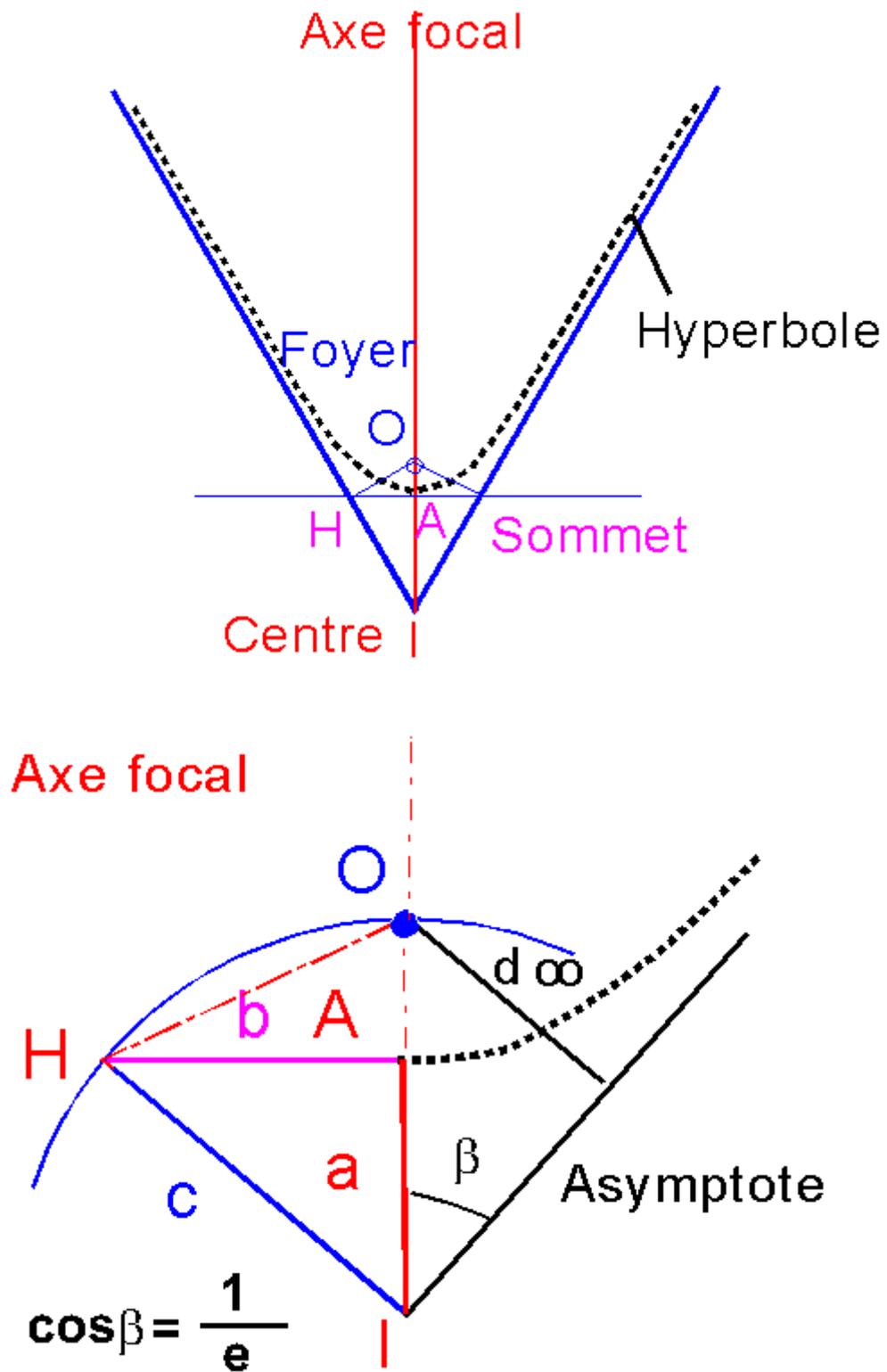
4-1- Rappels géométriques sur l'hyperbole -

Les dessins suivants explicitent et rappellent les propriétés, sans démonstration:

O est le foyer actif, ses projections sur les asymptotes définissent une droite, tangente au sommet A à l'hyperbole. I désigne le point de concours des asymptotes, c'est le centre de symétrie de l'hyperbole complète.

Ci dessous, apparaissent:

- Les trois longueurs caractéristiques d'une conique, a, b, c. Pour l'hyperbole $c > a$, avec $c^2 = a^2 + b^2$
- Le demi angle d'ouverture β des asymptotes, qui jouera un rôle important dans le tremplin gravitationnel.

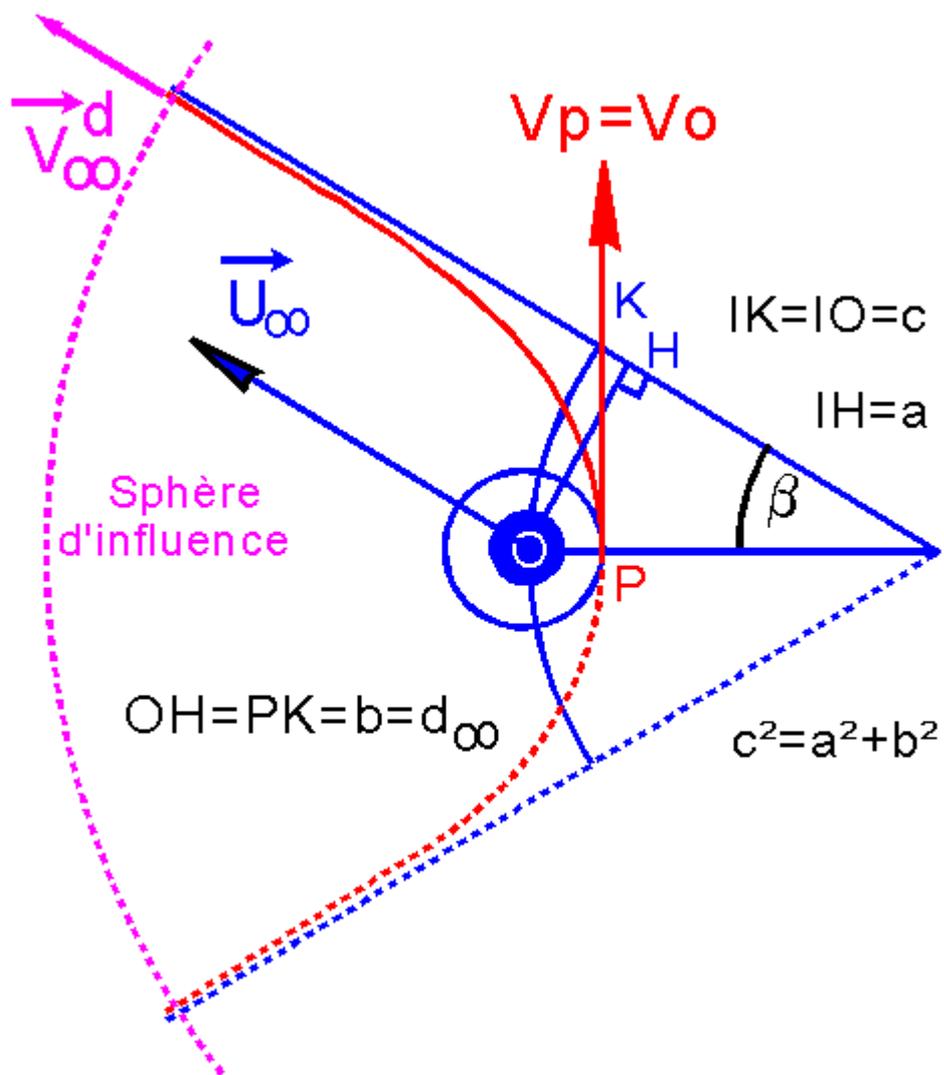


d_{∞} : distance du centre attractif à l'asymptote : $d_{\infty} = c \sin \beta$.

4-2- Rappels théoriques –

On rappelle sans démonstration, les deux lois importantes des mouvements képlériens et le paramétrage classique, par une variable ϕ non interprétable géométriquement.

Les notations devraient maintenant s'imposer, par analogie avec celles de l'ellipse.



$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{\mu}{r_0} \cong \frac{1}{2}V_\infty^2$$

$$K = Vr \cos \gamma = V_0 r_0 \cos \gamma_0 = V_p r_p = \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}$$

$$r = a(e \cosh \phi - 1) \quad r_p = a(e - 1)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{\phi}{2} \quad t - t_p = a \sqrt{\frac{a}{\mu}} (\operatorname{esh} \phi - \phi)$$

E est l'énergie spécifique positive sur l'hyperbole et K la constante des aires.

4-3- Phase de départ d'une planète -

Les hypothèses ont été posées plus haut.

On notera V_0 la vitesse absolue de départ, Z_0 l'altitude sol, correspondant à un rayon r_0 . L'évasion demande, de toute évidence une vitesse de tir supérieure à la vitesse de libération.

$$V_0 > V_{l_0} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

La sonde s'éloigne de la Terre, jusqu'à traverser sa sphère d'influence, considérée comme l'infini de la Terre.

La vitesse est alors constante et portée par l'asymptote de l'hyperbole. On l'appelle la vitesse à l'infini.

Comment atteindre cette vitesse ?

Deux approches existent, dépendant de la nature du lanceur, par exemple ARIANE IV ou V ou bien la NAVETTE US.

- L'INJECTION DIRECTE réalisée par un troisième ou quatrième étage d'un lanceur, qui place la sonde interplanétaire directement sur son hyperbole de transfert, à l'issue de la combustion du dernier étage.
- Les lanceurs Ariane en sont capables ainsi que les fusées Atlas américaines.
- L'UTILISATION D'UNE ORBITE DE PARKING intermédiaire, généralement circulaire, mais ce n'est pas une obligation. Par exemple, la sonde GIOTTO avait été envoyée vers la comète de Halley, après avoir parcouru plusieurs révolutions sur une orbite GTO classique du lanceur Ariane.

Un moteur supplémentaire est donc nécessaire pour "décrocher" du parking et partir en "hyperbolique".

Quelle est la manœuvre la plus économique ?

Appelons V_c la vitesse sur le parking circulaire et V_0 la vitesse de tir sur l'hyperbole. L'incrément de vitesse à délivrer est la différence vectorielle

$$\Delta V = |\Delta \vec{V}| = |\vec{V}_0 - \vec{V}_c|$$

De toute évidence le minimum de ΔV est obtenu lorsque V_c et V_0 sont colinéaires et donc lorsque le départ le plus économique est au périhélie de l'hyperbole. Nous supposons qu'il en est ainsi, bien que ce ne soit pas une obligation.

Notions liées à l'évasion ?

Tout d'abord, il apparaît que la direction de la vitesse à l'infini de sortie de la sphère d'influence est capitale. Elle est caractérisée par :

- Son module calculable par :

$$V_\infty = \sqrt{2E} = \sqrt{V_0^2 - \frac{2\mu_T}{r_0}} = \sqrt{\frac{\mu_T}{a}}$$

- Sa direction, donnée par l'asymptote et caractérisée par un unitaire, un angle, une distance :

$$\vec{U}_\infty = \frac{|\vec{V}_\infty|}{V_\infty} \quad \cos\beta = \frac{1}{e} \quad d_\infty = b = a\sqrt{e^2 - 1}$$

NB: en pratique le point d'injection et les conditions de tir fixent la direction par 2 angles, une déclinaison et une ascension droite dans le géocentrique équatorial.

- On constate que l'énergie E sur une hyperbole et la vitesse à l'infini sont étroitement liées. Plus loin dans l'étude du tremplin gravitationnel, on verra que E joue encore un rôle capital. De plus E représente très bien les capacités d'un lanceur à mettre en évasion et créer une vitesse à l'infini pour une certaine masse utile.

Les ingénieurs ont alors introduit une caractéristique simple appelée C_3 :

$$C_3 = 2E = V_\infty^2$$

Le "MANUEL UTILISATEUR" d'un lanceur donne en général la courbe des performances C_3 en fonction de M_u , la masse utile envoyée et de certains autres paramètres, notamment la déclinaison de la vitesse à l'infini.

- Tirs "montants" ou "descendants" : il est facile de se convaincre que :
 - Pour visiter des planètes plus basses que la Terre (Vénus ou Mercure), il faut "descendre" par rapport au Soleil, donc être moins énergétique, ce qui demande de placer la vitesse à l'infini dans une direction plutôt opposée à la vitesse de la Terre.

- Pour "monter" et visiter les planètes plus "hautes" que la Terre (Mars, Jupiter, etc...), il faut augmenter l'énergie et donc profiter au mieux de la vitesse de la Terre. On placera donc la vitesse à l'infini plutôt dans le sens de celle de la Terre.

4-4- Phase héliocentrique -

Les hypothèses ont été posées plus haut.

On rappelle qu'une sphère d'influence de planète a dans le système solaire un rayon négligeable devant la distance au soleil (à part peut être Jupiter). On fait donc l'approximation que devant la distance Soleil-planète ce rayon est nul, ce qui revient à négliger le chemin parcouru dans la phase de départ.

a- Conditions initiales d'entrée dans le système solaire :

Dans le cas très général, il faut calculer tous les paramètres d'injection avec précision, grâce à la connaissance du rayon vecteur et du vecteur vitesse. Nous ne le ferons pas dans ce chapitre.

$$\vec{r}_s = \vec{R}_p + \vec{r} \quad |\vec{r}| = R_s$$

$$\vec{V}_{soleil} = \vec{V}_{\infty / planète} + \vec{V}_P$$

Nous contenterons d'un vol dans l'écliptique pour illustrer ce cours.

- Position r_{os} : r_{os} = distance Terre-Soleil ou Planète-Soleil en général. Le plus souvent $r_{os} = ST = 149.6 \cdot 10^6$ km
- Vitesse héliocentrique V_{os} : la composition des vitesses de la mécanique classique indique que la vitesse héliocentrique de la sonde s'obtient par :

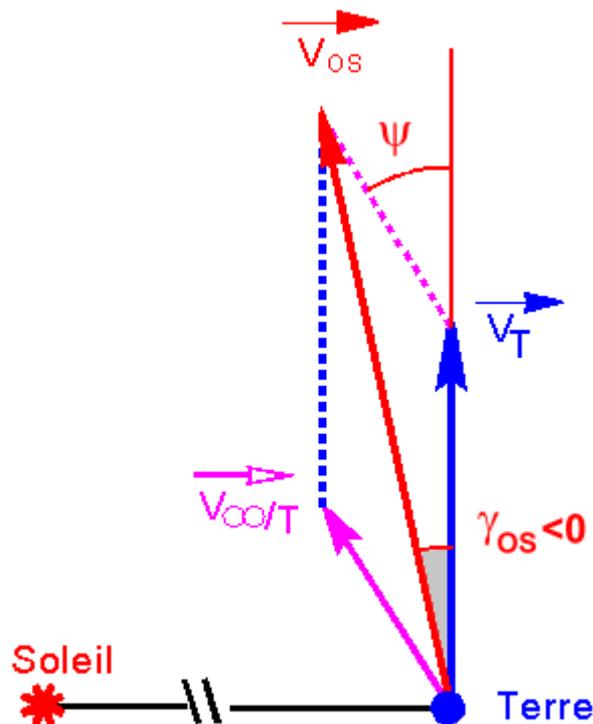
$$\vec{V}_{soleil} = \vec{V}_{\infty / planète} + \vec{V}_P$$

Pour un départ depuis la Terre, la norme de la vitesse d'entraînement $V_p = V_T$ est de l'ordre de 30 km/s, très exactement, à 149.6 millions de km elle vaut 29.783 km/s. On constate donc immédiatement un changement d'ordre de grandeur des vitesses pratiquées.

Remarque : en pratique seules les orbites elliptiques sont visées, imposant donc à la sonde une vitesse V_{os} inférieure à la vitesse de libération par rapport au soleil, vitesse qui vaut 42.12 km/s au niveau de la Terre. Ainsi $V_{os} < 42.12$ km/s

- Angle de tir γ_{OS} : la vitesse à l'infini est supposée repérée par son vecteur unitaire, par rapport à V_T , ainsi l'angle Ψ est connu. Le triangle des vitesses fournit sans difficulté l'angle de tir. On veillera cependant à bien préciser le signe de cet angle, suivant qu'au départ "on monte" ou "on descend".

$$\vec{V}_{OS} = \vec{V}_T + \vec{V}_{\infty/T} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} V_{OS} = \sqrt{V_T^2 + V_{\infty/T}^2 + 2V_T V_{\infty/T} \cos \psi} \\ \gamma_{OS} = \text{Arc sin} \frac{V_{OS} \sin \psi}{V_{\infty/T}} \end{array} \right]$$



b- Transfert héliocentrique -

La connaissance des conditions initiales dans le plan de tir permet le calcul de tous les éléments caractéristiques de la trajectoire, du moins sur sa forme, soit avec des notations bien connues : E, K, a, e, T, r_p , r_a etc... Nous renvoyons le lecteur au cours de base sur les mouvements képlériens.

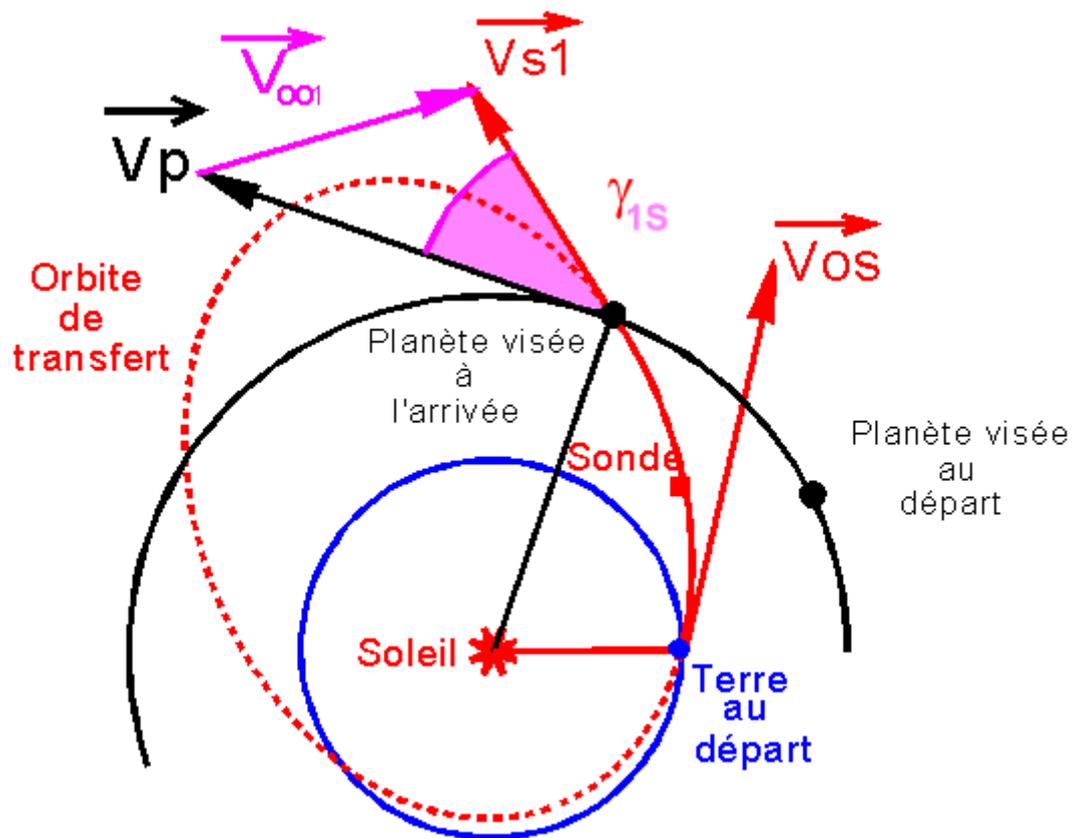
Un calcul intéressant en pratique est celui du temps de vol sur le transfert, représentant avec une excellente approximation la durée du voyage interplanétaire. Il est classique, utilisant en général deux fois le calcul de l'anomalie excentrique des deux points de départ et d'arrivée.

Intéressantes aussi, les conditions de croisement de la sonde et de la planète visée, à la limite de la sphère d'influence de la planète. Rappelons que nous pouvons considérer

le rayon de cette sphère comme nul, et donc prendre comme position de croisement celle de la planète sur son orbite supposée circulaire.

La figure suivante illustre le propos, montrant en noir la trajectoire planète, en rouge le transfert interplanétaire, en bleu l'orbite de la Terre. Le cas envisagé est celui d'une montée vers une planète haute.

NB : On retiendra qu'en pratique, pour les tirs habituels, au moment de la rencontre, la planète et la sonde ont des vitesses du même ordre de grandeur.



Au moment de la rencontre, la vitesse de la sonde est V_{S1} , sa distance au Soleil est le rayon orbital planète r_p et l'angle sous lequel se coupent les trajectoires γ_{1S} . Il n'y a aucune difficulté à calculer la vitesse et l'angle, en utilisant la conservation de l'énergie et la loi des aires.

$$E = \frac{1}{2}V_{OS}^2 - \frac{\mu}{ST} = \frac{1}{2}V_{S1}^2 - \frac{\mu}{SP} \Rightarrow V_{S1}$$

$$K = V_{OS} \cdot ST \cdot \cos \gamma_0 = V_{S1} \cdot SP \cdot \cos \gamma_{1S} \Rightarrow \gamma_{1S}$$

$$V_{\infty 1} = \sqrt{V_{S1}^2 + V_p^2 - 2V_{S1}V_p \cos \gamma_{1S}}$$

La dernière ligne donne la vitesse relative d'arrivée, vue de la planète, considérée comme vitesse d'entrée dans la sphère d'influence de la planète et aussi donc comme vitesse à l'infini indexée par 1 pour l'entrée (elle le sera par 2 pour une sortie éventuelle de la sphère d'influence).

4-5- Phase d'arrivée -

Les hypothèses ont été fixées plus haut.

La sonde pénètre dans la sphère d'influence, qui à l'échelle des dimensions de la planète, est son infini. Donc la trajectoire képlérienne d'entrée possède une branche infinie et ne peut donc qu'être une hyperbole. Cette remarque permet donc d'affirmer que, sans moteur de freinage ou sans freinage atmosphérique, une capture de la sonde par la planète est impossible. *Ceci explique que le nombre de nos satellites, autour de la Terre soit limité à un, la plupart des corps venant du système solaire ayant soit percuté la Terre soit brûlé dans son atmosphère, soit atteint le sol comme le font les débris météoritiques. Notre environnement est donc peu encombré de débris (à part ceux de nos satellites).*

Plusieurs possibilités sont offertes à la sonde, dépendant de la mission :

- Etude longue de la planète : une insertion en orbite elliptique ou circulaire est donc nécessaire et demande l'utilisation d'un moteur de freinage, fonctionnant en rétrofusée en ou plusieurs étapes, la première devant conduire à une capture initiale. En général le freinage est réalisé au périégée de l'hyperbole de descente. Seule la vitesse au périégée est utile, le reste des manœuvres devant maintenant être familier au lecteur. Eventuellement une descente jusqu'au sol est possible avec des modules additionnels.

$$E = \frac{\mu_p}{2a} = \frac{1}{2}V_{\infty I}^2 = \frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu_p}{r_p} \Rightarrow V_p$$

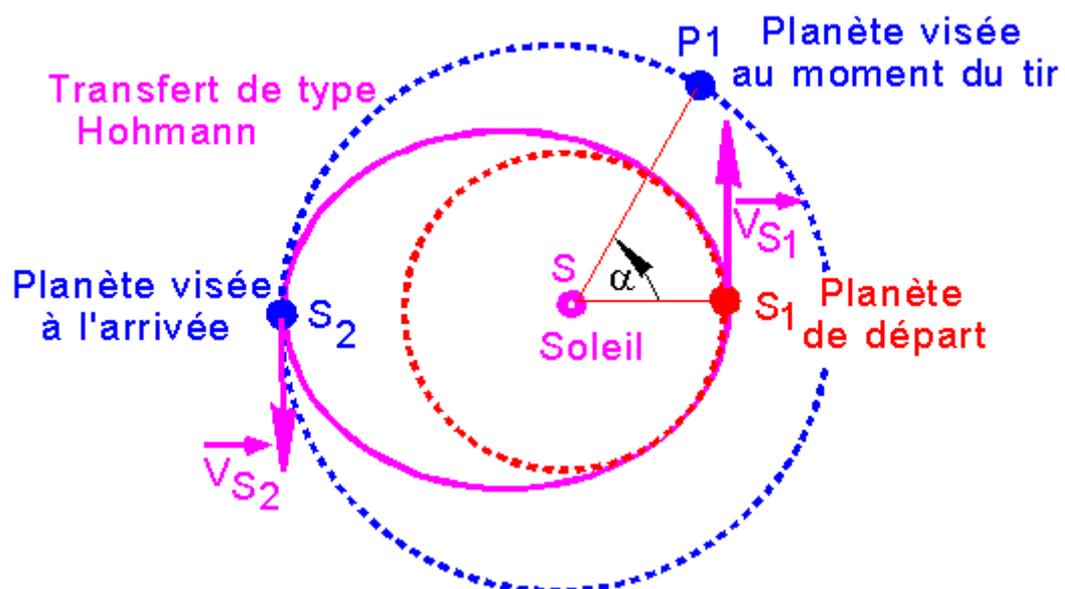
- Etude de courte durée de l'atmosphère éventuelle: Il faut alors prévoir un périégée très près de la planète, entraînant une traversée des couches atmosphériques. Ces expériences ont été souvent réalisées et le sont encore, mais uniquement pour les géantes gazeuses.
- Rentrée atmosphérique : Par exemple mars pourrait être une planète candidate à une telle arrivée. L'atmosphère est alors utilisée pour un freinage passif sans consommation de carburant. L'étude est analogue à celle d'une rentrée atmosphérique terrestre.

- Réalisation d'un tremplin : La planète est alors survolée sans freinage d'aucune sorte, l'hyperbole est décrite en entier, la deuxième branche assurant la sortie de la sphère d'influence de la planète avec réinsertion dans le système solaire. Un échange d'énergie, via l'interaction mutuelle de gravitation, s'opère entre la planète (insensible) et la sonde (très sensible), qui voit ses paramètres orbitaux modifiés. Ce cas fait l'objet d'un chapitre particulier, tant est grande l'importance de cette technique de plus en plus utilisée de nos jours.

5- TIR DE TYPE HOHMANN -

Walter HOHMANN, architecte allemand, a effectué les premiers calculs détaillés de trajectoires reliant deux planètes, à partir des simplifications présentées plus haut.

Le tir imaginé par HOHMANN a le mérite de poser très simplement les bases d'un voyage interplanétaire simple.



5-1- Descriptif du tir -

HOHMANN a démontré que le transfert héliocentrique le plus économique pour aller d'une planète à une autre, celles-ci étant sur des orbites circulaires et coplanaires, était d'utiliser une orbite elliptique bitangente aux orbites des planètes.

5-2- Propriétés du tir -

$$a_1 = SS_1, a_2 = SS_2$$

La figure ci-dessus montre clairement que le tir doit satisfaire à des conditions initiales précises :

- **INSTANT DE TIR UNIQUE** : En effet la donnée des deux planètes et de leur rayon orbital, fixe le demi grand axe a_h de l'orbite de HOHMANN. La durée du voyage, égale à une demi période est donc imposée, et c'est naturellement le temps que doit mettre la planète cible, initialement en P_1 , pour rejoindre le point de rendez-vous en S_2 . Il est donc nécessaire d'attendre une configuration particulière des planètes, au moment du départ et donc un angle α unique, correspondant à une date bien définie.

$$2a_h = a_1 + a_2$$

$$Durée = \frac{1}{2}T_h = \pi a_h \sqrt{\frac{a_h}{\mu_s}}$$

$$\alpha = 180^\circ \pm \sqrt{\frac{\mu_s}{a_2^3}} \cdot \frac{T_h}{2} \begin{cases} - & \text{si } a_2 > a_1 \\ + & \text{si } a_2 < a_1 \end{cases}$$

- **REPETITIVITE DU TIR** : On comprend bien qu'un nouveau tir ne peut avoir lieu que si l'angle $\alpha = P_1SS_1$ retrouve sa valeur, ce qui n'implique pas que les planètes soient au même endroit que lors du tir précédent.

Chaque planète a une période T_1 ou T_2

Le lecteur démontrera sans peine que la période synodique de répétitivité, ou encore le temps minimum séparant deux fenêtres de tir est

$$T_{synodique} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}$$

- **VITESSES** : Les vitesses héliocentriques V_{S1} et V_{S2} , de départ et d'arrivée, à la limite des sphères d'influence respectives, sont également fixées. De plus ces vitesses sont colinéaires aux vitesses des planètes, ce qui suppose une trajectoire d'évasion hyperbolique, qui place la vitesse de sortie de la sphère d'influence, colinéaire à celle de la planète de départ.
- **DEPART PRES DE LA TERRE** : Le lecteur se convaincra que la vitesse à atteindre à une altitude basse donnée près de la Terre a une valeur très précise.

5-3- Ordres de grandeur -

Les planètes les plus visitées sont Vénus, Mars et Jupiter. Dans le futur, la recherche de formes exotiques de vie, poussera certainement l'homme à s'intéresser à des corps

célestes moins connus. Dans l'immédiat c'est certainement Mars qui accueillera la première colonie humaine. Donnons donc quelques informations sur un tir d'HOHMANN vers Mars.

- Périodicité des tirs $T_{\text{synodique}} = 2.137$ ans.
- Derniers et futurs tirs possibles : 21/10/94, 3/12/96, 1/2/99, 14/4/2001, 16/6/2003.
- Vitesse héliocentrique de départ $V_{s1} = 32.73$ km/s.
- Vitesse à l'infini de départ 2.94 km/s.
- Vitesse de tir à 422 km du sol terrestre $V_0 = 11.22$ km/s.
- Durée du voyage de HOHMANN 259 jours.

Pour Vénus, à la même altitude la vitesse V_0 serait un peu plus petite et vaudrait 11.11 km/s.

Pour Jupiter le tir demande beaucoup plus d'énergie et $V_0=13.95$ km/s.

5-4- Tir réel à énergie minimale -

Vues des remarques faites plus haut, pour "monter" ou "descendre" de manière optimale, c'est à dire atteindre les planètes soit à l'apogée , soit au périégée, il faut PLACER LA VITESSE A L'INFINI ET CELLE DE LA TERRE DANS LE MÊME SENS OU EN SENS CONTRAIRE.

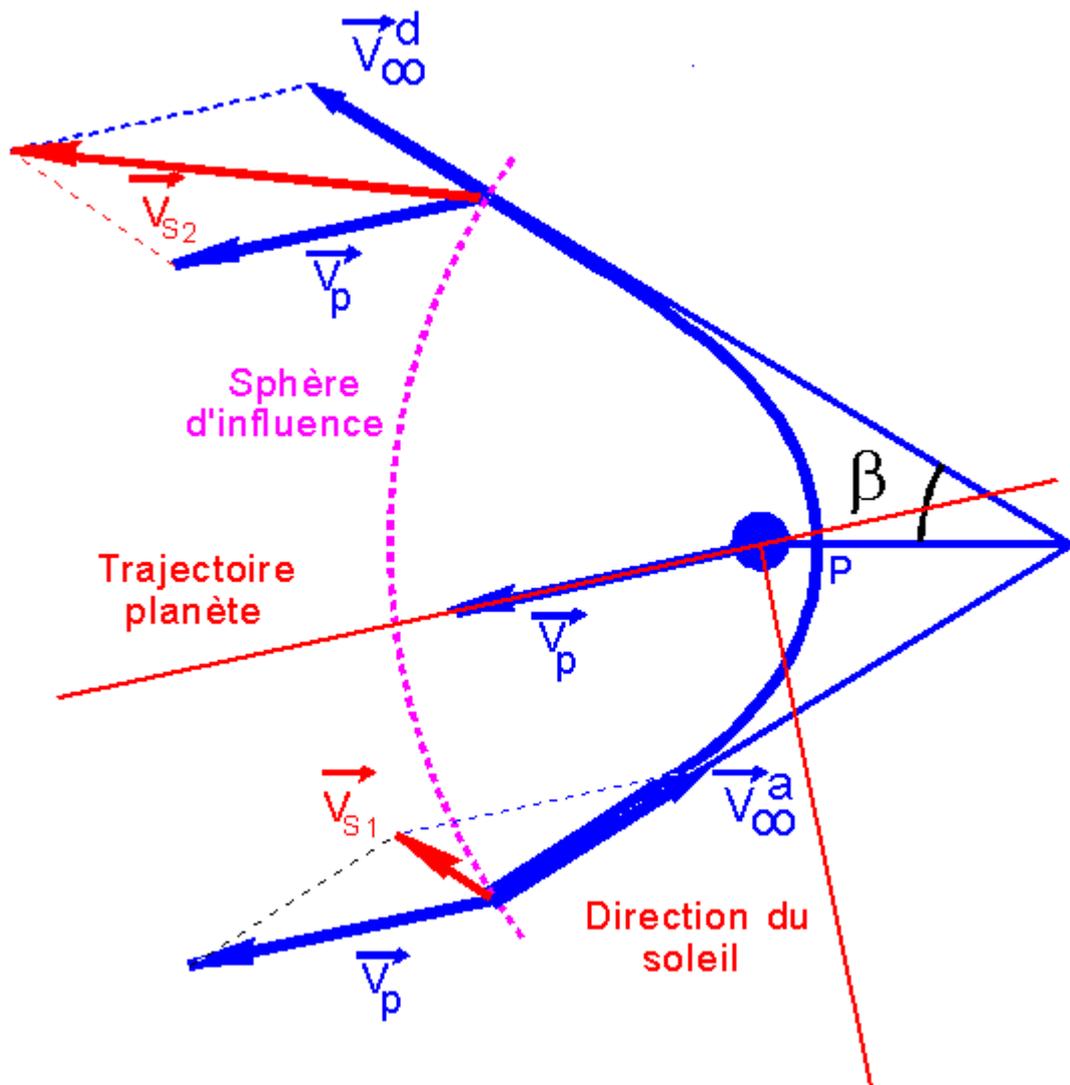
En réalité les orbites des planètes ne sont ni exactement circulaires, ni toutes dans l'écliptique. On peut quand même s'intéresser à un tir d'énergie minimale permettant de joindre les deux planètes. L'étude demande des moyens de calcul et conduit à envisager un transfert incliné sur l'écliptique. Il y a donc un petit surcoût de vitesse, mais relativement minime de l'ordre de 50 m/s.

6- TREMPLIN GRAVITATIONNEL -

Nous étudions avec plus de précision le cas de survol de la planète avec un périégée suffisamment élevé pour éviter une percusion avec la planète.

NB : Ce réglage de l'altitude du périégée est réalisé, dans les dernières heures de l'approche, hors sphère d'influence, pour bien "caler" le point d'entrée dans la sphère d'influence de la planète. Actuellement la précision de survol est meilleure que le km.

La figure qui suit montre bien la géométrie du survol : l'indice 1 ou a est réservé à l'entrée, l'indice 2 ou d est réservé à la sortie ou encore départ de la planète. Les calculs sont opérés au niveau de la sphère d'influence.



Un peu plus loin, on distinguera le survol passant "par derrière" la planète et le survol passant "par devant" la planète. Les effets sont très distincts et dépendent du but poursuivi.

$$E = \frac{\mu_p}{2a} = \frac{1}{2}V_{\infty 1}^2 = \frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu_p}{r_p} \Rightarrow V_p$$

$$V_{\infty 1} = V_{\infty a} = V_{\infty 2} = V_{\infty d}$$

$$r_p = a(e-1) \quad \frac{\mu_p}{2a} = \frac{1}{2}V_{\infty 1}^2$$

Le lecteur établira sans peine les relations suivantes. On suppose simplement connues les conditions de survol suivantes : vitesse à l'infini d'entrée et rayon vecteur au périhélie. Un calcul intéressant est celui de l'incrément de vitesse ΔV qui permet de modifier la vitesse de la sonde. On l'appellera "effet de tremplin", avec divers qualificatifs possibles :

- Tremplin gravitationnel
- Tremplin gravifique
- Assistance gravitationnelle
- Swing-by

La figure suivante ramène tous les vecteurs en jeu à une même origine, notamment en faisant "glisser" les vitesses à l'infini chacune le long de leur asymptote respective.

β désigne le demi angle d'ouverture de ces asymptotes.

Ainsi de manière explicite, apparaît le vecteur ΔV .

$$\left[\begin{array}{l} \vec{V}_{\infty 1} = \vec{V}_{S1} - \vec{V}_p \\ \vec{V}_{\infty 2} = \vec{V}_{S2} - \vec{V}_p \end{array} \right] \Rightarrow \Delta \vec{V} = \vec{V}_{S2} - \vec{V}_{S1} = \vec{V}_{\infty 2} - \vec{V}_{\infty 1}$$

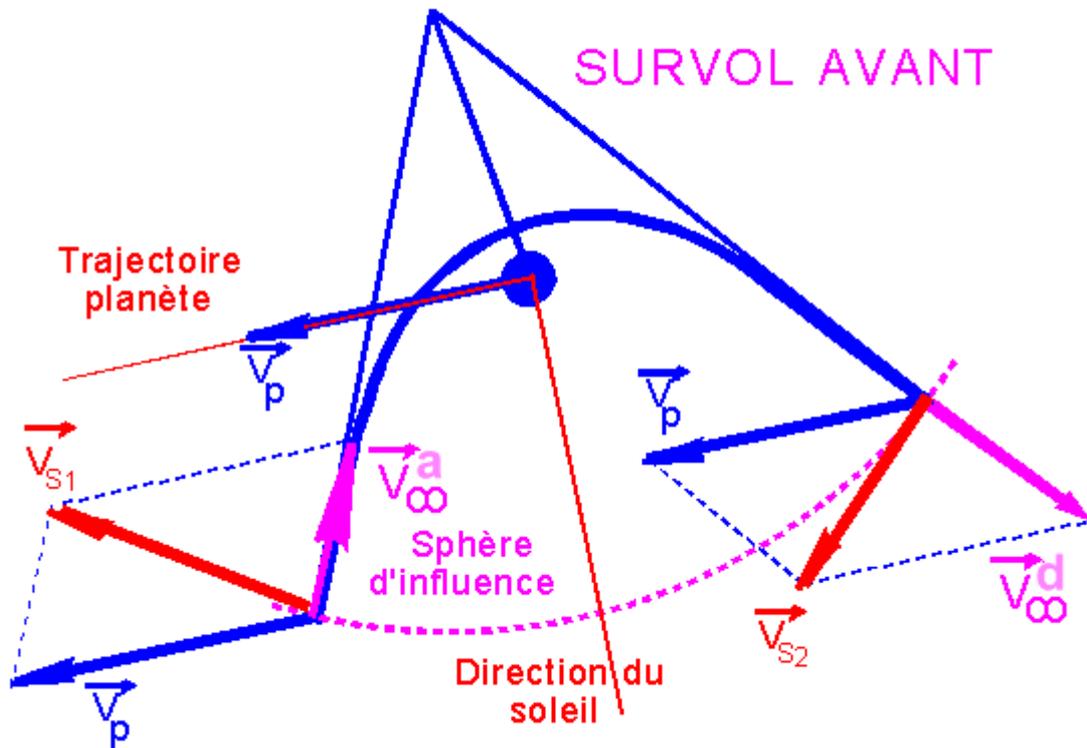
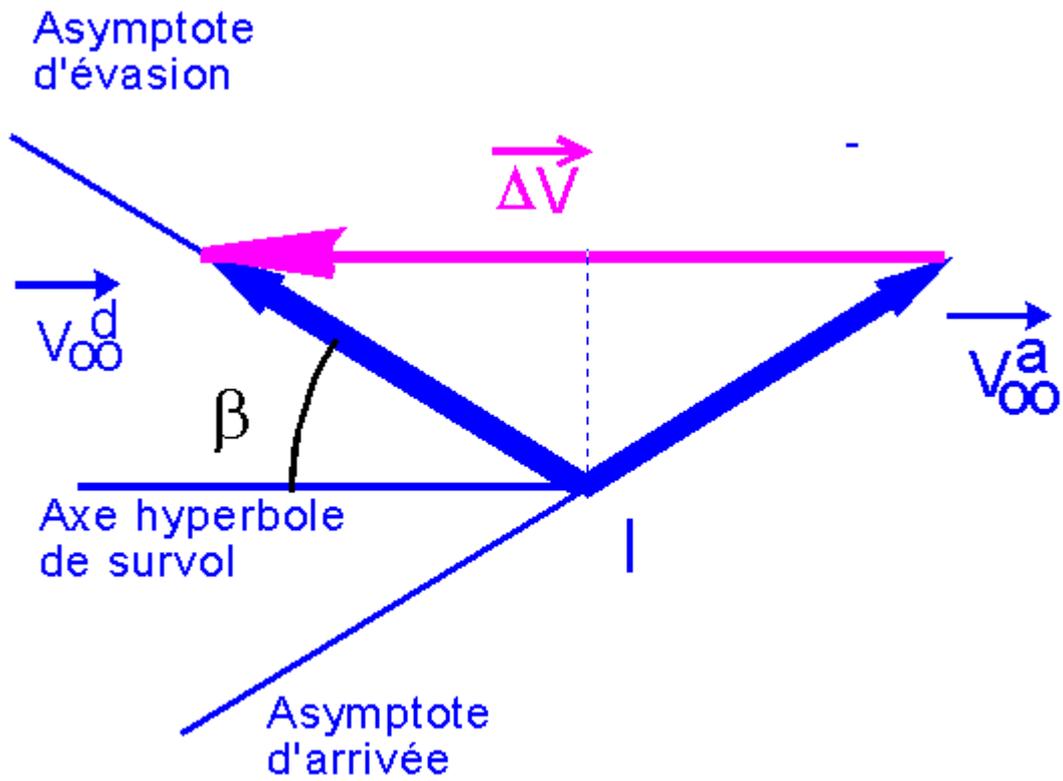
dont la norme se calcule facilement grâce aux relations suivantes :

$$\cos \beta = \frac{1}{e} \quad e = 1 + \frac{r_p}{a} = 1 + \frac{r_p V_{\infty 1}^2}{\mu_p}$$

$$\Delta V = 2V_{\infty 1} \cos \beta$$

Finalement l'assistance gravitationnelle fournit à la sonde un incrément de vitesse ΔV qui vaut :

$$\Delta V = \frac{2V_{\infty 1}}{1 + \frac{r_p V_{\infty 1}^2}{\mu_p}}$$



La figure ci-dessus montre un survol par l'avant. Le lecteur attentif, observant les deux types de survol, se convaincra aisément des conséquences évidentes : Un survol avec contournement arrière amènera une sortie par l'avant dans le sens du mouvement de la planète, un peu comme un relais cycliste. Il se produit donc une augmentation de la vitesse et un gain d'énergie se retrouvant sur le grand axe et l'apogée en particulier. Ce genre de tremplin est utilisé pour gagner de l'énergie. Voir la MISSION GALILEO.

Un survol avec passage devant la planète va donner une sortie de la sphère d'influence, plutôt vers l'arrière. Il en résulte une vitesse de sortie V_{S2} faisant un angle important avec celle d'entrée V_{S1} , d'où un changement important de direction mais sans gain de vitesse, quelquefois d'ailleurs avec perte en module. Ce genre de tremplin est utilisé pour courber de manière importante et sans consommation d'ergols la trajectoire. Voir la MISSION PIONEER.

EXEMPLES : deux missions déjà réalisées illustrent bien la notion de tremplin. Vous vivrez la troisième dans un futur proche, avec ROSETTA :

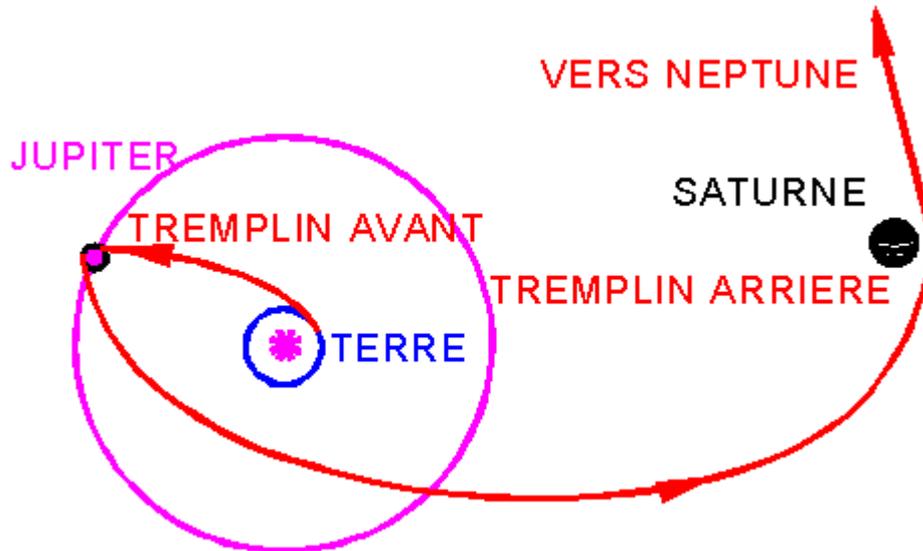
MISSION GALILEO :

La sonde Galiléo avait été prévue pour une mise en orbite circumterrestre par une Navette. Un moteur LH2+LO2 devait assurer , en tant qu'étage supplémentaire, la libération de l'attraction terrestre et une vitesse à l'infini suffisante pour atteindre directement Jupiter. L'explosion de Challenger a amené les US à interdire le transport en soute de tout moteur LH2+LO2. La mission aurait pu paraître impossible mais c'était sans compter avec l'intelligence du JPL. Il a donc été envisagé la mission VEEGA (Vénus Earth Earth Gaspra Arrival):

- Lancement vers Vénus sur une orbite C_1 , pour un premier tremplin survol arrière donnant un gain de vitesse.
- L'orbite C_2 qui en résulte revient vers la Terre, survolée par l'arrière pour un nouveau tremplin augmentant l'énergie, de telle manière que la période sur la nouvelle orbite C_3 soit exactement 2 ans. Au passage dans la ceinture d'astéroïdes, Gaspra est photographié.
- L'orbite C_3 retrouve donc la Terre 2 ans après au même endroit, pour un nouveau tremplin avec survol arrière. Le gain de vitesse est alors suffisant pour, sur C_4 , atteindre Jupiter. Au passage à nouveau dans la ceinture d'astéroïdes, IDA est survolé.

MISSION PIONEER 11 :

A l'époque, aucun lanceur ne pouvait effectuer un tir direct vers une planète plus haute que Jupiter, ce qui demandait une vitesse à l'infini trop importante.



La configuration géométrique des planètes permettant de visiter toutes celles plus hautes que Jupiter, en un seul voyage, ne se reproduit que tous les 189 années.

MISSION ROSETTA :

BUT : Etudier in situ la comète P/WIRTANEN, en se posant sur son noyau.

MOYENS : Un peu comme Galiléo, la mission comportera 3 tremplins gravifiques, un sur Mars et deux consécutifs sur la TERRE. Le tir serait effectué par notre lanceur ARIANE V en janvier 2003, pour une conclusion de l'expérience en 2011, 9 ans après, et surtout à faible coût énergétique. Le rendez-vous est prévu à 478 UA du Soleil, ce qui équivaut presque au rayon orbital de Jupiter.

REMARQUE : Vous trouverez les compléments nécessaires à ce cours dans "*MECANIQUE SPATIALE*" Tome II de J P CARROU CNES (Editions Cépaduès).

***D- RENTRÉE DANS UNE
ATMOSPHÈRE***

Chapitre 1-

MANŒUVRE DE RENTREE

Nous abordons dans ce chapitre, le problème du calcul des conditions de retour d'un engin spatial, vers l'atmosphère d'une planète, jusqu'à ce jour sur la terre, mais demain sur Mars.

Nous serons donc d'abord amenés à définir l'arc orbital de descente, qui fait suite à une manœuvre de "déorbitation", utilisant un moteur de freinage. Puis nous chercherons quelle est la manœuvre optimale. Enfin sans entrer trop dans le détail, nous indiquerons comment évoluent les paramètres de rentrée en fonction des conditions de rentrée.

La rédaction de cette partie de cours est en partie inspirée d'un travail de J FAVE (ONERA) et de Re-entry and Planetary Entry, Physics and technology by W.H.T LOH, SPRINGER- Verlag New-York 1968.

1- HISTORIQUE -

NB : Tout au long de l'exposé, nous verrons que deux paramètres sont importants : la vitesse de rentrée V_e , et l'angle de rentrée γ_e , angle que fait la vitesse avec l'horizontale locale au point de rentrée.

Les premiers véhicules spatiaux, pour lesquels le problème du retour et de la récupération, s'est posé, sont les fusées sondes expérimentales (météo, astronomie,...), la vitesse variait de 1000 à 3000 m/s avec le plus souvent un angle de rentrée de 90° .

Ensuite, le problème a commencé à être étudié sérieusement avec la construction des missiles balistiques, dont les ogives pénètrent dans les couches atmosphériques entre 4000 et 6000 m/s, sous des angles de rentrée de 25° à 45° .

Depuis la décennie 1960, on ne compte plus les retours de capsules, habitées ou pas, Mercury, Gémini, Apollo, Soyouz..., revenant de missions circumterrestres ou d'un voyage vers la lune. Les vitesses de rentrée sont alors devenues importantes de l'ordre de 8000 m/s sous des angles inférieurs à 4° , pour les vols autour de la terre et 11000 m/s et un angle de rentrée de $6^\circ.5$, pour un retour lunaire.

De telles vitesses peuvent donner lieu, si l'on n'y prend garde, à des décélérations supérieures à 10 g, ce qui est considéré comme la limite de résistance humaine, du moins en continu. Par ailleurs, les retours de missions lunaires, présentent le risque de rebonds sur les couches de l'atmosphère, vers 60 km d'altitude avec risque de sortie de l'atmosphère et réinjection dans l'espace, en attendant une nouvelle rentrée. Ce sont ces considérations qui ont été longuement et finement étudiées, pour conduire à des choix de rentrées particuliers.

On distingue, en effet :

Les rentrées de type balistiques, c'est à dire sans pilotage et donc sans portance. Les deux seules forces sont le poids et la traînée.

Les rentrées planées, avec utilisation d'un pilotage essentiellement en incidence, permettant la création d'une finesse et donc d'une portance. La capsule pénètre alors moins profondément dans les couches denses entre 30 et 50 km, et ce fait limite la décélération maximum au dessous de 8 g et plutôt 4 à 5 g. Les capsules Mercury et Gemini avaient ainsi des finesse de l'ordre de 0.2 à 0.3.

Les rentrées planées, pilotées en incidence et roulis, permettant de contrôler la finesse et le déport latéral, utile pour éviter une région de tempête en mer. Telle est la rentrée des navettes US.

Actuellement, les ingénieurs français mettent au point, en octobre 1998, une capsule de rentrée, inspirée de la cabine Apollo, dérivée du projet Hermès.

2- MANŒUVRE DE "DEORBITATION" -

2-1- Généralités –

Nous décomposerons la rentrée en trois phases totalement différentes, avec point de départ, une orbite de travail C_0 :

Une manœuvre de décrochage de l'orbite C_0 , mettant en jeu un moteur de freinage, conduisant à l'insertion sur C_1 . L'opération porte le nom de déorbitation. Les calculs sont tout à fait accessibles.

La descente vers les couches atmosphériques, considérées atteintes vers 120 km du sol terrestre, c'est ce qu'on appelle l'ARC ORBITAL C_1 . Le calcul des conditions de rentrée est relativement simple.

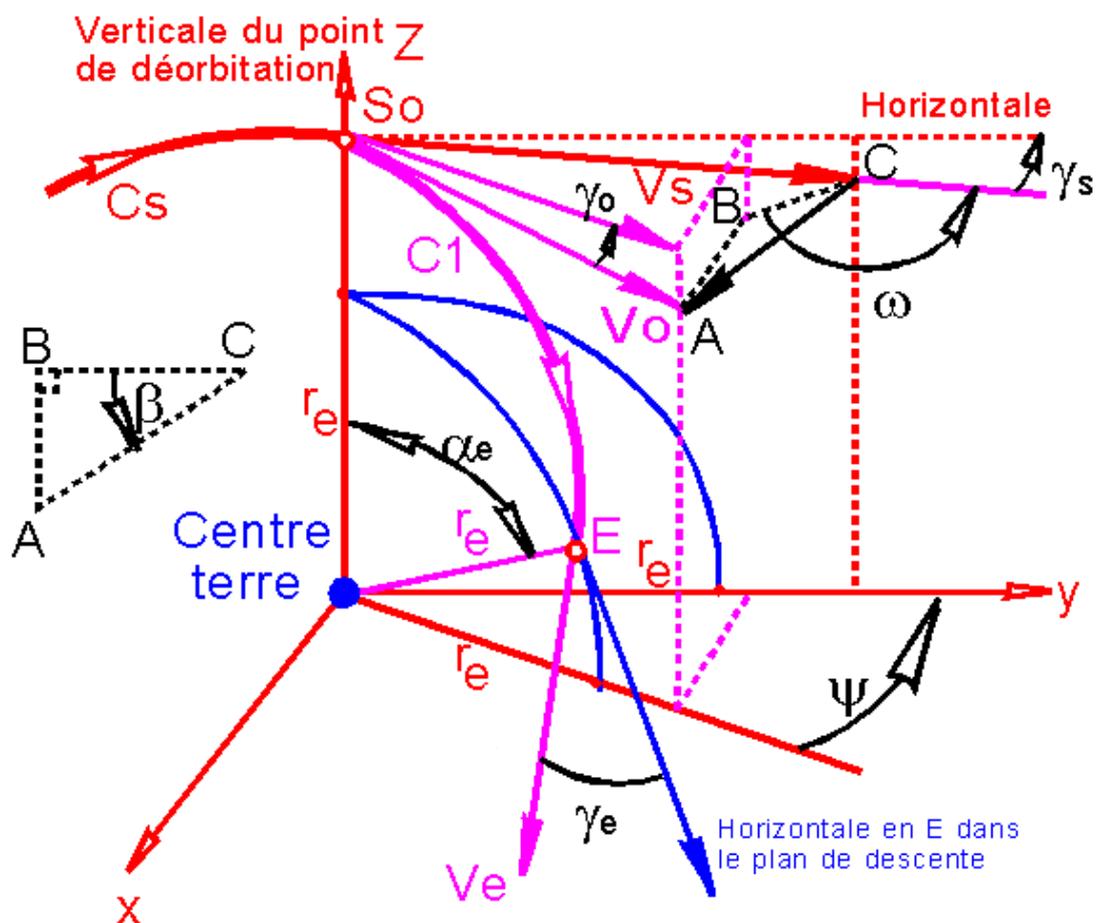
La traversée des couches atmosphériques, avec pilotage et contrôle du niveau de décélération, phase appelée ARC ATMOSPHERIQUE. C'est une affaire

de spécialistes, elle donne lieu à des simulations numériques. Des théories un peu simplifiées existent et donnent d'excellents et instructifs résultats.

NB : Nous renvoyons le lecteur vers un exercice concernant le modèle d'ALLEN et EGGERS, pour des rentrées sous des angles supérieurs à 6° . Les résultats sont extrêmement intéressants et permettent de bien comprendre le choix de la forme de la cabine Apollo.

2-2- Figure et notations –

Nous adoptons les notations qui suivent (voir figure):



Orbite initiale C_0 , manœuvre de déorbitation en S_0 .

Rayon vecteur $r_0 = r_s$, Vitesse avant V_s , pente γ_s .

Incrément ΔV , défini par la norme et 2 angles ω et β .

Vitesse après V_0 , pente γ_0 .

Arc orbital C_1 , de S_0 à E point de rentrée, avec a demi grand axe, e excentricité, p paramètre. On définit alors la vitesse de rentrée V_e et l'angle de rentrée γ_e , r_e est le rayon externe de l'atmosphère. α_e désignera la portée angulaire.

θ_e est l'angle polaire du point de rentrée E sur l'arc orbital.

Ψ est le déport angulaire latéral, dans le cas où C_0 et C_1 ne sont pas coplanaires.

2-3- Calcul du cas général sur l'arc orbital -

Nous allégeons un peu les calculs, laissant le soin au lecteur de les compléter.

Liaison C_0 - C_1 :

La composition des vitesses donne :

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_s + \Delta\vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 \cos \gamma_0 \sin \psi = \Delta V \sin \beta \\ V_0 \sin \gamma_0 \cos \psi = V_s \cos \gamma_s + \Delta V \cos \beta \cos \omega \\ V_0 \sin \gamma_0 = V_s \sin \gamma_s + \Delta V \cos \beta \sin \omega \end{cases}$$

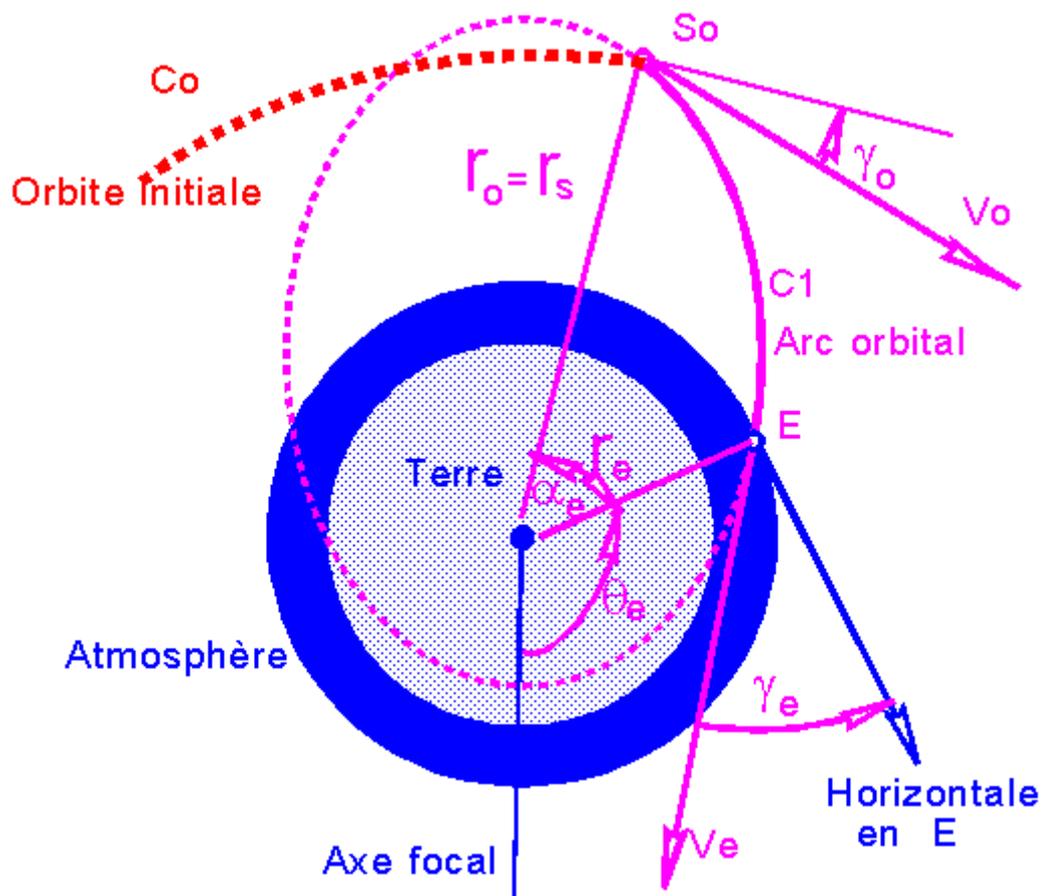
Equations le long de l'arc orbital :

Les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique, sur une orbite képlérienne fournissent :

$$V_e^2 + 2\frac{\mu}{r_e} = V_0^2 + 2\frac{\mu}{r_0} \quad \text{et} \quad V_e r_e \cos \gamma_e = V_0 r_0 \cos \gamma_0$$

Enfin des relations classiques dans l'ellipse ci-dessous, donnent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{p}{1 + e \cos \theta_e} & r_e &= \frac{(V_e r_e \cos \gamma_e)^2}{\mu} \\ r_0 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta_e + \alpha_e)} & \tan \gamma_e &= \frac{e \sin \theta_e}{1 + e \cos \theta_e} \end{aligned}$$



L'élimination de $e \cos \theta_e$ et $e \sin \theta_e$ dans le système conduit aux résultats suivants fixant soit l'angle de rentrée γ_e , soit la portée α_e , connaissant le résultat de la manœuvre :

$$\mu \frac{1 - \cos \alpha_e}{(V_e r_e \cos \gamma_e)^2} - \frac{r_0}{r_e} + \frac{\cos(\alpha_e + \gamma_e)}{\cos \gamma_e} = 0$$

$$\mu \frac{1 - \cos \alpha_e}{(V_0 r_0 \cos \gamma_0)^2} - \frac{r_0}{r_e} + \frac{\cos(\alpha_e + \gamma_0)}{\cos \gamma_0} = 0$$

3- "DEORBITATION" OPTIMISEE -

Nous supposons, pour simplifier, renvoyant le lecteur à la littérature très spécialisée pour le cas général, que le changement d'orbite est coplanaire, ce qui signifie que l'orbite de descente est dans le même plan que l'orbite de travail initiale et de plus nous la supposons circulaire. Bien que particulier, ce type de retour est classique.

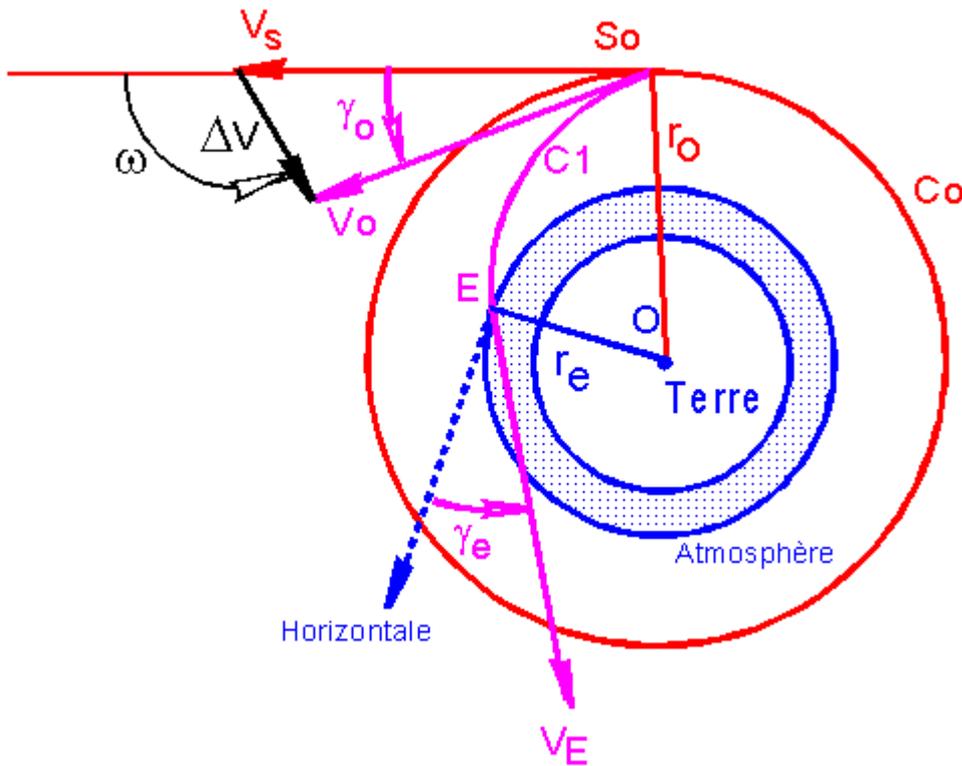
3-1- Schéma et notations -

Orbite initiale : de rayon r_s , de vitesse orbitale V_s , point de décrochage S_0

Atmosphère : couches supérieures au rayon r_e .

Orbite de descente : C_1 elliptique, V_0 vitesse en S_0 , γ_0 pente au départ.

Angle de rentrée: γ_e supposé fixé, nous verrons plus tard à quelle valeur.



Nous posons les quantités suivantes, dont trois sans dimension :

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad \delta = \frac{\Delta V}{V_s} \quad \xi = \frac{r_0}{r_e} \geq 1 \quad k = \frac{V_e}{V_s}$$

3-2- Calculs –

Dans tous les cas, si l'on ne se pose pas la question de l'optimisation de la rentrée, les calculs suivants suffisent.

Les relations dans le triangle des vitesses de déorbitation entre V_0 , V_s , ΔV donnent :

$$V_0 = V_s \sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega} \quad \sin \gamma_0 = \frac{\delta \sin \omega}{\sqrt{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega}}$$

Traduisant la conservation de l'énergie sur l'orbite C_0 de descente, il vient :

$$k = \frac{V_e}{V_s} = \sqrt{2\xi - 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega}$$

Enfin la conservation du moment cinétique, ou encore la loi des aires fournit l'angle de rentrée en fonction des caractéristiques de la rentrée, δ et ω .

$$\cos \gamma_e = \xi \frac{1 + \delta \cos \omega}{\sqrt{2\xi - 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega}}$$

3-3- Calculs de l'optimisation -

La manœuvre est dite optimisée lorsque l'incrément de vitesse à délivrer est minimal. Or nous le savons, l'angle de rentrée est un paramètre capital. Le problème se pose donc de la manière suivante : connaissant δ , quelle est la manœuvre ω qui minimise δ ?

La dernière relation fournissant γ_e définit implicitement la fonction $\delta(\omega)$:

$$\left(2\xi - 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega\right)^2 \cos^2 \gamma_e - \xi^2 (1 + \delta \cos \omega)^2 = 0$$

Le calcul de la dérivée de d est alors accessible et l'étude de sa nullité aussi. Le lecteur désireux de mener à bien les calculs, retrouvera donc les résultats suivants d'une rentrée optimisée :

$$\text{Si } \left(\xi^2 - \cos^2 \gamma_e\right)^2 \leq \left[\xi^2 - \cos^2 \gamma_e - 2\xi^2(\xi - 1)\right] \xi^2$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega = - \frac{\xi^2 - \cos^2 \gamma_e}{\xi \sqrt{\xi^2 - \cos^2 \gamma_e - 2\xi^2(\xi - 1)}} \\ \delta = \frac{1}{\cos \omega} \left[\frac{\cos^2 \gamma_e}{\xi^2} - 1 \right] \\ k = \sqrt{2\xi - 1 + \delta^2 + 2\delta \cos \omega} \end{array} \right.$$

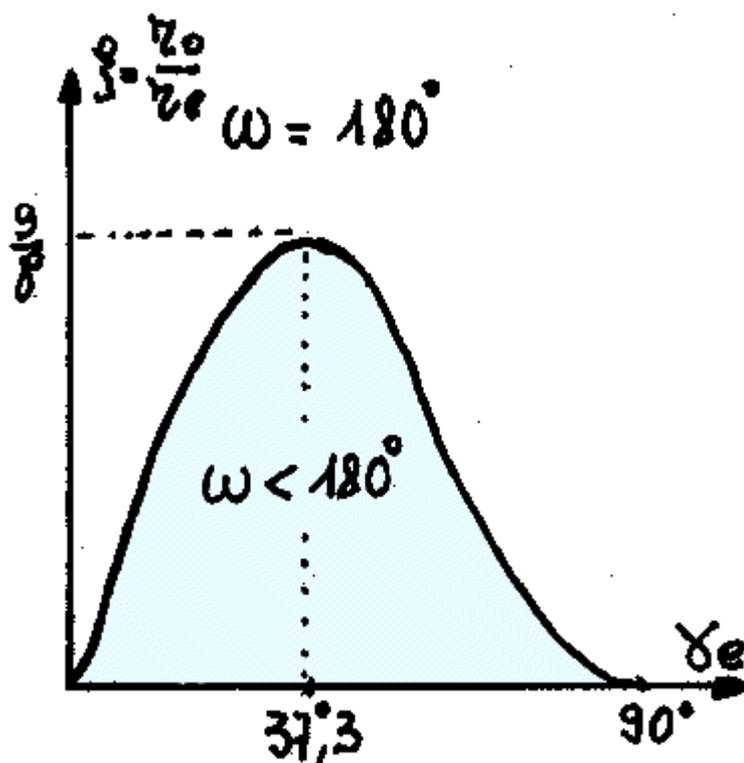
sinon, c'est le fonctionnement classique en rétrofusée :

$$\text{Si } (\xi^2 - \cos^2 \gamma_e)^2 \geq [\xi^2 - \cos^2 \gamma_e - 2\xi^2(\xi - 1)]\xi^2$$

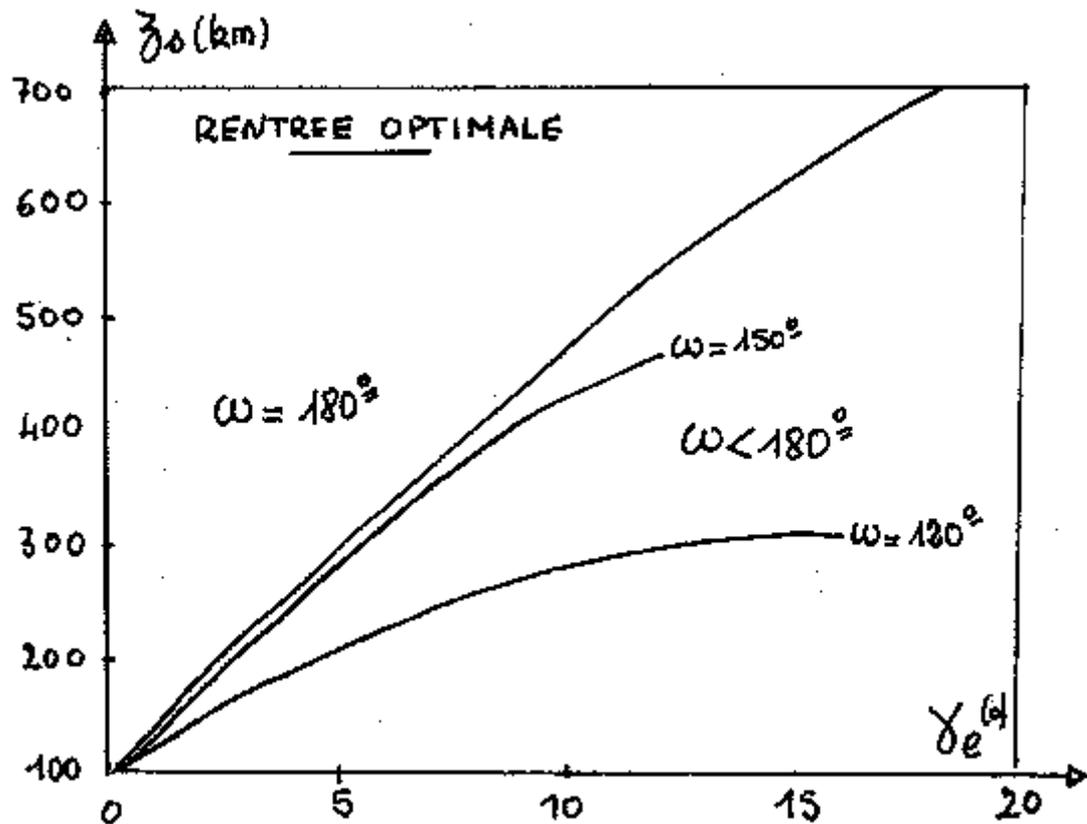
$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega = 180^\circ \\ \delta = 1 - \cos \gamma_e \sqrt{\frac{2(\xi - 1)}{\xi^2 - \cos^2 \gamma_e}} \\ k = \xi \sqrt{\frac{2(\xi - 1)}{\xi^2 - \cos^2 \gamma_e}} \\ \gamma_0 = 0^\circ \end{array} \right.$$

3-4- Quelques résultats graphiques -

Ci-dessous les deux régions pour le choix de ω en fonction de z et γ_e , dans le cas d'une rentrée optimisée.



Enfin, le diagramme suivant montre, pour une rentrée optimisée, le choix de l'orientation de l'incrément de vitesse ΔV , lors de la déorbitation.



4- ELEMENTS SUR LA RENTREE TERRESTRE -

Rappelons que la rentrée s'opère sous l'action de deux forces, la gravitation et la force aérodynamique qui se décompose :

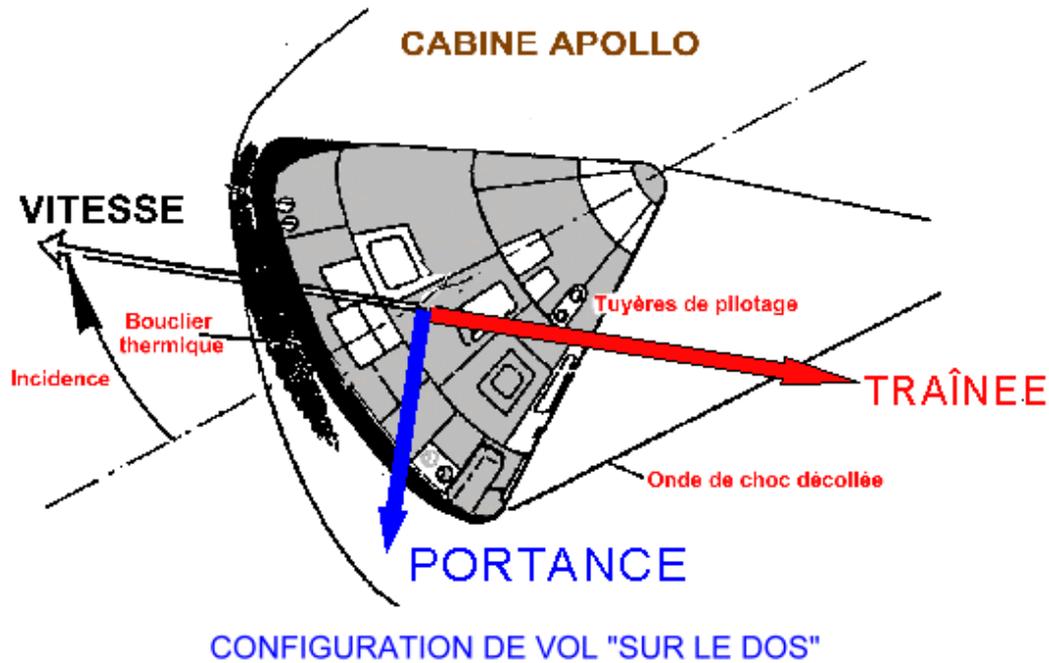
En traînée, R_x est conventionnellement opposée à la vitesse :

$$R_x = \frac{1}{2} \rho(Z) S C_x V^2 \quad R_z = \frac{1}{2} \rho(Z) S C_z V^2$$

et portance R_z normale au vecteur vitesse, de sens dépendant de l'incidence ("vol normal" pour $i > 0$, et "vol dos" pour $i < 0$) :

La simulation des rentrées, sous des angles petits de 0° à 6° , pour des finesse variables, fournit quelques idées générales, notamment:

Qu'en balistique, à finesse nulle, ce qui fut le cas des retours de Gagarine et pratiquement celui de Glenn à bord de Mercury, la décélération maximale dépassa 8 g.



Que l'utilisation d'une portance ou d'une finesse modérées, permet de diminuer le niveau de la décélération maximum, de manière notable.

Que l'usage de la finesse permet de maintenir la trajectoire de rentrée dans les couches hautes, peu denses de l'atmosphère. Par contre, la finesse peut créer des rebonds de la trajectoire.

Pour des vitesses de rentrée importantes, le risque d'évasion est présent, c'est d'ailleurs ce qui impose pour la cabine Apollo, un pilotage très strict et un angle de rentrée de $6^{\circ}.5$, qui place la cabine à mi-chemin de la limite des 10 g et du risque d'évasion.

Enfin si vous avez consulté la théorie d'ALLEN et EGGERS, vous avez pu constater que la forme du corps de rentrée ne joue aucun rôle sur le niveau maximum de la décélération. Ceci explique pourquoi la tendance est de prendre des cabines tronconiques, avec la partie évasée se présentant face aux filets d'air, dans le but d'éclater l'onde de choc et donc d'évacuer les calories loin des parois de la capsule.

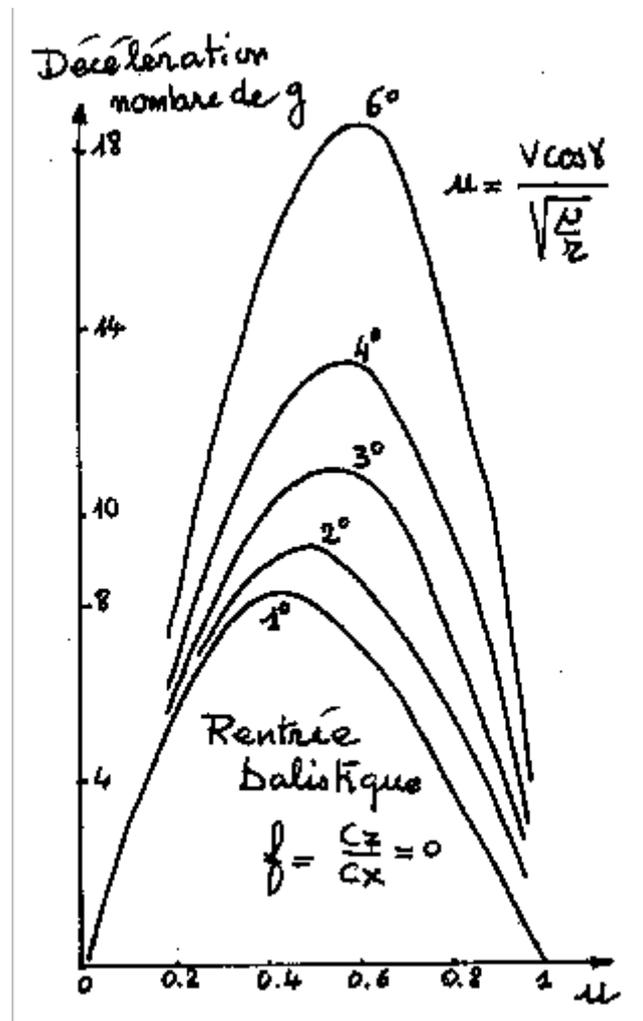
Un bouclier thermique, disposé à l'avant du véhicule de rentrée, a un double rôle:

1- d'isolant.

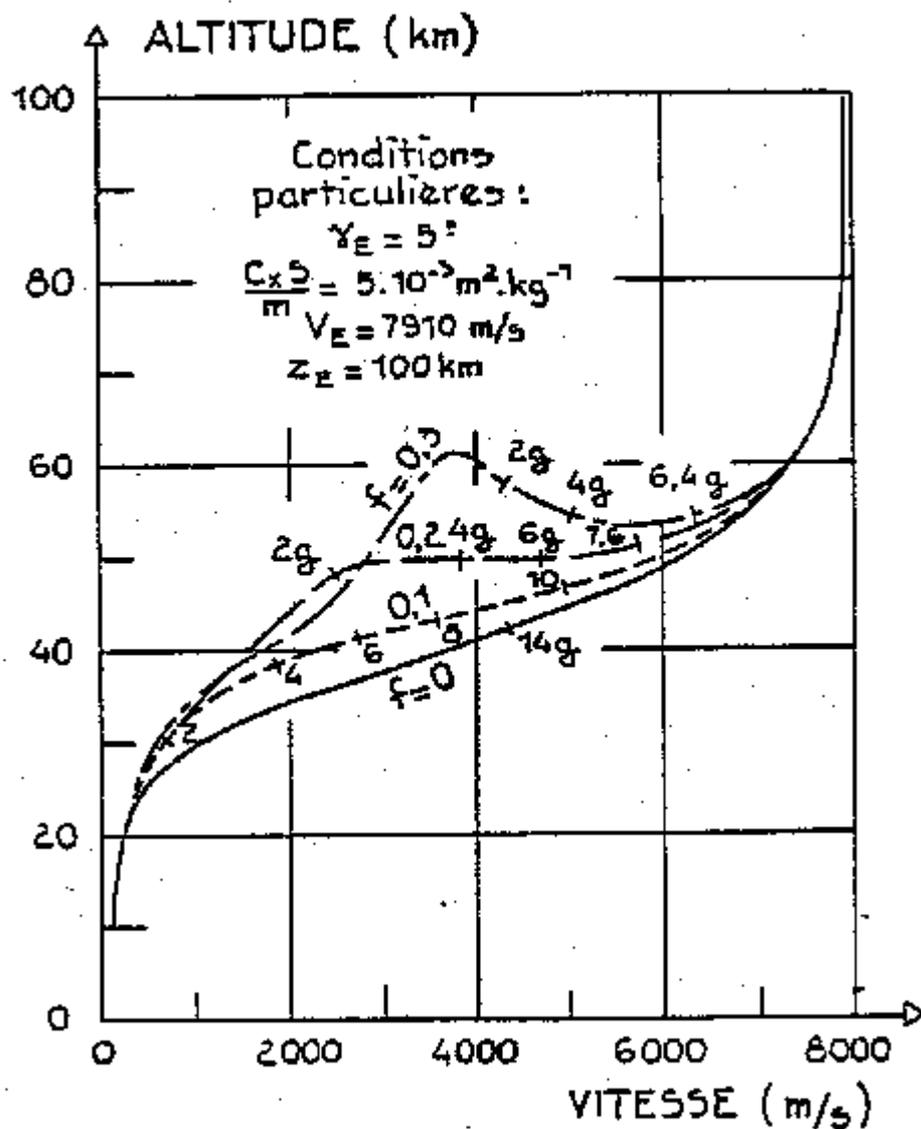
2- d'utiliser une grande partie de la chaleur pour changer d'état, en passant directement de l'état solide à l'état liquide (sublimation), et ceci à une température relativement basse, ce qui garantit pendant toute la phase

de changement d'état une température constante et peu élevée à l'avant du véhicule.

Ci-dessous, le graphique montre, pour des rentrées balistiques, l'évolution de l'accélération en fonction de l'angle de rentrée γ_e .



ainsi que la transformation des trajectoires sous l'influence de la finesse.



Le lecteur, intéressé par des projets de simulation de rentrée, consultera la liste des projets. Pour cela il devra faire appel à une modélisation de l'atmosphère de la planète, soit sous forme de routines, soit avec le modèle plus sophistiqué de Jacchia. Le travail vaut le détour.

Chapitre 2-

RENTREE D'ALLEN

Le cours sur la rentrée a révélé la complexité du vol d'une capsule dans l'atmosphère. ALLEN et EGGERS, au prix de quelques simplifications justifiées, et pour des rentrées balistiques sous des angles supérieurs à 6° , ont réussi à bien cerner la question et ont apporté des informations utiles.

1- THEORIE -

1-1- Hypothèses simplificatrices -

Les conditions suivantes ont été posées :

L'évolution de la masse volumique de l'air entre 5 et 80 km a été modélisée simplement, par une loi exponentielle décroissante. Rappelons que la thermodynamique des gaz parfaits conduit en présence de la pesanteur à une telle loi :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Z}{H}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 1.735 \text{ kg/m}^3 \\ H = 6700 \text{ m} \end{array} \right\} \quad \text{pour } 5 \leq Z \leq 80 \text{ km}$$

La rentrée est supposée balistique, c'est à dire non pilotée. Dans ces conditions, l'engin de rentrée se dispose dans une configuration d'équilibre avec le vecteur vitesse suivant l'axe aérodynamique stable du corps de rentrée. La traînée sera donc la seule force aérodynamique, la portance est nulle.

Pour achever la modélisation de la traînée, il faut se donner le coefficient aérodynamique C_x de pénétration. Comme la vitesse est très largement en hypersonique, les essais en soufflerie montrent que le C_x est alors constant. C'est l'hypothèse retenue.

L'angle de rentrée doit être supérieur à 6° .

NB: Pour les rentrées sous des angles faibles, il existe une théorie particulière appelée rentrée de Chapman, que vous pouvez consulter.

La rentrée va donner lieu à des décélérations de plusieurs dizaines de g, ce qui autorise à négliger la pesanteur devant la traînée.

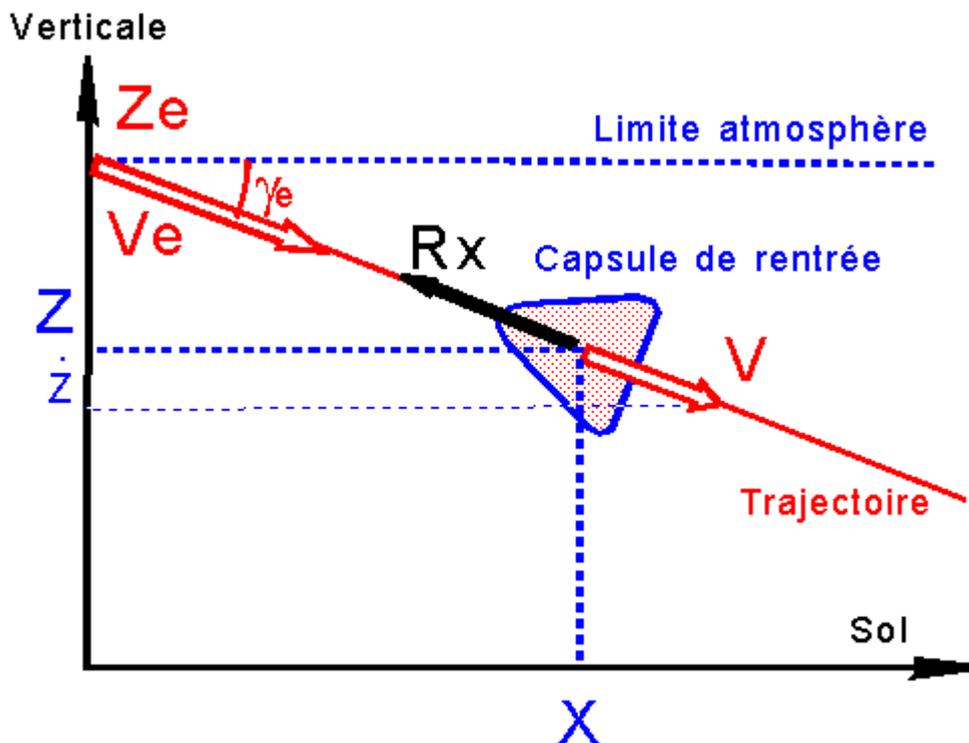
Enfin, vues les vitesses de rentrée pratiquées (de l'ordre de 8000 à 11000 m/s), on oubliera d'une part la rotation terrestre et d'autre part la rotondité de la terre.

Conséquences : La seule force en jeu, la traînée, étant colinéaire à la vitesse, la trajectoire est nécessairement rectiligne, ce qui simplifie naturellement les calculs. Dans la réalité la pesanteur incurve légèrement cette trajectoire vers le sol.

1-2- Notations et figure -

Nous notons :

Au point courant : X, Z les coordonnées de la capsule, V la vitesse, R_x la force de traînée



V_e, Z_e, γ_e les conditions de rentrée. Allen considère dans ce calcul simplifié que $Z_e = 80$ km

1-3- Résolution du problème -

La loi fondamentale de la mécanique, traduite en projection sur la trajectoire donne :

$$(1) \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_0 \frac{SC_x}{M} e^{-\frac{Z}{H}} V^2$$

Pour compléter le système différentiel nous rajoutons l'équation déduite de la projection du vecteur vitesse sur la verticale, soit :

$$(2) \quad \frac{dZ}{dt} = -V \sin \gamma_e$$

L'élimination de la variable t entre (1) et (2) suivie d'une mise en forme, donne :

$$(3) \quad \frac{dV}{V} = \frac{1}{2} K_0 e^{-\frac{Z}{H}} d\left(\frac{Z}{H}\right) \quad \text{où} \quad K_0 = \frac{\rho_0 H}{\sin \gamma_e} \frac{SC_x}{M}$$

Le lecteur achèvera l'intégration de cette équation à variable séparables. Une constante d'intégration interviendra, que vous calculerez dans le cas pratique de la cabine Apollo ($SC_x / M = 0.0032 \text{ MKSA}$, $Z_e = 80 \text{ km}$), vous vérifierez ainsi, avec une excellente approximation que cette constante vaut 1.

Ainsi, nous arrivons à une expression très simple de la vitesse :

$$(4) \quad V = V_e e^{-\frac{K_0}{2} e^{-\frac{Z}{H}}}$$

Un paramètre intéressant à calculer est la décélération, et notamment sa valeur maximale. Sachant que la limite humaine est de 10 g, on comprend le problème.

Compte tenu de (4) en remplaçant la vitesse dans l'expression (1) de la décélération, il vient en valeur absolue, le niveau g en fonction de Z.

$$\gamma = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{SC_x}{M} V_e^2 e^{-\frac{Z}{H}} e^{-K_0 e^{-\frac{Z}{H}}}$$

La recherche du zéro de la dérivée donne l'altitude Z où se produit la décélération maximum et ce maximum.

$$Z_{\gamma \max} = H \ln K_0 \Rightarrow \gamma_{\max} = V_e^2 \frac{\sin \gamma_e}{2eH}$$

2- INTERPRETATION ET APPLICATION PRATIQUE -

Le résultat ci-dessus est d'une importance considérable, puisqu'il démontre, contre toute attente, que la forme du corps de rentrée n'a aucune incidence sur le niveau maximum de la décélération, du moins pour une rentrée balistique. La forme ne joue que sur l'altitude où se produit le maximum de freinage, plus le C_x est grand et plus haut se produit le phénomène.

Or nous savons que l'énergie mécanique initiale se dégrade en chaleur convective et radiative. Le problème majeur dans un vol humain, est d'éviter un échauffement excessif de l'intérieur de la capsule. Pour y parvenir, il faut :

Isoler la partie frontale de la capsule de la couche ionisée très chaude

C'est le rôle du BOUCLIER THERMIQUE

Evacuer loin des parois latérales ce flux de chaleur

C'est alors l'utilisation de la remarque initiale. On peut choisir une forme du corps de rentrée très évasée, qui "éclate" l'onde de choc et l'écarte des parois, entraînant ainsi une couche limite épaisse qui limite les échanges thermiques.

Eviter l'échauffement de la partie isolante

Le moyen est fourni par la thermodynamique, en choisissant :

Un matériau qui utilise la chaleur pour un changement de phase à température peu supérieure à la température ambiante de la cabine

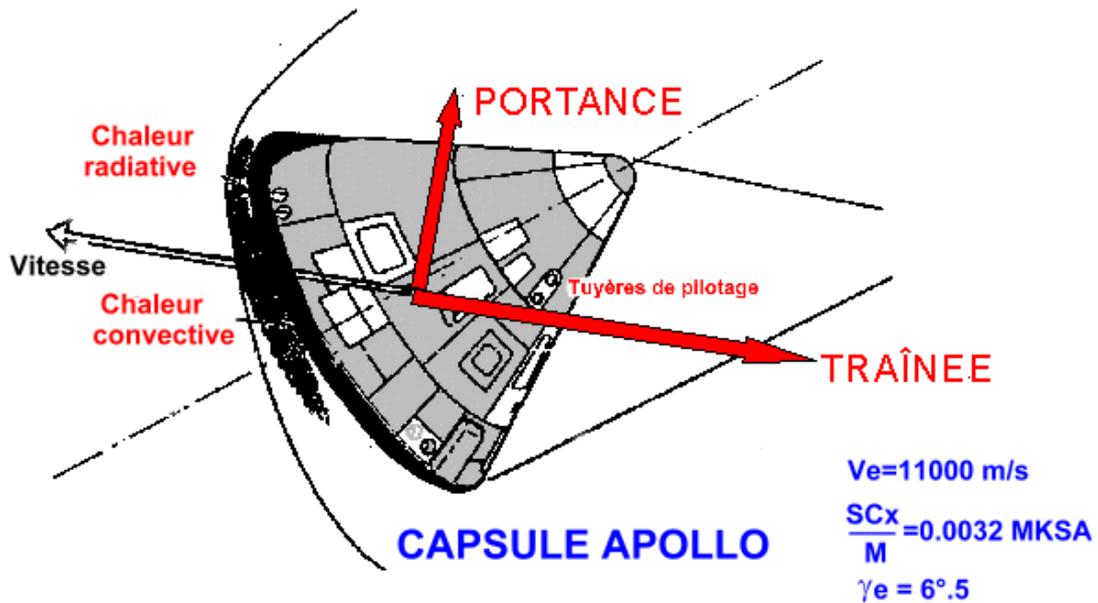
Un changement de phase solide - gaz pour éviter les dépôts et "coulures" sur les parois, le bouclier se sublime donc.

C'est ce qui a été réalisé avec la cabine Apollo, revenant de la lune à une vitesse de près de 11000 m/s. de plus cette cabine était pilotée pour limiter la décélération maximum.

QUELQUES VALEURS NUMERIQUES EN BALISTIQUE :

Apollo, sous $6^\circ.5$ au retour de la lune, aurait subi une décélération de près de 38 g vers 39 km d'altitude

Cette même cabine revenant d'une orbite basse à 8000 m/s, sous ce même angle de rentrée subirait 20 g.



Un missile balistique, empruntant une ellipse d'énergie minimale, possédant une surface 0.528 m^2 , une masse de 10000 kg et un C_x de 0.25 , entrant à 5860 m/s , sous un angle de 34° , subit 54 g vers 6800 m du sol.

Une fusée sonde rentrant verticalement à 2000 m/s subit 11 g .

CONCLUSIONS :

Les considérations précédentes montrent que l'angle de rentrée doit rester faible et qu'une rentrée balistique est pratiquement impensable dans l'atmosphère terrestre. On comprend donc mieux l'usage d'un pilotage en incidence notamment, autorisant l'usage d'une finesse et permettant de retarder l'entrée à grande vitesse dans les couches denses de notre atmosphère.

Chapitre 3-

RENTREE DE CHAPMAN

Vous avez déjà consulté la théorie d'ALLEN et êtes au courant de la manœuvre de déorbitation qui précède la traversée des couches atmosphériques terrestres ou éventuellement martienne.

Pour avoir quelques idées précises sur l'évolution des paramètres de rentrée, position, vitesse, accélération, traînée,... CHAPMAN, au prix de simplifications bien justifiées, a mis au point une méthode de calcul adaptée aux angles de rentrée réduits ($<6^\circ$) et surtout aux rentrées planées utilisant une portance. L'avantage de la méthode est de s'appliquer à des rentrées sur d'autres planètes.

1- HYPOTHESES DE CALCUL -

a- Modélisation de la masse volumique de l'air : Une loi exponentielle est adoptée de la forme ci dessous, où Z désigne l'altitude sol et β une constante:

$$Z > 15 \text{ km} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\beta z} \quad \rho_0 = 1.39 \text{ kg / m}^3 \quad \beta = \frac{1}{7160} \text{ m}^{-1}$$

b- La rentrée étant très largement hypersonique. Les coefficients aérodynamiques de traînée C_x et de portance C_z sont constants.

c- La théorie complète celle d'ALLEN qui était valable pour des angles de rentrée supérieurs à 6° , et impose de petits angles de rentrée inférieurs à 6° .

d- Contrairement aux calculs d'Allen, la pesanteur est prise en compte mais sa variation en fonction de l'altitude ne l'est pas.

e- La terre est supposée immobile.

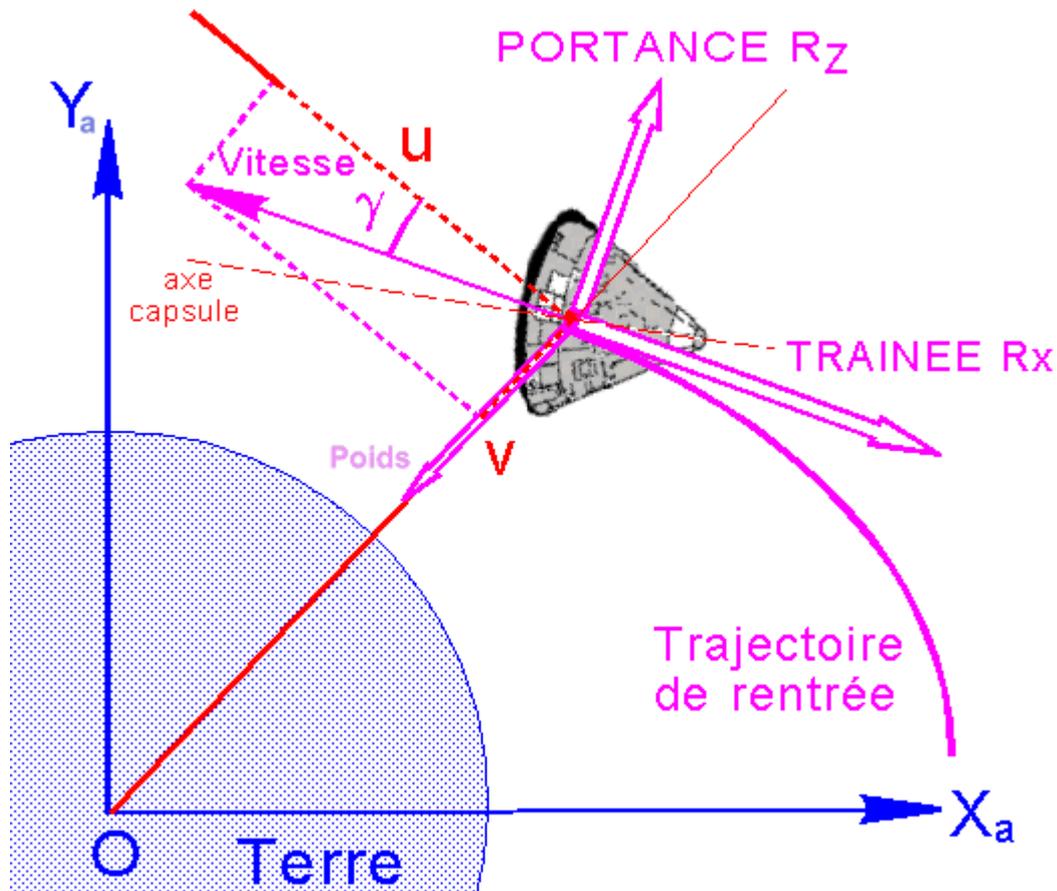
2- NOTATIONS ET FONCTION $Y(x)$ DE CHAPMAN -

Nous n'allons pas refaire tous les calculs de CHAPMAN, renvoyant le lecteur aux ouvrages spécialisés, en particulier Re-entry and Planetary Entry, Physics and technology by W.H.T LOH, SPRINGER- Verlag New-York 1968.

Indiquons simplement que CHAPMAN part de la loi fondamentale de la mécanique, en projection sur les axes des coordonnées polaires associées au mouvement.

2-1- Figure et notations –

On note avec en appui la figure:



V la vitesse courante, g la pente, positive si V est sous l'horizontale.

u la vitesse orthoradiale ou encore horizontale $u = V \cos \gamma$, u_0 est la vitesse d'orbitation circulaire à l'altitude où se trouve l'engin.

f la finesse $f = R_z / R_x = C_z / C_x$.

$R_m = 6410$ km désignera la valeur moyenne du rayon vecteur.

S est la surface de référence des calculs aérodynamiques et M la masse du corps de rentrée.

2-2- Fonction $x \rightarrow Y(x)$ de CHAPMAN -

CHAPMAN définit une variable x sans dimension et une fonction $Y(x)$ également sans dimension, de la manière suivante

$$x = \frac{u}{u_0} \quad Y(x) = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{SC_x}{M} \sqrt{\frac{R_m}{\beta}} x e^{-\beta z}$$

2-3- Comment calculer Y(x) -

a- Equation différentielle vérifiée par Y(x) -

CHAPMAN, après des calculs non explicités, montre que Y(x) vérifie une équation différentielle d'ordre 2 :

$$xY'' - Y' + \frac{Y}{x} = \frac{1-x^2}{xY} \cos^4 \gamma - \sqrt{\beta(R_T + Z_e)} f \cos^3 \gamma$$

$$\text{avec} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\beta(R_T + Z_e)} \sin \gamma = -Y' + \frac{Y}{x} \\ f = \frac{C_z}{C_x} \end{array} \right]$$

b- Conditions initiales et tabulation de Y(x) -

Il faut tout d'abord calculer la manœuvre de déorbitation. Ceci donnera donc $x_0 = V_{e0} \cos \gamma_{e0}$. De même, avec l'altitude initiale $Z_e = 80$ km, on peut calculer la valeur de $Y(x_0)$, et ainsi la dérivée initiale $Y'(x_0)$.

Les calculs se ramènent alors à une programmation de calculs numériques, fournissant une tabulation de Y(x) et naturellement de sa dérivée Y'(x).

3- RESULTATS DE CHAPMAN -

3-1- Evolution de l'altitude -

La connaissance de Y(x) et le choix de la finesse permettent le calcul de tous les paramètres de rentrée par :

$$Z = \frac{1}{\beta} \left[\text{Ln} \frac{x}{Y} + \text{Ln} \frac{SC_x}{M} + \text{Ln} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \sqrt{\frac{R_m}{\beta}} \right) \right]$$

relation qui montre de manière très explicite, trois termes:

le premier dépendant uniquement du choix de la rentrée, altitude, vitesse, angle et finesse.

le deuxième ne dépendant que de la forme du corps de rentrée, il montre en particulier et on y trouvera une confirmation des calculs de ALLEN, que la forme n'intervient que sous forme d'un décalage d'altitude.

le troisième représente la part de la planète, avec ses caractéristiques propres, rayon moyen atmosphérique et modélisation de la masse volumique de l'atmosphère.

3-2- Autres paramètres –

a- Angle de rentrée –

Il faut le surveiller car il ne doit pas dépasser 10° , pour que la théorie reste valide.

$$Y = \text{Arc sin} \left(\frac{\frac{Y}{x} - Y'}{\sqrt{\beta(R_T + Z_e)}} \right)$$

b- La traînée qui se calcule par rapport au poids -

$$R_x = mg \sqrt{\beta(R_T + Z_e)} \frac{xY}{\cos^2 \gamma}$$

et naturellement, la portance grâce à la finesse.

c- La norme V de la vitesse, la décélération horizontale Γ -

$$V = \frac{x}{\cos \gamma} \sqrt{\frac{\mu}{R_T + Z_e}} \quad \Gamma = \sqrt{\beta(R_T + Z_e)} \frac{xY}{\cos \gamma} g$$

d- Le temps au cours de la rentrée, permettant de graduer la trajectoire -

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta g}} \int_x^{x_e} \frac{\cos \gamma}{xY} dx$$

e- La distance sol parcourue depuis le point d'entrée -

$$d(x) = R_T^2 \sqrt{\frac{1}{\beta(R_T + Z_e)}} \int_x^{x_e} \frac{\cos \gamma}{Y(R_T + Z)} dx$$