

Mécanique des milieux continus

Nicolas MOËS



EI1

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

Table des matières

1	Pourquoi la mécanique des milieux continus	5
1.1	De la mécanique du point matériel à la mécanique des milieux continus	5
1.2	La mécanique des milieux continus au centre des disciplines de l'ingénieur . . .	7
1.3	Notion de milieu continu et d'échelle d'observation	8
1.4	Remarques importantes	9
1.5	Système d'unités	9
2	Éléments de calcul tensoriel	10
2.1	Convention de sommation d'Einstein	10
2.2	Symbole de Kronecker	10
2.3	Symbole de permutation dit de Lévi-Civita	11
2.4	Changement de base	11
2.5	Scalaire	12
2.6	Vecteur	12
2.7	Tenseur d'ordre 2	13
2.8	Étude des tenseurs d'ordre 2	13
2.8.1	Tenseur identité	13
2.8.2	Tenseur symétrique et antisymétrique	13
2.8.3	Trace d'un tenseur	14
2.8.4	Produit contracté	14
2.8.5	Produit tensoriel	14
2.8.6	Représentation spectrale d'un tenseur	15
2.9	Formule d'intégration par partie	16
2.9.1	Formule de Green-Ostrogradski	16
2.10	Formule de Stokes	16
2.11	Systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales	16
2.11.1	Coordonnées cartésiennes	17
2.11.2	Coordonnées cylindriques	17
2.11.3	Coordonnées sphériques	19
2.11.4	Formules utiles	20
3	Description de la cinématique d'un milieu continu	22
3.1	Trajectoire et dérivées temporelles	22
3.2	Gradient de la transformation	26
3.3	Définition des tenseurs de déformation	28
3.4	Interprétation des composantes des tenseurs de déformations	30
3.5	Décomposition polaire	32
3.6	Changement de volume	34
3.7	Changement de surface	35
3.8	Taux de déformation	35

3.9	Déformations en petites perturbations	36
3.9.1	Formulation de l'hypothèse des petites perturbations (HPP)	36
3.9.2	Simplification des résultats dans l'hypothèse HPP	37
3.9.3	Conditions de compatibilité des déformations	40
3.9.4	Directions principales des déformations et cercle de Mohr	41
3.9.5	Dépouillement d'une rosette en extensométrie	42
4	Lois de bilan	44
4.1	Forme globale des lois de bilan	44
4.2	Forme locale des lois de bilan	45
4.3	Conséquences des lois de bilan	53
4.3.1	Conséquences de la conservation de la masse	53
4.3.2	Conséquences de la bilan de quantité de mouvement	54
4.3.3	Conséquences de la bilan du moment cinétique	54
4.3.4	Conséquences du bilan de l'énergie	55
5	Le tenseur des contraintes	56
5.1	Introduction du tenseur des contraintes par extension de la mécanique des solides indéformables	56
5.1.1	Volume élémentaire au sein du milieu	57
5.1.2	Volume élémentaire en surface du milieu	59
5.2	Introduction du tenseur des contraintes par le principe des puissances virtuelles	62
5.2.1	Définition des puissances virtuelles	62
5.2.2	Théorème de l'énergie cinétique	63
5.2.3	La dualité en mécanique	64
5.3	Propriétés locales du tenseur des contraintes	65
5.3.1	Contrainte normale et contrainte de cisaillement	65
5.3.2	Contraintes normales principales	66
5.3.3	Représentation des contraintes : le tricerclé de Mohr	66
5.3.4	État plan de contrainte	69
5.3.5	Tenseur des contraintes sphérique	69
5.3.6	Tenseur des contraintes uniaxial	70
5.3.7	Tenseur des contraintes de cisaillement simple	70
6	Théorie de l'élasticité linéaire isotrope	71
6.1	Les équations	71
6.1.1	La cinématique	71
6.1.2	Equilibre	72
6.1.3	Comportement élastique isotrope	72
6.1.4	Récapitulatif	76
6.2	Théorèmes de l'énergie potentielle	77
6.3	Techniques de résolution analytique	79
6.3.1	Approche en déplacement	79
6.3.2	Approche en contrainte	80
6.3.3	Solide en état plan de déformation	81
6.3.4	Solide en état plan de contrainte	82
6.3.5	Fonction de contrainte d'Airy	84
6.4	Techniques de résolution numériques	85
6.5	Thermoélasticité	85

7	Problèmes classiques d'élasticité	87
7.1	Cylindre sous pression	87
7.2	Traction d'un barreau prismatique	89
7.3	Torsion d'un barreau prismatique	91
8	Thermodynamique et lois de comportement	97
8.1	Le premier principe	97
8.2	Le second principe	98

Avant-Propos

Dans ce cours des milieux continus, une cohérence de contenu a été recherchée avec les autres cours de mécanique du Tronc Commun à savoir :

- dynamique des solides (1ère année) ;
- résistance des matériaux (1ère année) ;
- matériaux (1ère année) ;
- technologie de conception mécanique (1ère année) ;
- mécanique des fluides (2ème année) ;
- méthode des éléments finis (2ème année) ;
- mécanique des vibrations (2ème année).

Cette cohérence a été recherchée également autant que possible pour les notations (le cas échéant, un choix différent de notation par rapport à un autre cours de tronc commun est indiqué par une note en bas de page).

Rédiger un polycopié sur la mécanique des milieux continus pour un cours de tronc commun d'école d'ingénieurs n'est pas une tâche aisée. J'ai été grandement aidé dans cette entreprise par différents collègues qui ont pris la peine de me donner leur avis sur ce document. Les conseils pédagogiques de J.-F. Sini ont également été très bénéfiques. Enfin, mes remerciements vont à G. Legrain qui a réalisé le site web de ce cours et toutes les figures d'une main de maître.

Nicolas MOËS, Nantes, Septembre 2003.

Chapitre 1

Pourquoi la mécanique des milieux continus

1.1 De la mécanique du point matériel à la mécanique des milieux continus

La mécanique du point matériel permet de prédire le mouvement d'un point soumis à une ensemble de forces. On distingue dans cette théorie la description de la cinématique : position, vitesse et accélération du point, et la “dynamique” : relation entre force et mouvement (la seconde loi de Newton $\vec{f} = m\vec{a}$). Cette théorie permet par exemple de calculer le trajet d'électrons dans un champ magnétique ou de prédire l'orbite d'une planète soumise aux forces gravitationnelles.

Avec la mécanique du point matériel, on ne peut décrire les rotations d'un corps sur lui-même. Cette théorie n'est donc pas adaptée pour étudier le trajet d'une boule de billard ou pour étudier la rotation d'une planète ou d'un satellite sur lui-même lors de son orbite. Pour cela, il faut la mécanique des solides indéformables qui intègre la notion de rotation, d'inertie et de moment. La somme des moments s'appliquant sur le corps égale à tout instant à son moment d'inertie multiplié par son accélération angulaire.

Il est important de constater que pour un point matériel, la notion de rotation n'a pas de sens (un point ne peut tourner sur lui-même). De même le moment des forces s'appliquant sur le point est toujours nul puisque le bras de levier est toujours nul (moment calculé par rapport à la position du point). La dynamique d'un point matériel s'écrit donc simplement en terme de force et d'accélération. Pour décrire la dynamique d'un corps indéformable, on ajoute les notions de rotation, moment et inertie.

La mécanique des solides indéformables¹ permet de résoudre des problèmes importants de l'ingénieur comme ceux issus de la robotique (chaîne cinématique). En revanche, cette mécanique ne peut traiter les problèmes suivants :

- Déterminer la force nécessaire pour emboutir une canette à partir d'un tôle mince ;
- Calculer l'écoulement de l'eau sous un pneu en conduite sur route mouillée afin d'optimiser le dessin de ce pneu ;
- Déterminer le niveau d'échauffement de l'outil dans un procédé d'usinage. L'usinage est un procédé de fabrication dans lequel une pièce métallique brute est “taillée” à l'aide d'un petit outil. Le contact entre l'outil et la pièce se fait à grande vitesse et génère des copeaux (un peu comme la taille du bois). Ne manquez pas la journée porte ouverte de l'École pour assister à l'usinage d'une pièce ;

1. objet du cours de dynamique des solides de tronc commun 1ère année.

- Calculer la pression nécessaire pour souffler les bouteilles plastiques. Deux procédés industriels de soufflage existent (l’extrusion-soufflage et l’injection étirement soufflage). Il laisse sur le fond du culot des bouteilles plastiques deux signes caractéristiques différents : un point ou un trait ;
- Étudier la stabilité des talus ;
- Déterminer si une fissure détectée dans un réacteur ou sur le fuselage d’avion est critique (tous les avions qui volent ont des fissures mais rassurez-vous elles sont inspectées régulièrement) ;
- Simuler informatiquement les chocs crâniens dans les accidents de la route pour optimiser les airbags et les habitacles des voitures ;
- L’étude de la résistance d’une coque composite d’un voilier de course soumis aux chocs répétés avec la surface de l’eau (l’impact répété d’une coque sur l’eau est appelé tossage).

Pourquoi ces problèmes ne peuvent-ils pas être traités par la mécanique des solides indéformables? Reprenons chacun des exemples et discutons-le :

- La force nécessaire pour emboutir une canette dépend du matériau dont est constituée la tôle. La notion de “matériau” n’intervient pas en mécanique des solides indéformables : seule la masse et la forme (qui influe sur le moment d’inertie) sont considérées ;
- L’eau est le milieu qui par excellence se déforme facilement. Ceci est à l’opposé de la mécanique des solides qui considère les corps comme indéformables² ;
- La détermination du niveau d’échauffement d’un outil lors d’un procédé d’usinage requiert la thermodynamique. L’énergie mécanique dissipée par l’outil dans sa coupe est transformée en chaleur. Ce qui produit une élévation de température ;
- Le soufflage d’une bouteille fait intervenir des déformations extrêmes ;
- L’étude de la stabilité d’un talus se pose en ces termes : à partir de quelle pression exercée sur le talus, celui-ci glisse-t-il de manière irréversible? Une préoccupation éloignée de la mécanique des solides indéformables ;
- Une fissure est une surface sur laquelle l’intégrité de la matière est perdue. En mécanique des solides les corps sont indivisibles ;
- La modélisation d’un choc crânien est très complexe et entre dans le domaine dit de la bio-mécanique qui nécessite un travail collaboratif entre mécanicien, neuro-chirurgien, vétérinaire (analogie homme-animal). Une tête humaine est bien différente (même si l’on a la tête dure) d’un solide indéformable ;
- Les coques et mâts de voiliers de course sont réalisés en matériaux composites. Ces matériaux vus de près sont des structures à part entière : il y a des couches (appelées plis) constituées de fibres plongées dans une matrice³. Les propriétés de ces fibres et de la matrice, la séquence d’empilement, le mode de fabrication du matériau sont autant de facteurs déterminants sur la résistance du matériau. Cette problématique est encore une fois éloignée de la mécanique des solides.

On peut résumer la discussion ci-dessus, en disant que la mécanique des milieux continus doit être utilisée à la place de la mécanique des solides indéformables lorsque⁴ :

- des déformations interviennent ;
- le comportement du milieu qu’il soit fluide ou solide doit être pris en compte. Il faut connaître la relation entre la déformation du corps et les efforts mis en jeu ;

2. Il est vrai que la mécanique des solides peut faire intervenir une déformation via des ressorts placés entre des corps rigides mais on est loin de la déformation d’un fluide!

3. Entre les plis, sont insérées des couches minces qui ont la forme de nid d’abeilles.

4. En réalité, on peut voir la mécanique des solides comme le cas limite de la mécanique des milieux continus lorsque les corps sont pratiquement indéformables. En ce sens, la mécanique des milieux continus contient la mécanique rationnelle comme cas particulier.

- des phénomènes thermiques interviennent.

1.2 La mécanique des milieux continus au centre des disciplines de l'ingénieur

La mécanique des milieux continus est au centre des disciplines suivantes : le calcul des structures, les procédés de fabrication, la biomécanique, la mécanique des fluides, le génie civil, le design de nouveaux matériaux (la micro-structure d'un matériau peut être vue comme une structure à part entière).

Par exemple, pour le calcul des structures, les préoccupations sont les suivantes :

- Résistance. La pièce ou structure doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées : (“un pont ne doit pas s'écrouler lors du passage d'un camion”);
- Rigidité. La pièce ou structure ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée (“un pont ne doit pas s'enfoncer lors du passage d'une voiture”);
- Stabilité. Un léger changement des conditions extérieures ne doit pas conduire à une réponse catastrophique de la pièce ou de la structure : (“une brise légère ne doit pas conduire à la ruine catastrophique d'un pont”);
- Endurance. La pièce ou structure soumise à un chargement cyclique (répété) doit pouvoir sans rupture supporter un nombre important de cycles : (“le pont doit soutenir un trafic répété pendant de longues années”, “un réacteur d'avion doit tenir un maximum possible de vols sans se fissurer”).

Quant à l'optimisation des procédés de fabrication, les préoccupations sont les suivantes :

- Économie de matière. Comment produire une pièce répondant à un cahier des charges précis avec le moins de matière possible ? S'assurer de pouvoir effectivement produire ces pièces (on constate depuis 20 ans une réduction importante du poids des canettes et des bouteilles plastiques de soda.);
- L'usinage est un procédé de fabrication permettant de façonner des pièces métalliques avec un outil coupant. Soit l'outil, soit la pièce, soit les deux se déplacent à vitesse élevée. L'étude du procédé d'usinage est important pour améliorer la longévité de l'outil et le fini de surface de la pièce usinée. Les préoccupations sont similaires pour les procédés telles que le fraisage, l'emboutissage, le galetage, ...

La mécanique des milieux continus est un cadre physique et mathématique permettant de modéliser un problème concret. Un fois le modèle mathématique établi, il pourra être résolu par une méthode analytique ou numérique. La modélisation suivie de la résolution du modèle forment ce que l'on appelle la simulation du problème concret. Cette simulation devra être validée par des expérimentations lorsque celles-ci sont disponibles et le modèle corrigé le cas échéant.

Dans certains cas, les expérimentations sont très limitées voire inexistantes d'où l'importance capitale de la simulation. Par exemple, l'étude de la résistance des structures en béton protégeant le coeur des réacteurs nucléaires peut difficilement passer par des expérimentations à l'échelle 1.

L'utilisation de la simulation qui s'affine de plus en plus avec les progrès en modélisation et la puissance des ordinateurs permet également de réduire le nombre d'essais nécessaires pour mettre au point un produit. C'est le cas notamment du design des voitures au crash. Le nombre de voitures sacrifiées en essai a fortement baissé depuis trente ans et les voitures sont néanmoins de plus en plus sûres.

1.3 Notion de milieu continu et d'échelle d'observation

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel *continu* si à chaque instant et en chaque point de ce domaine on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel. La grandeur physique peut être représentée mathématiquement par :

- un scalaire (masse volumique, température, concentration d'un polluant, ...);
- un vecteur (vitesse, accélération, forces volumiques, couples volumiques, ...);
- un tenseur d'ordre 2 (déformations, contraintes, ...);
- un tenseur d'ordre supérieur à 2 comme par exemple le tenseur d'élasticité qui est d'ordre 4.

La grandeur physique donnée à chaque instant et en chaque point forme ce que l'on appelle un champ. On parlera par exemple du champ de température dans une pièce automobile à un instant donné ou bien de l'évolution du champ de contrainte dans une tôle lors de son écrasement par une presse.

Savoir si pour un domaine matériel donné, on a affaire à un milieu continu ou non dépend de l'échelle d'observation. Par exemple, l'air enfermé dans un bocal est un milieu continu pour un observateur "macroscopique"⁵. Le champ de vitesse observée par exemple avec un vélocimètre laser est nul partout et la pression uniforme. En revanche, un observateur "microscopique" voit des molécules se déplaçant dans le vide de manière erratique et à grande vitesse (le mouvement Brownien) et est incapable d'y voir un milieu continu. La différence entre les deux observations provient de l'échelle d'observation. Un point pour l'observateur macroscopique est en fait un petit volume qui contient un grand nombre de molécules. Par exemple un petit volume de $0,1\text{mm}^3$ (soit un cube de l'ordre d'un demi-millimètre de côté) contient de l'ordre de 3 millions de milliards de molécules⁶. La vitesse moyenne observée est une moyenne statistique du mouvement Brownien.

De même, la notion de pression constante dans le bocal perd son sens à l'échelle microscopique : la pression macroscopique est le résultat statistique moyen de l'impact du mouvement Brownien sur la surface sensible du manomètre. Si on disposait d'un micro-manomètre à l'échelle moléculaire, on mesurerait de temps en temps un impact, ce qui est fort loin de la notion de pression constante.

La mécanique des milieux continus est un modèle mathématique qui permet de "moyenner" une réalité complexe et obtenir ainsi un modèle qui peut être traité analytiquement ou informatiquement. A l'opposé du calcul explicite du mouvement des molécules dans un bocal qui ne peut absolument pas être traité à l'aide de l'informatique actuelle.

Comme autre exemple, considérons l'étude d'un barrage. Ce barrage est construit en béton. Le béton est un matériau composé de sable et de graviers de différentes tailles. Le barrage est un milieu continu dans lequel un point est un volume d'une dizaine à une centaine de centimètres cubes selon la taille des éléments entrant dans la composition du béton. A l'image des molécules dans le bocal, il est exclu de traiter un modèle décrivant le mouvement de chaque petit caillou ou grain de sable constituant le barrage!

Comme dernier exemple, signalons que certains calculs en astronomie considèrent les galaxies comme des fluides. Le point du milieu continu a, dans ce cas, une dimension de l'ordre de mille années-lumière au cube.

Le modélisateur doit donc toujours avoir à l'esprit l'échelle caractéristique du problème traité. Particulièrement dans l'interprétation des résultats de simulation obtenus avec le modèle milieu de continu. Par exemple, la pression prédite par une simulation numérique en un point du barrage doit être interprétée comme la pression moyenne s'exerçant en réalité sur une surface

5. Exemple tiré de [1].

6. Une môle d'air à 25 degré Celsius (22.4 litres) contient $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules.

de quelques centimètres à quelques décimètres carré. Si l'on souhaite comparer les résultats du modèle avec la réalité (mesure in situ), il faut que les mesures in situ utilisent la même échelle que celle du calcul.

1.4 Remarques importantes

Dans les milieux continus de ce cours, on considère que la déformation du milieu est caractérisée par un vecteur déplacement en chaque point. On dit que le milieu est *non polarisé*. L'orientation propre de chaque point est indifférente. Ce n'est pas toujours le cas : en magnétohydrodynamique (étude des fluides mécaniquement sensibles aux champs magnétiques car ils transportent des charges électriques) où cette hypothèse est inacceptable.

La mécanique des milieux continus est une théorie qui perd son sens si les vitesses mises en jeu se rapprochent de la vitesse de la lumière ou bien si la taille du système devient très petite (taille atomique). Dans ces cas extrêmes, les mécaniques relativiste et quantique, respectivement, sont plus appropriées.

1.5 Système d'unités

Le système d'unité adopté pour ce cours est le système international. Il comporte sept unités fondamentales que sont :

- l'unité de masse (le kilogramme : kg) ;
- l'unité de mesure (le mètre : m) ;
- l'unité de temps (la seconde : s) ;
- l'unité de température (le Kelvin : K) ;
- l'unité de courant électrique (l'Ampère : A) ;
- l'unité d'intensité de lumineuse (la Candela : Cd) ;
- l'unité de quantité de matière (la môle : mol).

Toutes les autres unités peuvent se déduire de ces unités fondamentales et sont introduites par commodité. Par exemple,

- le Newton (N) est en fait $mkg s^{-2}$;
- le Pascal (Pa) est Nm^{-2} donc $m^{-1}kg s^{-2}$;
- le Joule (unité de travail) est en $m^2kg s^{-2}$;
- le Watt (unité de puissance) en $m^2kg s^{-3}$.

Chapitre 2

Éléments de calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. Ces outils mathématiques indispensables permettent non seulement d'établir des résultats fondamentaux indépendamment du référentiel choisi, mais en outre, confèrent aux formules qui les expriment une concision remarquable. Grâce à cela, on peut porter son attention sur les phénomènes physiques qu'elles représentent plutôt que sur les équations elles-mêmes.

Les scalaires, vecteurs et tenseurs ont en effet la propriété d'être invariant lors d'un changement de base. C'est ainsi que grâce à ces quantités on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque c'est à dire indépendamment de la base choisie.

Dans ce cours, nous n'aurons pas recours à la forme la plus complète du calcul tensoriel ; nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées orthogonales, éventuellement curvilignes (par exemple le système de coordonnées cylindriques ou sphériques), ce qui permet des simplifications considérables sans introduire de restrictions trop gênantes¹. En outre, tous les vecteurs et tenseurs considérés seront toujours à composantes réelles. Cette introduction au calcul tensoriel s'inspire de [3].

Avant de définir ce que sont les scalaires, vecteurs et tenseurs, nous introduisons une série de définitions.

2.1 Convention de sommation d'Einstein

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1,2,3. Par exemple, $a_i b_i$ est la notation compacte pour $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. L'indice répété sur lequel on effectue la sommation est appelé indice muet. On peut lui substituer n'importe quel indice pourvu qu'il diffère des autres indices présents dans le monôme. Un indice non muet est dit franc. Ainsi, dans $a_i b_j$, l'indice i est franc et l'indice j est muet ; on peut le remplacer par n'importe quel autre indice excepté i . Cette convention de sommation est dite convention d'Einstein.

2.2 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker (on dit aussi le delta de Kronecker) est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

1. Lorsque le système de coordonnées n'est pas orthogonal, il faut distinguer les composantes covariantes et contravariantes du tenseur. Une présentation plus générale du calcul tensoriel peut être trouvée dans [2].

2.3 Symbole de permutation dit de Lévi-Civita

Soient i, j, k trois indices ayant des valeurs différentes. On dit qu'ils forment une permutation paire de 1,2,3 si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre pair de permutations. On dit qu'ils forment une permutation impaire de 1,2,3 si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre impair de permutations. Les permutations paires de 1,2,3 sont donc : (1,2,3), (3,1,2) et (2,3,1) et les permutations impaires : (2,1,3), (1,3,2) et (3,2,1). Cela étant, le symbole de permutation est défini par

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux quelconques des indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire de } 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

2.4 Changement de base

Considérons deux bases orthonormées (vecteurs de bases unitaires et orthogonaux entre eux), dont les bases respectives sont notées $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$. Soient, P_{ij} , les coefficients caractérisant ce changement de repère.

$$P_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^* \quad (2.3)$$

Ils peuvent s'interpréter comme les composantes du vecteur \vec{e}_i dans le repère $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$:

$$\vec{e}_i = P_{ij} \vec{e}_j^* \quad (2.4)$$

et réciproquement, les coefficients P_{ij} peuvent s'interpréter comme les composantes du vecteur \vec{e}_j^* dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_j^* = P_{ij} \vec{e}_i \quad (2.5)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{e}_j^* = P_{ji}^T \vec{e}_i \quad (2.6)$$

car $P_{ji}^T = P_{ij}$. En injectant (2.4) dans (2.6), on a :

$$\vec{e}_j^* = P_{ji}^T P_{ik} \vec{e}_k \quad (2.7)$$

Donc :

$$P_{ji}^T P_{ik} = \delta_{jk} \quad (2.8)$$

De même, en injectant (2.6) dans (2.4), on a :

$$\vec{e}_i = P_{ij} P_{jk}^T \vec{e}_k \quad (2.9)$$

d'où :

$$P_{ij} P_{jk}^T = \delta_{ik} \quad (2.10)$$

En notant P la matrice contenant les coefficient P_{ij} , les relations ci-dessus se réécrivent :

$$PP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ce qui indique que la matrice de passage P est une matrice orthogonale : son inverse et sa transposée coïncident.

2.5 Scalaire

Certaines grandeurs comme la masse volumique ou la température s'expriment par un seul nombre, qui ne dépend pas de la base choisie. Ce sont des scalaires. De manière plus mathématique, nous définirons un scalaire comme suit : *un scalaire s est un être mathématique à une seule composante et invariant lors d'un changement de base.*

2.6 Vecteur

Des grandeurs telles que la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, un flux de chaleur ou une force sont caractérisés par leur direction, leur sens et leur intensité. Ce sont des vecteurs. On les représente par un segment orienté. Un vecteur possède trois composantes qui dépendent du repère choisi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (2.13)$$

En notation indicielle, on écrira plutôt

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \quad (2.14)$$

en utilisant la convention de sommation. Si l'on se réfère à la base $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$, on écrira

$$\vec{a} = a_i^* \vec{e}_i^* \quad (2.15)$$

Il s'agit toujours du même vecteur mais exprimé dans une autre base.

Il est capital de comprendre que lors d'un changement de base, les composantes du vecteur changent alors que le vecteur lui-même ne change pas. En clair, bien que les a_i sont différents des a_i^* , on a

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_i^* \vec{e}_i^* \quad (2.16)$$

Pour que cela soit possible, il faut que les composantes du vecteur se transforment comme :

$$a_i = P_{ij} a_j^*, \quad a_j^* = P_{ij} a_i \quad (2.17)$$

Cette propriété suggère la définition mathématique suivante d'un vecteur : *un vecteur \vec{a} est un être mathématique qui, lors d'un changement de repère $\vec{e}_i = P_{ij} \vec{e}_j^*$ se transforme selon la formule $a_i = P_{ij} a_j^*$.*

En utilisant la notation matricielle, on peut réécrire (2.17) comme

$$[\vec{a}] = P[\vec{a}]_*, \quad [\vec{a}]_* = P^T[\vec{a}] \quad (2.18)$$

Faisons le point sur ces notations :

- \vec{a} est un vecteur ;
- a_i est la i ème composante de ce vecteur dans une base donnée ;
- a_i^* est la i ème composante de ce même vecteur mais dans une autre base ;
- $[\vec{a}]$ est la matrice colonne regroupant les trois composantes du vecteur \vec{a} dans une base donnée

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

- $[\vec{a}]_*$ est la matrice colonne regroupant les trois composantes du même vecteur \vec{a} mais dans une autre base

$$[\vec{a}]_* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Finalement, il faut noter que dans l'équation (2.18) P n'est pas mis entre crochet car c'est déjà une matrice. La matrice de passage comme son nom l'indique est un tableau de nombre. Il ne s'agit pas d'une quantité tensorielle.

2.7 Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 s'exprime par

$$\bar{\bar{A}} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (2.21)$$

Un tenseur d'ordre 2 est un être mathématique à 9 composantes qui, lors d'un changement de base $\vec{e}_i = P_{ij} \vec{e}_j^*$, se transforme selon les formules :

$$A_{ij} = P_{ik} A_{kl}^* P_{lj}^T, \quad A_{kl}^* = P_{ki}^T A_{ij} P_{jl} \quad (2.22)$$

ou sous forme matricielle

$$[\bar{\bar{A}}] = P [\bar{\bar{A}}]_* P^T, \quad [\bar{\bar{A}}]_* = P^T [\bar{\bar{A}}] P \quad (2.23)$$

Nous insistons une nouvelle fois sur le fait que P est une matrice et n'a rien à voir avec un tenseur d'ordre 2. Un tenseur d'ordre 2 est une quantité intrinsèque indépendante de la base choisie alors que P est un tableau de nombre donnant les produits scalaires entre les vecteurs de la première et de la seconde base : $P_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^*$.

2.8 Étude des tenseurs d'ordre 2

Nous étudions ici en détail les tenseurs d'ordre 2 compte tenu de leur importance en mécanique des milieux continus.

2.8.1 Tenseur identité

Le tenseur identité noté $\bar{\bar{I}}$ est un tenseur particulier car ses composantes sont les mêmes dans toute base orthonormée et donnent la matrice identité :

$$[\bar{\bar{I}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

autrement dit $I_{ij} = \delta_{ij}$.

2.8.2 Tenseur symétrique et antisymétrique

Un tenseur est symétrique s'il est égal à sa transposée :

$$\bar{\bar{A}} \text{ symétrique} \Leftrightarrow \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}^T \Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji} \quad (2.25)$$

Un tenseur est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de sa transposée :

$$\bar{\bar{A}} \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow \bar{\bar{A}} = -\bar{\bar{A}}^T \Leftrightarrow A_{ij} = -A_{ji} \quad (2.26)$$

Cela n'est possible que si les termes diagonaux de $\bar{\bar{A}}$ sont nulles : $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$.

La symétrie ou l'antisymétrie est une propriété intrinsèque d'un tenseur. Si la matrice représentant les composantes d'un tenseur dans une base est (anti)symétrique, elle le restera dans tout autre base.

Tout tenseur d'ordre 2, $\bar{\bar{A}}$, peut s'écrire comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}^{\text{sym}} + \bar{\bar{A}}^{\text{asym}}, \quad \bar{\bar{A}}^{\text{sym}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{A}}^T), \quad \bar{\bar{A}}^{\text{asym}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{A}}^T) \quad (2.27)$$

2.8.3 Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux

$$\text{Tr}\bar{\bar{A}} = A_{ii} \quad (2.28)$$

2.8.4 Produit contracté

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} \quad C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \quad (2.29)$$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$s = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = A_{ij}B_{ij} = A_{ij}B_{ji}^T = \text{Tr}(\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}^T) \quad (2.30)$$

Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur \vec{b} est un vecteur, on peut post- ou pré-multiplier par un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que $\bar{\bar{A}}$ ne soit symétrique :

$$\bar{\bar{A}} \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad A_{ij}b_j = c_i \quad (2.31)$$

$$\vec{b} \cdot \bar{\bar{A}} = \vec{d} \quad b_iA_{ij} = d_j \quad (2.32)$$

Le produit contracté (appelé plus couramment produit scalaire) de deux vecteurs est un scalaire :

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad s = a_i b_i \quad (2.33)$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m = 1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, ...). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 2$ et le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 4$. Par exemple, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{\bar{C}}} = \bar{\bar{\bar{A}}} : \bar{\bar{B}} \quad C_{ij} = A_{ijkl}B_{kl} \quad (2.34)$$

Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre deux antisymétrique et un tenseur d'ordre deux symétrique donne toujours le tenseur nul.

2.8.5 Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre 2 :

$$\bar{\bar{A}} = \vec{b} \otimes \vec{c} \quad A_{ij} = b_i c_j \quad (2.35)$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m = 1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, ...). Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n + m$. Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 4 :

$$\bar{\bar{\bar{\bar{A}}}} = \bar{\bar{B}} \otimes \bar{\bar{C}} \quad A_{ijkl} = B_{ij}C_{kl} \quad (2.36)$$

2.8.6 Représentation spectrale d'un tenseur

On dit que \vec{v} est une direction principale (ou un vecteur propre) du tenseur $\bar{\bar{A}}$ d'ordre 2 si

$$\bar{\bar{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad A_{ij}v_j = \lambda v_i \quad (2.37)$$

La valeur λ est appelée valeur principale (ou valeur propre) de $\bar{\bar{A}}$ associée à la direction principale \vec{v} . Pour trouver \vec{v} , on écrit (2.37) sous la forme

$$(\bar{\bar{A}} - \lambda \bar{\bar{I}}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (A_{ij} - \lambda \delta_{ij})v_j = 0 \quad (2.38)$$

Ces équations constituent un système homogène de trois équations à trois inconnues v_1, v_2, v_3 qui n'admet de solution non triviale que si le déterminant de la matrice des coefficients s'annule :

$$\det(\bar{\bar{A}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = 0 \quad \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

L'équation ci-dessus donne trois racines $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$. On calcule les vecteurs propres correspondants en résolvant (2.38). Par exemple, pour λ_I , on aura

$$(\bar{\bar{A}} - \lambda_I \bar{\bar{I}}) \cdot \vec{v}_I = 0 \quad (2.40)$$

ce qui ne détermine les composantes de \vec{v}_I qu'à un coefficient près. On peut choisir ce coefficient de manière à avoir un vecteur \vec{v}_I de norme unitaire.

Si le tenseur $\bar{\bar{A}}$ est réel et symétrique, l'algèbre matricielle nous apprend que les valeurs propres et vecteurs propres sont réels. Si les trois valeurs propres de $\bar{\bar{A}}$ sont de plus distinctes, les trois vecteurs propres $\vec{v}_I, \vec{v}_{II}, \vec{v}_{III}$, sont mutuellement orthogonaux. Dans le cas où deux valeurs propres sont confondues ($\lambda_I = \lambda_{II} \neq \lambda_{III}$ par exemple), la résolution de (2.40) laisse une indétermination sur les directions de \vec{v}_I et \vec{v}_{II} : ils peuvent prendre une direction quelconque dans le plan de l'espace perpendiculaire à \vec{v}_{III} . Il est alors indiqué de choisir \vec{v}_I et \vec{v}_{II} orthogonaux entre eux dans ce plan. Enfin, dans le cas où $\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III}$, \vec{v}_I, \vec{v}_{II} et \vec{v}_{III} sont absolument indéterminés ; ils peuvent prendre des directions quelconques de l'espace, mais on peut toujours s'arranger pour les choisir mutuellement orthogonaux. Cette situation spéciale n'arrive que si le tenseur $\bar{\bar{A}}$ est de la forme $\bar{\bar{A}} = s \bar{\bar{I}}$ où s est un scalaire. On a alors $\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} = s$. Un tel tenseur est appelé un tenseur isotrope. Ses composantes ne sont pas affectées par un changement de base.

En conclusion, nous venons de voir que l'on peut toujours trouver trois vecteurs propres orthogonaux pour un tenseur réel symétrique d'ordre 2. La base formée par ces trois vecteurs est appelée base principale. Dans cette base, les coefficients du tenseur $\bar{\bar{A}}$ forment une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres :

$$[\bar{\bar{A}}]_{I,II,III} = P^T [\bar{\bar{A}}]_{1,2,3} P = \begin{bmatrix} \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matrice de passage est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_I \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{II} \cdot \vec{e}_1 & \vec{v}_{III} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v}_I \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{II} \cdot \vec{e}_2 & \vec{v}_{III} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v}_I \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{II} \cdot \vec{e}_3 & \vec{v}_{III} \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Enfin, on vérifie facilement que le tenseur $\bar{\bar{A}}$ peut s'écrire :

$$\bar{\bar{A}} = \lambda_I \vec{v}_I \otimes \vec{v}_I + \lambda_{II} \vec{v}_{II} \otimes \vec{v}_{II} + \lambda_{III} \vec{v}_{III} \otimes \vec{v}_{III} \quad (2.43)$$

C'est ce qu'on appelle la décomposition spectrale du tenseur.

2.9 Formule d'intégration par partie

On établit en analyse une formule générale d'intégration par parties. On la rappelle ici sans démonstration. Soit dans un repère cartésien un domaine ω délimité par une frontière $\partial\omega$ (cela peut être en 3D un volume délimité par une ou plusieurs surfaces, ou en 2D une surface délimitée par une ou plusieurs courbes ou en 1D un segment délimité par deux points). Soient F et G deux tenseurs définis sur ω et suffisamment continus. Soit, \vec{n} , la normale extérieure à $\partial\omega$. On a

$$\int_{\omega} F_{ijk\dots} \partial_q G_{lmn\dots} = - \int_{\omega} \partial_q F_{ijk\dots} G_{lmn\dots} - \int_{\partial\omega} n_q F_{ijk\dots} G_{lmn\dots} \quad (2.44)$$

La relation (2.44) est valable quel que soit l'ordre des tenseurs F et G . L'indice q peut même également coïncider avec l'un des indices $ijk\dots$ ou $lmn\dots$. En particulierisant le choix du tenseur F , on obtient les formules importantes en pratique de Green-Ostrogradski et de Stokes.

2.9.1 Formule de Green-Ostrogradski

Soit un volume V de frontière S sur laquelle est définie en tout point régulier la normale unitaire extérieure \vec{n} . Soit \mathcal{A} , $(\vec{\mathcal{A}}, \overline{\overline{\mathcal{A}}})$ des champs scalaires (vectoriels, tensoriels d'ordre 2) continus et dérivables sur V . On a :

$$\int_S \mathcal{A} \vec{n} dS = \int_V \vec{\text{grad}} \mathcal{A} dV \text{ soit } \int_S \mathcal{A} n_i dS = \int_V \mathcal{A}_{,i} dV \quad (2.45)$$

$$\int_S \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{\mathcal{A}} dV \text{ soit } \int_S \mathcal{A}_i n_i dS = \int_V \mathcal{A}_{i,i} dV \quad (2.46)$$

$$\int_S \overline{\overline{\mathcal{A}}} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \overline{\overline{\mathcal{A}}} dV \text{ soit } \int_S \mathcal{A}_{ij} n_j dS = \int_V \mathcal{A}_{i,j,j} dV \quad (2.47)$$

La notation $\mathcal{A}_{,i}$ indique la dérivée partielle de \mathcal{A} par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

La formule de Green-Ostrogradski porte aussi le nom de théorème de la divergence dans certains ouvrages. Ces formules sont obtenues à partir de la relation générale (2.44) en prenant F unitaire, si bien que sa dérivée s'annule dans le second membre de (2.44).

2.10 Formule de Stokes

Soit une surface plane S de normal \vec{N} et de contour C . Soit \vec{t} le vecteur tangent sur ce contour. On a la relation :

$$\int_C \vec{a} \cdot \vec{t} dC = \int_S (\vec{\text{rot}} \vec{a}) \cdot \vec{N} dS \text{ soit } \int_C a_i t_i dC = \int_S \varepsilon_{ijk} a_{k,j} N_i dS \quad (2.48)$$

2.11 Systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales

Pour établir et discuter les équations et principes généraux de la mécanique des milieux continus, les coordonnées cartésiennes sont adéquates. Toutefois, pour la résolution de certains problèmes particuliers, il est préférable d'utiliser des coordonnées curvilignes (on dit qu'un système de coordonnées est curviligne si la base locale évolue d'un point à l'autre). C'est particulièrement évident dans les problèmes axisymétriques où les coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'imposent (figure 2.1) et les problèmes à symétrie sphérique où les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) sont indiquées (figure 2.2).

2.11.1 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

et celles d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} a &= \frac{\partial a}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \vec{e}_3 = a_{,i} \vec{e}_i \\ \Delta a &= \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = a_{,ii} \\ \text{div} \vec{a} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{i,i} \\ \vec{\text{rot}} \vec{a} &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{e}_i \\ \vec{\text{div}} \bar{A} &= \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_2 + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_3 = A_{ij,j} \vec{e}_i \\ \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{a} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = a_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ \vec{\Delta} \vec{a} &= \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} \right) \vec{e}_1 + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2} \right) \vec{e}_2 + \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2} \right) \vec{e}_3 = a_{i,jj} \vec{e}_i \end{aligned}$$

2.11.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques :

$$x_1 = r \cos \theta \quad (2.51)$$

$$x_2 = r \sin \theta \quad (2.52)$$

$$x_3 = z \quad (2.53)$$

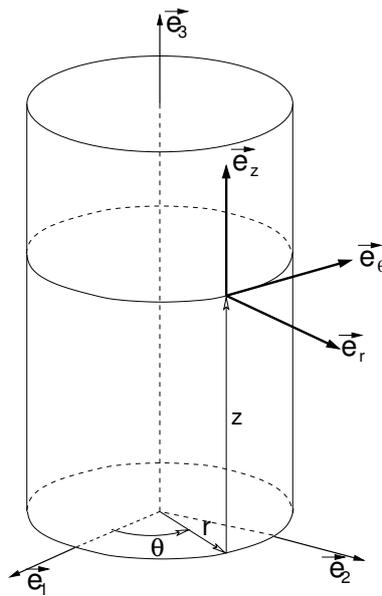


FIG. 2.1 –

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \quad (2.54)$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \quad (2.55)$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_3 \quad (2.56)$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base cylindrique (base * pour reprendre les notations (2.3))est donc :

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

En coordonnées cylindriques les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

et d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\bar{\bar{A}}] = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rz} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{zr} & A_{z\theta} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{grad}} a &= \frac{\partial a}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z \\
 \Delta a &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \\
 \text{div} \vec{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
 \vec{\text{rot}} \vec{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r} \right) \vec{e}_z \\
 \overline{\overline{\text{div}}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \\
 &\quad \left(\frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} \right) \vec{e}_\theta + \\
 &\quad \left(\frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_{zr} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \right) \vec{e}_z \\
 \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{a} (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} & \frac{\partial a_r}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} & \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.11.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques :

$$x_1 = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.60)$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.61)$$

$$x_3 = r \cos \theta \quad (2.62)$$

La base locale en chaque point est donnée par :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 \quad (2.63)$$

$$\vec{e}_\phi = \cos \phi \vec{e}_1 - \sin \phi \vec{e}_2 \quad (2.64)$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \sin \phi \vec{e}_1 + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3 \quad (2.65)$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base sphérique est donc :

$$P = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

En coordonnées sphériques les composantes d'un vecteur sont notées :

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\phi \\ a_\theta \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

et d'un tenseur d'ordre deux :

$$[\overline{\overline{A}}] = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\phi} & A_{r\theta} \\ A_{\phi r} & A_{\phi\phi} & A_{\phi\theta} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\phi} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{grada}} &= \frac{\partial a}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\
 \Delta a &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 a}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) \\
 \text{div} \vec{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r a_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\theta) \right] \\
 \vec{\text{rot}} \vec{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (r a_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\phi) \right] \vec{e}_r + \\
 &\quad \frac{1}{r} \left[\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) \right] \vec{e}_\phi + \\
 &\quad \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta a_\phi) - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right] \vec{e}_\theta \\
 \vec{\text{div}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2A_{rr} - A_{\phi\phi} - A_{\theta\theta} + A_{\theta r} \cotg \theta) \right) \vec{e}_r + \\
 &\quad \left(\frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3A_{\phi r} + 2A_{\phi\theta} \cotg \theta) \right) \vec{e}_\phi + \\
 &\quad \left(\frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{\theta\theta} \cotg \theta - A_{\phi\phi} \cotg \theta + 3A_{\theta r}) \right) \vec{e}_\theta \\
 \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{a} (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_r}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r} \\ \frac{\partial a_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{a_r}{r} + \frac{a_\theta}{r} \cotg \theta & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} - \frac{a_\phi}{r} \cotg \theta & \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.11.4 Formules utiles

$$\vec{\text{grad}}(ab) = a \vec{\text{grad}} b + b \vec{\text{grad}} a \quad (2.69)$$

$$\text{div}(a\vec{b}) = a \text{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\text{grad}} a \quad (2.70)$$

$$\text{div}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \text{div} \vec{b} + (\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (2.71)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} a = 0 \quad \forall a \quad (2.72)$$

$$\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{a} = 0 \quad \forall \vec{a} \quad (2.73)$$

$$\Delta \vec{a} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{a} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a} \quad (2.74)$$

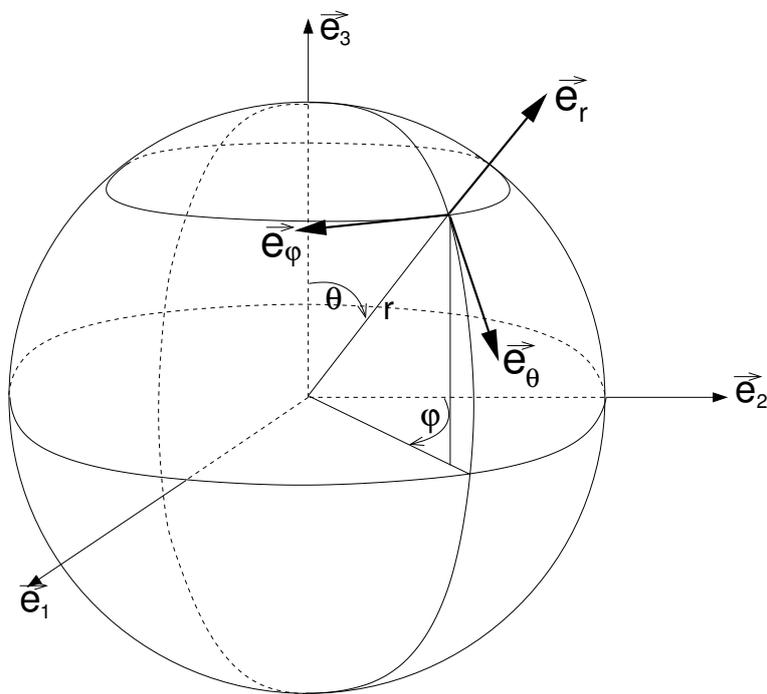


FIG. 2.2 –

Chapitre 3

Description de la cinématique d'un milieu continu

A la différence de la mécanique des solides indéformables, la mécanique des milieux continus permet de prendre en compte les déformations d'un corps et les variations de température qui accompagnent ces déformations.

Dans un solide indéformable, la distance entre deux points quelconques ne peut varier avec le temps alors que dans un milieu déformable, cette distance peut évoluer. La cinématique du milieu continu a pour but d'introduire les outils mathématiques pour décrire une cinématique quelconque et ce indépendamment des forces qui l'engendrent.

3.1 Trajectoire et dérivées temporelles

Considérons un milieu continu occupant un volume V à l'instant initial ($t = 0$),¹ par exemple une balle en caoutchouc avant son écrasement dans la paume d'une main (figure 3.1). Cette balle peut être vue comme l'assemblage d'une infinité de petits éléments de matière appelés "points matériels". Chaque point matériel va se déplacer et avoir sa propre trajectoire. Cette trajectoire est définie par l'évolution de la position \vec{x} de ce point matériel en fonction du temps.

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\text{point matériel}, t) \quad (3.1)$$

L'équation ci-dessus donne formellement l'ensemble des trajectoires de tous les points matériels.

1. Les notations utilisées dans ce chapitre s'inspire des notations du livre de référence [4]. Un certain nombre d'exemples de ce chapitre est également tiré de ce livre.



FIG. 3.1 – Une balle avant et après déformation

Afin de distinguer deux points matériels, il faut donner un nom unique à chaque point, tout comme la sécurité sociale attribue un numéro unique à chaque individu. Généralement, on donne comme nom à chaque point matériel ses coordonnées initiales notées \vec{X} .

Ces coordonnées dites matérielles sont constantes dans le temps, c'est donc une information intrinsèque de la particule. Par contre, les coordonnées spatiales de la particule, \vec{x} , évoluent dans le temps :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

Sur le plan mathématique, la transformation $\vec{\phi}$ est une bijection : à chaque point matériel \vec{X} ne correspond qu'un et un seul point spatial image à tout instant t . De même, deux points matériels différents ne peuvent aboutir à la même position spatiale au même instant. Ainsi, on peut inverser la relation (3.2) et écrire formellement

$$\vec{X} = \vec{\phi}^{-1}(\vec{x}, t) \quad (3.3)$$

Étant donnée la bijection qui existe entre les coordonnées spatiales et matérielles, on peut choisir comme variables indépendantes pour décrire le mouvement soit le couple (\vec{x}, t) dit variables d'Euler soit le couple (\vec{X}, t) dit variables de Lagrange. La connaissance de la transformation $\vec{\phi}$ ou de son inverse définit alors complètement le mouvement.

Exemple 3.1.1 Transformation uniforme

A titre d'exemple considérons un domaine 2D qui se déforme selon un parallélogramme. Les configurations de référence et à l'instant $t = 1$ sont présentées figure 3.2. La transformation, $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$ s'écrit

$$x_1 = \frac{1}{4}(18t + 4X_1 + 6tX_2) \quad (3.4)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(14t + (4 + 2t)X_2) \quad (3.5)$$

On vérifie que pour $t = 0$, on a bien $x_1 = X_1$ et $x_2 = X_2$.

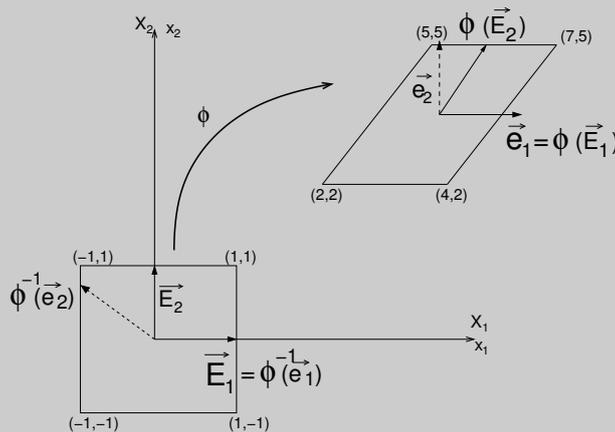


FIG. 3.2 – Déformation d'un carré

Une fois la transformation du milieu continu $\vec{\phi}$ définie, il est facile de définir les notions de

déplacement, de vitesse et d'accélération :

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (3.6)$$

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (3.7)$$

$$\vec{a}(\vec{X}, t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{X}, t) \quad (3.8)$$

La dérivée temporelle intervenant dans les deux dernières équations s'effectue pour une particule \vec{X} donnée. C'est une dérivée en temps dite matérielle (on parle aussi de dérivée particulière ou lagrangienne). Si on assimile, un milieu continu à une portion d'autoroute et chaque point matériel de ce milieu à une voiture circulant sur l'autoroute, les vitesses et accélérations définies en (3.7) et (3.8) sont les vitesses et accélérations perçues par le conducteur de chaque voiture \vec{X} . La dérivée particulière est souvent également notée à l'aide d'un point au dessus de la quantité à dériver. Ainsi, on peut réécrire (3.7) et (3.8) avec cette notation compacte et écrire :

$$\vec{v} = \dot{\vec{u}} \quad (3.9)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{u}} \quad (3.10)$$

Il existe un autre type de dérivée temporelle dite eulérienne qui ne s'effectue non pas pour une particule donnée mais en un point de l'espace donné. En clair, c'est une dérivée temporelle en considérant \vec{x} fixe et non plus \vec{X} fixe. Pour reprendre l'exemple de la portion d'autoroute, cette dérivée correspond à celle que perçoit le gendarme posté sur le bord de la route : si une voiture roulant lentement passe devant le radar et qu'elle est suivie par une voiture roulant à vive allure, pour le gendarme, le trafic accélère alors que pour les passagers des deux véhicules, l'accélération est nulle (en supposant qu'ils roulent tous les deux à vitesse constante).

La dérivée eulérienne est notée $\frac{\partial}{\partial t}$ pour ne pas la confondre avec la dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$. Les dérivées eulérienne et lagrangienne sont reliées. En effet, on peut écrire :

$$\underbrace{\frac{dg(\vec{x}, t)}{dt}}_{\text{dérivée lagrangienne}} = \frac{dg(\vec{x}(\vec{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial g(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial g(\vec{x}, t)}{\partial t}}_{\text{dérivée eulérienne}} + \underbrace{\vec{\text{grad}}g \cdot \vec{v}}_{\text{terme d'advection}} \quad (3.12)$$

Le dernier terme est une dérivée dite convective. Afin d'illustrer le calcul des dérivées lagrangiennes et eulériennes, on peut considérer l'extension d'une barre unidimensionnelle dont la température évolue avec le temps :

Exemple 3.1.2 *Mouvement uni-axial, illustration des dérivées temporelles eulérienne et lagrangienne.*

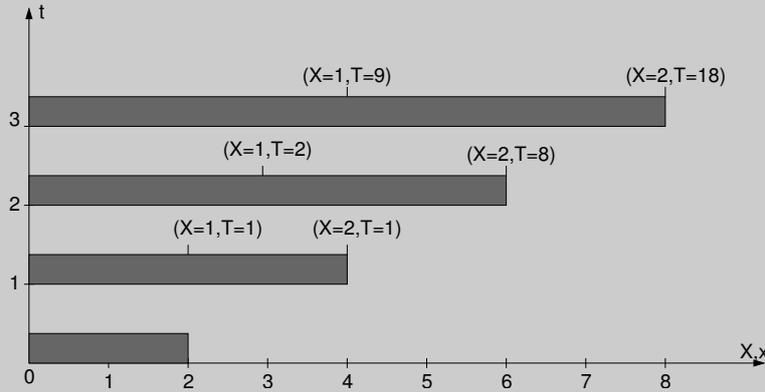


FIG. 3.3 –

On considère la transformation d'une barre, figure 3.3, de longueur initiale 2, donnée par $x = (1+t)X$. Cette barre est soumise à une élévation de température donnée par $T = Xt^2$. La dérivée matérielle de la température est donnée par $\dot{T} = 2Xt$. Pour calculer la dérivée temporelle eulérienne, on exprime la température en fonction des coordonnées spatiales : $T = xt^2/(1+t)$ et ensuite on dérive par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{(2t+t^2)x}{(1+t)^2} \quad (3.13)$$

Quant à la dérivée convective, on

$$(\vec{\text{grad}}T) \cdot \vec{v} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{(1+t)} X \quad (3.14)$$

On vérifie que la somme des dérivées eulérienne et convective rend bien la dérivée lagrangienne.

Dans la cas où la quantité considérée est un vecteur, on a :

$$\underbrace{\frac{d\vec{g}(\vec{x},t)}{dt}}_{\text{dérivée lagrangienne}} = \frac{d\vec{g}(\vec{x}(\vec{X},t),t)}{dt} = \frac{\partial \vec{g}(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}(\vec{X},t)}{dt} \quad (3.15)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \vec{g}(\vec{x},t)}{\partial t}}_{\text{dérivée eulérienne}} + \underbrace{\left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{g} \right) \cdot \vec{v}}_{\text{terme d'advection}} \quad (3.16)$$

En notation indicielle², on écrit

$$\dot{g}_i = \frac{\partial g_i}{\partial t} + g_{i,j} v_j \quad (3.17)$$

A titre d'exemple, l'accélération d'une particule dans un champ de vitesse s'écrit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} \quad a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \quad (3.18)$$

2. Il est bon de rappeler ici que la notation indicielle n'est valable que dans un système de coordonnées cartésiennes alors que la notation intrinsèque est indépendante de tout système de coordonnées.

On note qu'en utilisant la dérivée eulérienne, l'accélération devient une fonction non linéaire de la vitesse par la présence du terme d'advection³.

3.2 Gradient de la transformation

Une quantité clef dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la transformation noté $\overline{\overline{F}}$. Ce tenseur d'ordre 2 permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'ingrédient de base pour définir la déformation d'un corps⁴.

Considérons deux points matériels Q_1 et Q_2 situés dans le voisinage d'un point matériel P (voir figure 3.4). Les positions relatives de Q_1 et Q_2 par rapport à P sont données par les vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$:

$$d\vec{X}_1 = \vec{X}_{Q_1} - \vec{X}_P \quad d\vec{X}_2 = \vec{X}_{Q_2} - \vec{X}_P \quad (3.19)$$

Après déformation, les positions des particules P , Q_1 et Q_2 sont données par la transformation $\vec{\phi}$

$$\vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \quad \vec{x}_{q_1} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_1}, t) \quad \vec{x}_{q_2} = \vec{\phi}(\vec{X}_{Q_2}, t) \quad (3.20)$$

Les vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ sont deviennent donc :

$$d\vec{x}_1 = \vec{x}_{q_1} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P + d\vec{X}_1, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \quad (3.21)$$

$$d\vec{x}_2 = \vec{x}_{q_2} - \vec{x}_p = \vec{\phi}(\vec{X}_P + d\vec{X}_2, t) - \vec{\phi}(\vec{X}_P, t) \quad (3.22)$$

Nous définissons le tenseur gradient de la transformation par

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \quad (3.23)$$

Il est parfois également appelé matrice Jacobienne car c'est la matrice du changement des variables \vec{X} en \vec{x} . En effet, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ s'écrit aussi :

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} \quad (3.24)$$

Le tenseur $\overline{\overline{F}}$ est non symétrique en général.

En tenant compte du caractère infinitésimal des vecteurs $d\vec{X}_2$ et $d\vec{X}_1$, on peut écrire, en effectuant le développement de Taylor au premier ordre de (3.21) et (3.22) :

$$d\vec{x}_1 = \overline{\overline{F}}(\vec{X}_P, t) \cdot d\vec{X}_1 \quad d\vec{x}_2 = \overline{\overline{F}}(\vec{X}_P, t) \cdot d\vec{X}_2 \quad (3.25)$$

On note que le tenseur $\overline{\overline{F}}$ transforme un vecteur de la configuration de référence $d\vec{X}$ en un vecteur $d\vec{x}$ de la configuration actuelle. Notons que comme $d\vec{X}$ est infinitésimal, il en sera de même pour $d\vec{x}$. Ce type de tenseur est appelé un tenseur deux-points⁵.

3. Cette non-linéarité est une des difficultés principales de la mécanique des fluides numériques.

4. Remarque linguistique : en anglais la déformation se dit "strain" et le déplacement se dit "displacement" ou "deformation". En anglais, le tenseur F est donc appelé "deformation gradient".

5. "two-point tensor" en anglais.

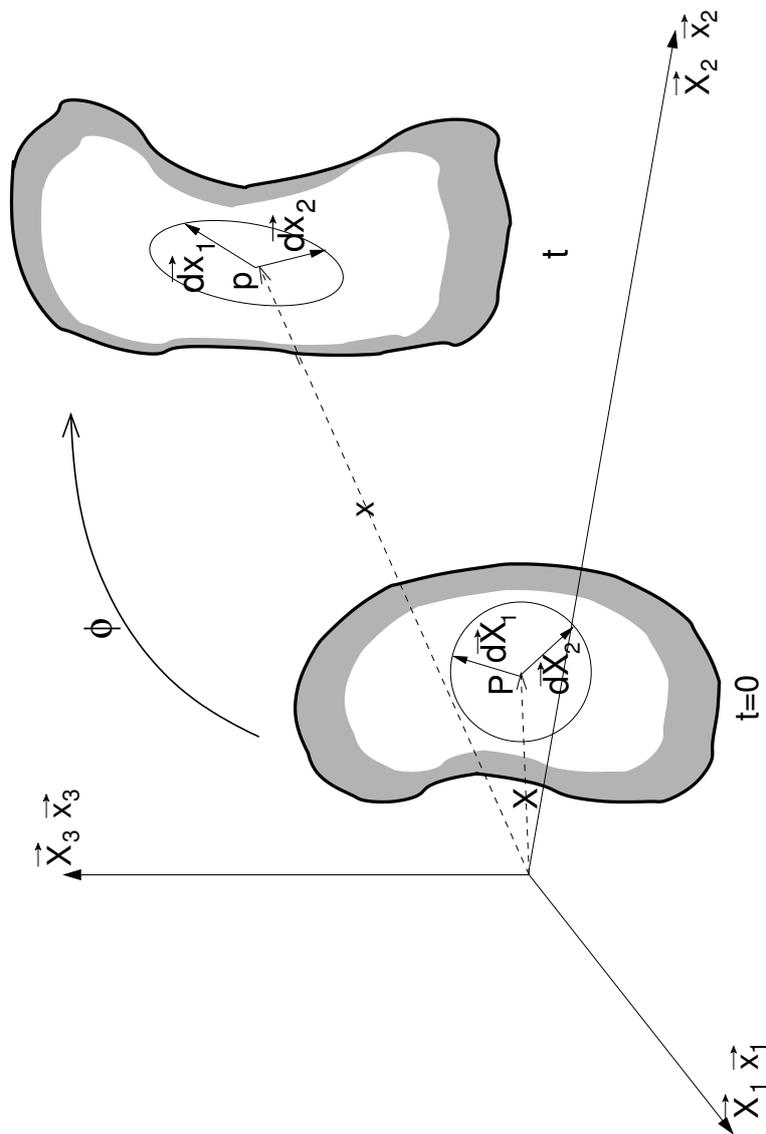


FIG. 3.4 –

Exemple 3.2.1 Transformation des vecteurs de base

Pour illustrer le calcul du tenseur $\overline{\overline{F}}$ reprenons la transformation de l'exemple 3.1.1. Le gradient de la transformation se calcule par

$$[\overline{\overline{F}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

On note que pour cet exemple, $\overline{\overline{F}}$ est uniforme c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du point (X_1, X_2) considéré. En général, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ dépend à la fois du temps et du point considéré. Les vecteurs placés initialement selon les axes \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont transformés à l'instant $t = 1$ en $\overline{\overline{F}} \cdot \vec{E}_1$ et $\overline{\overline{F}} \cdot \vec{E}_2$ donnés par l'application (3.25). En considérant l'instant $t = 1$, on a

$$[\overline{\overline{F}} \cdot \vec{E}_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$[\overline{\overline{F}} \cdot \vec{E}_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Dans notre exemple le vecteur initialement parallèle à l'axe 1 reste donc parallèle à l'axe 1 et ne change pas de taille. Par contre, le vecteur initialement parallèle à l'axe 2 tourne de 45 degrés et voit sa taille multipliée par $3/\sqrt{2}$.

Si l'on considère deux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , *actuellement*, orientés parallèlement aux axes, on peut se demander quelle était l'orientation de ces vecteurs dans la configuration initiale. Ces orientations sont données par $\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}_1$ et $\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}_2$:

$$[\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}_1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}_2] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.3 Définition des tenseurs de déformation

La section précédente a introduit le tenseur gradient de la transformation, $\overline{\overline{F}}$. Ce tenseur est la dérivée des positions actuelles par rapport aux positions initiales. Nous allons montrer que ce tenseur n'est pas une bonne mesure de déformation. En revanche, à partir de ce tenseur nous allons bâtir deux tenseurs de déformation.

Considérons un corps se déplaçant de manière rigide. Ce mouvement s'écrit :

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{R}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{c}(t) \quad (3.31)$$

Le tenseur $\overline{\overline{R}}$ est un tenseur orthogonal c'est à dire que sa transposée coïncide avec son inverse :

$$\overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{R}}^T = \overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}} \quad (3.32)$$

Il représente la rotation rigide du corps et le vecteur \vec{c} représente la translation rigide. Le gradient d'une telle transformation est clairement

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \quad (3.33)$$

Autrement dit pour un mouvement de corps rigide, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ n'est pas nul et est égal au tenseur de rotation. Clairement, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ n'est donc pas une bonne mesure de déformation puisqu'il est non nul pour des transformations n'impliquant aucune déformation.

Pour arriver à la définition d'un tenseur de déformation, écrivons le changement de produit scalaire entre deux vecteurs élémentaire $d\vec{X}_1$ et $d\vec{X}_2$ lorsqu'ils se transforment en $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$, (figure 3.4). Exprimons le produit scalaire des vecteurs après déformation en fonction des vecteurs avant déformation :

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = (\overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_1) \cdot (\overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}_2) = d\vec{X}_1 \cdot (\overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}}) \cdot d\vec{X}_2 = d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{C}} \cdot d\vec{X}_2 \quad (3.34)$$

Le tenseur $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}}$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit. Il s'agit d'un tenseur symétrique du deuxième ordre dit matériel car il opère sur des vecteurs matériels.

Inversement, on peut exprimer le produit scalaire des vecteurs élémentaires dans la configuration de référence à partir des vecteurs dans la configuration actuelle :

$$d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2 = (\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot d\vec{x}_1) \cdot (\overline{\overline{F}}^{-1} \cdot d\vec{x}_2) = d\vec{x}_1 \cdot (\overline{\overline{F}}^{-T} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1}) \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{b}}^{-1} \cdot d\vec{x}_2 \quad (3.35)$$

où $\overline{\overline{b}}$ est appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche⁶ :

$$\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}}^T \quad (3.36)$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique du deuxième ordre dit tenseur spatial car il opère sur des vecteurs spatiaux.

Remarquons que tout comme $\overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{b}}$ et $\overline{\overline{C}}$ ne sont pas des mesures de déformations car pour un mouvement de corps rigides, on a $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{b}} = \overline{\overline{I}}$.

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ est défini par l'expression suivante :

$$\frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2) = \frac{1}{2}(d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{C}} \cdot d\vec{X}_2 - d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{I}} \cdot d\vec{X}_2) = d\vec{X}_1 \cdot \overline{\overline{E}} \cdot d\vec{X}_2 \quad (3.37)$$

où $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur identité. Le tenseur $\overline{\overline{E}}$ est un tenseur symétrique matériel du deuxième ordre. Il se calcule en terme de $\overline{\overline{F}}$ par la relation suivante :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}) \quad (3.38)$$

On définit également le tenseur de déformation d'Euler-Almansi, $\overline{\overline{e}}$:

$$\frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{X}_1 \cdot d\vec{X}_2) = \frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{I}} \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{b}}^{-1} \cdot d\vec{x}_2) = d\vec{x}_1 \cdot \overline{\overline{e}} \cdot d\vec{x}_2 \quad (3.39)$$

Le tenseur $\overline{\overline{e}}$ est un tenseur spatial symétrique du deuxième ordre qui s'exprime en fonction de $\overline{\overline{F}}$ par :

$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{b}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{F}}^{-T} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1}) \quad (3.40)$$

Les tenseurs de Green-Lagrange et de Euler-Almansi sont de bonnes mesures de déformation car ils sont nuls pour des transformations rigides. En effet, prenant en compte $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}}$, pour une transformation rigide, il vient

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{R}} - \overline{\overline{I}}) = \overline{\overline{0}} \quad (3.41)$$

$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{R}}^{-T} \cdot \overline{\overline{R}}^{-1}) = \overline{\overline{0}} \quad (3.42)$$

6. Dans le tenseur de Cauchy-Green droit, $C = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{F}}$ est à droite alors que dans le tenseur de Cauchy-Green gauche, $\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}}^T$, $\overline{\overline{F}}$ est à gauche.

par définition, (3.32), d'un tenseur orthogonal.

Exemple 3.3.1 *Déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi*

Toujours pour la transformation donnée dans l'exemple 3.1.1, on peut calculer les déformations pour $t = 1$. D'abord les tenseurs droit et gauche de Cauchy-Green :

$$[\bar{C}] = [\bar{F}^T \cdot \bar{F}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad [\bar{b}] = [\bar{F} \cdot \bar{F}^T] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

et ensuite les déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi :

$$[\bar{E}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad [\bar{e}] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.4 Interprétation des composantes des tenseurs de déformations

Afin d'interpréter physiquement les composantes des tenseurs de déformation \bar{E} et \bar{e} , nous allons considérer des vecteurs matériels particuliers. Tout d'abord, considérons que les deux vecteurs \vec{dX}_1 et \vec{dX}_2 sont identiques et notés \vec{dX} . Après déformation, ce vecteur se trouvera en $\vec{dx} = \vec{dx}_1 = \vec{dx}_2$. La relation (3.37) donne

$$\frac{1}{2}(\vec{dx} \cdot \vec{dx} - \vec{dX} \cdot \vec{dX}) = \vec{dX} \cdot \bar{E} \cdot \vec{dX} \quad (3.45)$$

Décomposons les vecteurs \vec{dX} et \vec{dx} selon leur norme et leur orientation :

$$\vec{dX} = dL\vec{N} \quad \vec{dx} = dl\vec{n} \quad (3.46)$$

On peut alors simplifier (3.45) en

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} \right) = \vec{N} \cdot \bar{E} \cdot \vec{N} \quad (3.47)$$

En considérant en particulier, un vecteur \vec{N} selon l'axe \vec{E}_1 , le membre de droite de l'équation ci-dessus est simplement E_{11} car

$$\vec{E}_1 \cdot \bar{E} \cdot \vec{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11} \quad (3.48)$$

Les éléments diagonaux du tenseur \bar{E} donnent donc les changements relatifs de longueur (au sens du premier membre de (3.47)) de vecteurs élémentaires *initialement* dirigés selon les axes.

Concernant l'interprétation du tenseur de Euler-Almansi, on obtient :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl^2 - dL^2}{dl^2} \right) = \vec{n} \cdot \bar{e} \cdot \vec{n} \quad (3.49)$$

Les termes diagonaux du tenseur \bar{e} sont donc les changements relatifs de longueur de vecteurs élémentaires *actuellement* dirigés selon les axes.

Exemple 3.4.1 *Interprétation physique des tenseurs de déformation.*

Revenons une nouvelle fois à la transformation de l'exemple 3.4.1. Les déformations à l'instant $t = 1$ ont été obtenues dans l'exemple 3.2.1. On note que la composante E_{11} est nulle^a. Cela indique qu'un vecteur élémentaire placé selon l'axe 1 dans la configuration initiale ne voit pas sa taille évoluer. Ceci est en accord avec le vecteur $\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{E}}_1$ obtenu dans l'exemple 3.2.1 qui est bien de même norme que $\bar{\bar{E}}_1$. La composante E_{22} vaut elle 7/4. Ceci est cohérent car un vecteur initialement selon $\bar{\bar{E}}_2$ et de norme $dl = 1$ devient le vecteur $\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{E}}_2 = [1.5 \ 1.5]^T$ de norme $3/\sqrt{2}$ et on a bien

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl^2 - dL^2}{dl^2} \right) = \frac{7}{4} \quad (3.50)$$

^a Prêtez attention aux notations : $\bar{\bar{E}}$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange, $\bar{\bar{E}}_1$ est le premier vecteur de base et E_{11} est la composante 11 du tenseur $\bar{\bar{E}}$ dans le repère donné par $(\bar{\bar{E}}_1, \bar{\bar{E}}_2, \bar{\bar{E}}_3)$.

Nous venons d'interpréter les termes diagonaux des tenseurs $\bar{\bar{E}}$ et $\bar{\bar{e}}$ comme la mesure des changements de longueur des vecteurs élémentaires initialement ou actuellement dirigés selon les vecteurs de base. Quant aux termes non diagonaux, ils peuvent s'interpréter comme des changements d'angle. Considérons deux vecteurs \vec{dX}_1 et \vec{dX}_2 initialement orthogonaux. Après déformation, ces deux vecteurs forment un angle $\pi/2 - \gamma$ où γ est la réduction d'angle entre les deux vecteurs. En décomposant les vecteurs \vec{dX}_1 et \vec{dX}_2 selon leur norme et leur direction :

$$\vec{dX}_1 = dL_1 \vec{N}_1 \quad \vec{dX}_2 = dL_2 \vec{N}_2 \quad (3.51)$$

la relation (3.37) devient

$$\frac{1}{2} \sin(\gamma) \frac{dl_1}{dL_1} \frac{dl_2}{dL_2} = \vec{N}_1 \cdot \bar{\bar{E}} \cdot \vec{N}_2 \quad (3.52)$$

Si on choisit les deux vecteurs \vec{N}_1 et \vec{N}_2 comme vecteurs de base, par exemple $\bar{\bar{E}}_1$ et $\bar{\bar{E}}_2$, on obtient

$$\frac{1}{2} \sin(\gamma) \frac{dl_1}{dL_1} \frac{dl_2}{dL_2} = E_{12} \quad (3.53)$$

La composante E_{12} du tenseur $\bar{\bar{E}}$ est donc liée au changement d'angle *que vont subir* deux vecteurs élémentaires *initialement* placés selon les vecteurs de base $\bar{\bar{E}}_1$ et $\bar{\bar{E}}_2$.

Considérons maintenant deux vecteurs élémentaires \vec{dx}_1 et \vec{dx}_2 *actuellement* orthogonaux. Avant déformation, ces deux vecteurs formaient un angle que nous noterons $\pi/2 + \gamma'$. La relation (3.39) devient

$$\frac{1}{2} \sin(\gamma') \frac{dL_1}{dl_1} \frac{dL_2}{dl_2} = \vec{n}_1 \cdot \bar{\bar{e}} \cdot \vec{n}_2 \quad (3.54)$$

où on a utilisé la décomposition

$$\vec{dx}_1 = dl_1 \vec{n}_1 \quad \vec{dx}_2 = dl_2 \vec{n}_2 \quad (3.55)$$

La composante e_{12} du tenseur $\bar{\bar{e}}$ est donc liée au changement d'angle *qu'ont subi* deux vecteurs élémentaires *actuellement* dirigés selon les vecteurs de base $\bar{\bar{e}}_1$ et $\bar{\bar{e}}_2$. La différence entre les angles γ et γ' est illustrée sur la figure 3.5. Finalement, notons que bien que les deux tenseurs de déformation précédents ne sont pas indépendants. Ils sont reliés l'un à l'autre par les relations :

$$\bar{\bar{E}}_{\bar{\bar{e}}_I, \bar{\bar{e}}_{II}, \bar{\bar{e}}_{III}} = \begin{bmatrix} E_I & & \\ & E_{II} & \\ & & E_{III} \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{e}} = \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{\bar{E}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \quad \bar{\bar{E}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{e}} \cdot \bar{\bar{F}} \quad (3.56)$$

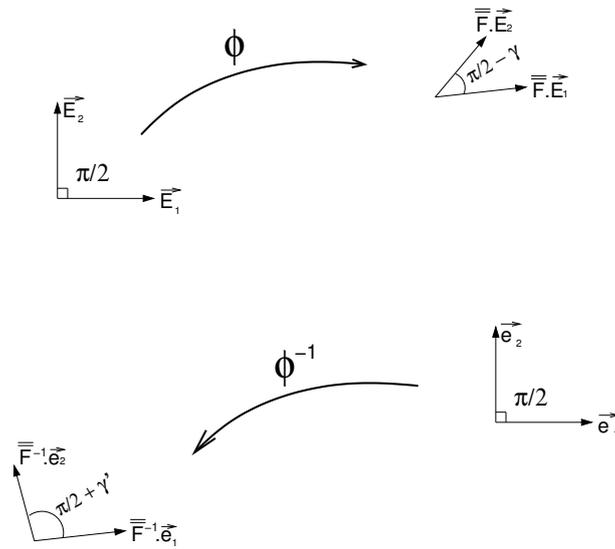


FIG. 3.5 –

3.5 Décomposition polaire

Nous avons vu dans la section précédente le rôle primordial joué par le tenseur $\overline{\overline{F}}$ dans la définition des tenseurs de déformation. Ce tenseur fait passer un vecteur élémentaire $d\vec{X}$ de la configuration initiale à un vecteur $d\vec{x}$ de la configuration actuelle. Ce passage peut être décomposé en une opération dite d'extension suivie d'une opération de rotation. Cette terminologie deviendra claire dans la suite.

D'un point de vue purement mathématique, on peut montrer que tout tenseur d'ordre deux peut s'écrire comme le produit d'un tenseur orthogonal, $\overline{\overline{R}}$, et d'un tenseur symétrique, $\overline{\overline{U}}$:

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} \quad (3.57)$$

Dans une déformation générale du milieu continu, la décomposition ci-dessus diffère en chaque point \vec{X} et à chaque instant. On devrait donc écrire pour être précis :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{R}}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\overline{U}}(\vec{X}, t) \quad (3.58)$$

Remarque : Dans le cas particulier d'une transformation rigide, le tenseur $\overline{\overline{R}}$ est le même pour tous les points matériels du corps (rotation d'ensemble) et le tenseur $\overline{\overline{U}}$ est l'identité. Donc, (3.58) devient :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{R}}(t) \quad (3.59)$$

Pour obtenir les tenseurs $\overline{\overline{R}}$ et $\overline{\overline{U}}$ à partir du tenseur $\overline{\overline{F}}$, partons du tenseur droit de Cauchy-Green :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{U}}^T \cdot \overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U}} \quad (3.60)$$

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ est donc la racine carrée du tenseur $\overline{\overline{C}}$. Pour prendre la racine d'un tenseur, il faut l'écrire sous une forme dite propre :

$$\overline{\overline{C}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^2 \vec{N}_{\alpha} \otimes \vec{N}_{\alpha} \quad (3.61)$$

Les λ_α^2 et \vec{N}_α sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de $\overline{\overline{C}}^7$. Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ s'écrit alors en prenant la racine carrée des valeurs propres (on choisit les racines carrées positives : $\lambda_\alpha \geq 0$).

$$\overline{\overline{U}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha \vec{N}_\alpha \otimes \vec{N}_\alpha \quad (3.62)$$

Finalement,

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{U}}^{-1} \quad (3.63)$$

Voici un exemple numérique de décomposition polaire :

Exemple 3.5.1 *Décomposition polaire*

$$x_1 = \frac{1}{4}(4X_1 + (9 - 3X_1 - 5X_2 - X_1X_2)t) \quad (3.64)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(4X_2 + (16 + 8X_1)t) \quad (3.65)$$

Pour $\vec{X} = (0,0)$ et $t=1$, la gradient de la transformation et le tenseur droit de Cauchy-Green s'écrivent :

$$[\overline{\overline{F}}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad [\overline{\overline{C}}] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 65 & 27 \\ 27 & 41 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Les extensions λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres et vecteurs propres donnés par :

$$\lambda_1 = 2.2714 \quad \lambda_2 = 1.2107 \quad [\vec{N}_1] = \begin{bmatrix} 0.8385 \\ 0.5449 \end{bmatrix} \quad [\vec{N}_2] = \begin{bmatrix} -0.5449 \\ 0.8385 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Finalement, en utilisant (3.62) et $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{U}}^{-1}$, le tenseur d'extension et de rotation sont donnés par :

$$[\overline{\overline{U}}] = \begin{bmatrix} 1.9564 & 0.4846 \\ 0.4846 & 1.5257 \end{bmatrix} \quad [\overline{\overline{R}}] = \begin{bmatrix} 0.3590 & -0.9333 \\ 0.0333 & 0.3590 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Interprétons maintenant la décomposition :

$$\vec{dx} = \overline{\overline{F}} \cdot \vec{dX} = \overline{\overline{R}} \cdot (\overline{\overline{U}} \cdot \vec{dX}) \quad (3.69)$$

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ réalise une extension de \vec{dX} et une rotation $\overline{\overline{R}}$ est ensuite appliquée. Soient, $dX_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3$ les composantes de \vec{dX} dans la base propre $\vec{N}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$.

$$\vec{dX} = \sum_{\alpha=1}^3 dX_\alpha \vec{N}_\alpha \quad (3.70)$$

L'application de $\overline{\overline{U}}$ donne :

$$\overline{\overline{U}} \cdot \vec{dX} = \sum_{\alpha=1}^3 dX_\alpha \overline{\overline{U}} \cdot \vec{N}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 dX_\alpha \lambda_\alpha \vec{N}_\alpha \quad (3.71)$$

Les composantes de \vec{dX} sont donc multipliées (étendues) par les coefficients λ_α . Si le vecteur \vec{dX} coïncide avec l'un des vecteurs de base, \vec{N}_α , il préservera sa direction suite à l'application de

7. $\overline{\overline{C}}$ s'écrivant sous la forme $\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{C}}$ est une matrice positive (i.e. $\vec{A} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \vec{A} \geq 0 \forall \vec{A}$) et donc toutes ses valeurs propres sont positives (et réelles car $\overline{\overline{C}}$ est symétrique et réelle).

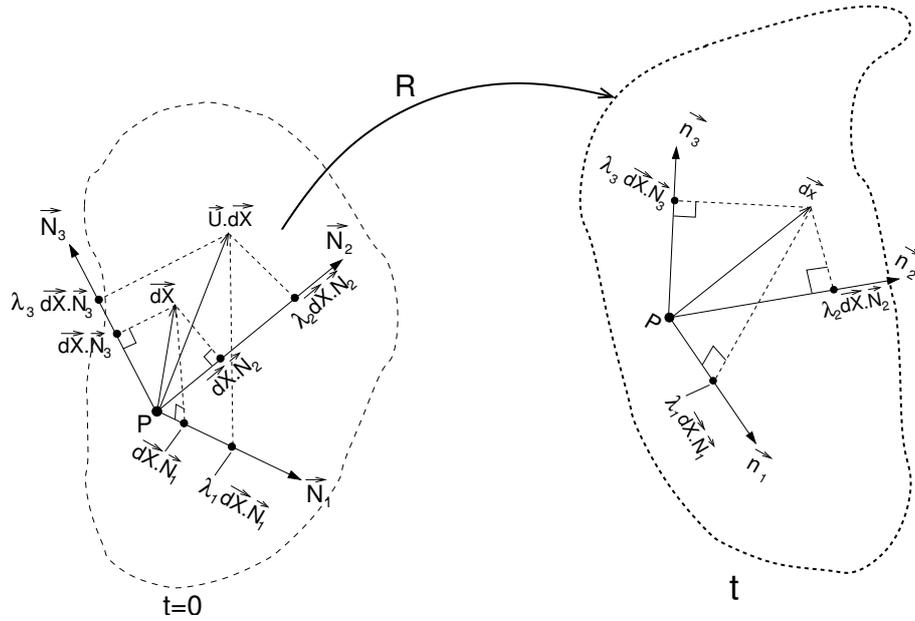


FIG. 3.6 – Illustration de la décomposition polaire.

$\overline{\overline{U}}$, pour devenir $\lambda_\alpha \vec{N}_\alpha$ (pas de sommation sur les indices). Avec l'application de $\overline{\overline{R}}$, il tournera pour devenir un vecteur noté $\lambda_\alpha \vec{n}_\alpha$ sur la figure 3.6. Ceci s'exprime mathématiquement comme suit :

$$\overline{\overline{F}} \cdot \vec{N}_\alpha = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} \cdot \vec{N}_\alpha = \lambda_\alpha \overline{\overline{R}} \cdot \vec{N}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{n}_\alpha \quad (3.72)$$

Les vecteurs $\vec{N}_\alpha, \alpha = 1,2,3$ et $\vec{n}_\alpha, \alpha = 1,2,3$ forment ce que l'on appelle des trièdres propres respectivement matériels et spatiaux.

Le tenseur $\overline{\overline{U}}$ est un tenseur matériel et $\overline{\overline{R}}$, tout comme $\overline{\overline{F}}$, un tenseur deux-points. Notons qu'il est également possible de décomposer $\overline{\overline{F}}$ en terme du même tenseur de rotation suivi d'un tenseur d'extension dans la configuration spatiale noté $\overline{\overline{V}}$:

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{V}} \cdot \overline{\overline{R}} \quad (3.73)$$

Les tenseurs de déformation s'expriment en terme des tenseurs $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{V}}$ comme suit :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{U}}^2 - \overline{\overline{I}}) \quad \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{V}}^{-2}) \quad (3.74)$$

Étant donné que les bases propres des tenseurs $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{E}}$ sont identiques ainsi que les bases propres des tenseurs $\overline{\overline{V}}$ et $\overline{\overline{e}}$, on peut également écrire :

$$\overline{\overline{E}} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1)\vec{N}_\alpha \otimes \vec{N}_\alpha \quad \overline{\overline{e}} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2}(1 - \lambda_\alpha^{-2})\vec{n}_\alpha \otimes \vec{n}_\alpha \quad (3.75)$$

3.6 Changement de volume

Un élément de volume dV de la configuration de référence se transforme en un élément dv dans la configuration actuelle. Le Jacobien de la transformation, $J = \det \overline{\overline{F}}$, donne le changement de volume :

$$dv = JdV \quad J = \det \overline{\overline{F}} \quad (3.76)$$

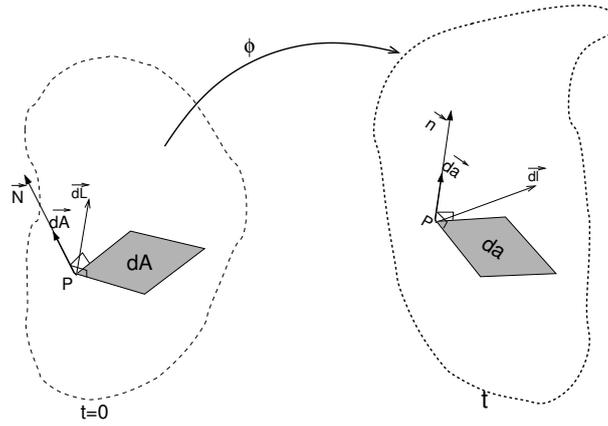


FIG. 3.7 –

Le Jacobien de la transformation est utile lorsque l'on veut transformer des intégrales de volume sur la configuration actuelle en intégrale sur la configuration de référence :

$$\int_v a(\vec{x}) dv = \int_V a(\vec{x}(\vec{X}, t)) J dV \quad (3.77)$$

3.7 Changement de surface

Considérons un élément de surface dans la configuration initiale $\vec{dA} = dA\vec{N}$ qui après déformation devient $\vec{da} = da\vec{n}$ comme illustré sur la figure 3.7. Dans le but d'obtenir une relation entre ces deux vecteurs, considérons le vecteur matériel \vec{dL} qui après déformation devient \vec{dl} . Les volumes initiaux et actuels sont :

$$dV = \vec{dL} \cdot \vec{dA} \quad (3.78)$$

$$dv = \vec{dl} \cdot \vec{da} \quad (3.79)$$

Par (3.76) et le fait que $\vec{dl} = \overline{\overline{F}} \cdot \vec{dL}$, nous pouvons écrire :

$$dv = J dV \Rightarrow \vec{dl} \cdot \vec{da} = J \vec{dL} \cdot \vec{dA} \quad (3.80)$$

$$(\overline{\overline{F}} \cdot \vec{dL}) \cdot \vec{da} = J \vec{dL} \cdot \vec{dA} \quad (3.81)$$

la relation ci-dessus devant être vérifiée pour tout \vec{dL} , il vient :

$$\vec{da} = J \overline{\overline{F}}^{-T} \cdot \vec{dA} \quad (3.82)$$

qui exprime la relation entre l'aire (et l'orientation) d'un petit élément de surface après et avant déformation en fonction du gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$.

3.8 Taux de déformation

Jusqu'ici nous avons introduit deux mesures de déformations dans les configurations initiale et actuelle. Il nous reste à introduire la vitesse de ces déformations appelée taux de déformation.

Le tenseur taux de déformation (matériel) est la dérivée particulière du tenseur de déformation de Green-Lagrange : $\dot{\overline{\overline{E}}}$. Ce tenseur donne pour une particule donnée, le taux de variation de sa déformation au cours du temps. C'est clairement une quantité lagrangienne.

	matériel (lagrangien)	spatial (eulérien)
tenseur de déformation	$\overline{\overline{E}}$	$\overline{\overline{e}}$
tenseur taux de déformation	$\dot{\overline{\overline{E}}}$	$\overline{\overline{D}}$

TAB. 3.1 – Récapitulatif sur les tenseurs de déformation et taux de déformation

De même, nous introduirons le tenseur taux de déformation spatial noté $\overline{\overline{D}}$. Celui-ci est relié à $\dot{\overline{\overline{E}}}$ par la même relation que reliait $\overline{\overline{e}}$ à $\overline{\overline{E}}$, (3.56) :

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{F}}^{-T} \cdot \dot{\overline{\overline{E}}} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} \quad \dot{\overline{\overline{E}}} = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{F}} \quad (3.83)$$

Le tableau 3.1 reprend les tenseurs de déformation et leur taux. Sur la base de la formule (3.83), on peut dégager l'expression du tenseur taux de déformation spatial en terme des vitesses :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{v}}} + \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{v}}} \right)^T \right) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3.84)$$

Il est à noter que cette relation est linéaire par rapport à la vitesse.

3.9 Déformations en petites perturbations

3.9.1 Formulation de l'hypothèse des petites perturbations (HPP)

La section précédente a introduit les outils mathématiques pour décrire des déformations quelconques entre un domaine de référence V et un domaine actuel v . Cette déformation peut être faible ou énorme (crash de voiture par exemple). Un point important à noter dans l'expression des déformations de Green-Lagrange et Euler-Almansi est qu'elles dépendent des déplacements de manière non-linéaire. En effet, reprenons la définition du tenseur de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) = \frac{1}{2} (\overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}) \quad (3.85)$$

Le gradient de la transformation, $\overline{\overline{F}}$, peut s'exprimer en terme du gradient des déplacements en utilisant (3.6) :

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial (\vec{X} + \vec{u})}{\partial \vec{X}} = \overline{\overline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \quad (3.86)$$

Donc, $\overline{\overline{E}}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right) \quad (3.87)$$

qui est une expression non-linéaire (quadratique) des déplacements.

Dans certains cas, cette cinématique peut être linéarisée (ce qui simplifie grandement la résolution finale du problème). C'est le cas des petites perturbations. L'hypothèse des petites perturbations (HPP) se formule comme suit : les déplacements entre la configuration de référence et la configuration actuelle sont très petits et le gradient des déplacements est également petit. Voici un certain nombre d'exemples pour lesquels l'hypothèse HPP est justifiée :

- Un immeuble se déplace peu entre sa position non chargée (absence de gravité et de vent) et chargée (on applique la gravité et le vent) ;
- Les ondes sismiques font intervenir des déplacements de faible amplitude par rapport à la taille des immeubles touchés (malgré cette faible amplitude, elles restent néanmoins très néfastes!) ;

- La mise en extension d'une éprouvette métallique dans un essai de traction fait intervenir des déplacements et des déformations faibles par rapport à la taille de l'éprouvette dans le régime élastique et même le début de la zone plastique (ces déplacements ne sont d'ailleurs pas visible à l'oeil nu).

A l'inverse, voici des exemples où l'hypothèse HPP n'est pas justifiée :

- l'étude des déformations d'une balle de golf suite à l'impact d'un club ;
- la déformation d'une planche de plongeur sous l'action d'un nageur ;
- la phase de striction d'une éprouvette dans un essai de traction ;
- la mise en forme d'une canette à partir d'une tôle ;
- l'écoulement de tout fluide ne rentre pas dans l'hypothèse HPP puisque les configurations initiale et finale sont très différentes : les particules fluides se déplacent beaucoup. Même si c'est toujours la même section du tuyau qui est étudiée au cours du temps, cela ne veut pas dire que l'hypothèse HPP est applicable. En effet, cette portion de tuyau est sans cesse remplie par d'autres particules de fluide. L'hypothèse HPP au contraire impose que les particules bougent très peu par rapport à la taille du domaine d'étude et se déforment peu.

Finalement, notons que l'hypothèse HPP se formule entièrement en terme de quantités cinématiques (faibles déplacements et gradients des déplacements). Quant aux efforts nécessaires pour engendrer ces déplacements, ils peuvent être quelconques (très faibles ou très grands).

3.9.2 Simplification des résultats dans l'hypothèse HPP

Déduisons maintenant les conséquences de l'hypothèse HPP sur la description de la cinématique. L'hypothèse HPP (faible gradient des déplacements) permet de négliger le terme quadratique dans l'expression dans la déformation de Green-Lagrange (3.87). Il reste :

$$\bar{\bar{E}} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T \right) \quad (3.88)$$

Le membre de droite est le tenseur des déformations en petites perturbations⁸, noté $\bar{\bar{e}}$:

$$\bar{\bar{e}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T \right) = \frac{1}{2} (\bar{\bar{F}} + \bar{\bar{F}}^T) - \bar{\bar{I}} \quad (3.89)$$

Le tenseur de déformation d'Euler-Almansi se confond également au premier ordre avec le tenseur de déformation HPP $\bar{\bar{e}}$. On a en effet

$$\bar{\bar{e}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{F}}^{-T} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \right) \quad (3.90)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{I}} - \left(\bar{\bar{I}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^{-T} \cdot \left(\bar{\bar{I}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^{-1} \right) \quad (3.91)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{I}} - \left(\bar{\bar{I}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T \cdot \left(\bar{\bar{I}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right) \right) \quad (3.92)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right) \quad (3.93)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \right)^T \right) \quad (3.94)$$

$$= \bar{\bar{e}} \quad (3.95)$$

8. En raccourci, on dit également tenseur des déformations HPP.

Pour passer de (3.91) à (3.92), nous nous sommes servis du résultat $(1+x)^{-1} \simeq 1-x$ lorsque x est petit devant 1. En conclusion, dans l'hypothèse HPP, nous avons

$$\overline{\overline{E}} \simeq \overline{\overline{\varepsilon}} \simeq \overline{\overline{e}} \quad (3.96)$$

Exemple 3.9.1 *Tenseur des déformations en petites perturbations*

Calculons les déformations de Green-Lagrange, Euler-Almansi et HPP pour la transformation de l'exemple 3.1.1 et montrons que ces trois tenseurs coïncident lorsque la déformation est petite. On a :

$$[\overline{F}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$[\overline{F}^{-1}] = \frac{1}{2+t} \begin{bmatrix} 2+t & -3t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Donc :

$$[\overline{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 + 5t^2/4 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$[\overline{e}] = \frac{1}{(2+t)^2} \begin{bmatrix} 0 & 3t + 3t^2/2 \\ 3t + 3t^2/2 & 2t - 4t^2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Concernant, $\overline{\overline{\varepsilon}}$, la transformation (3.4-3.5) conduit aux déplacements :

$$u_1 = \frac{1}{4}(18t + 6tX_2) \quad (3.101)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}(14t + 2tX_2) \quad (3.102)$$

Le tenseur des gradients de déplacement est

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

et finalement

$$[\overline{\overline{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} 0 & 3t/4 \\ 3t/4 & t/2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

On vérifie bien que lorsque la déformation est faible (petit t), les trois tenseurs $\overline{\overline{E}}$, $\overline{\overline{e}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$ coïncident.

Nous avons interprété les composantes du tenseur de Green-Lagrange dans la section 3.4. Reprenons cette interprétation à la lumière de l'hypothèse HPP. Introduisons la notation ε qui représente l'allongement relatif du segment dL :

$$\varepsilon = \frac{dl - dL}{dL} \quad (3.105)$$

L'équation (3.47), s'écrit maintenant

$$\frac{1}{2}((1+\varepsilon)^2 - 1) = \vec{N} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N} \quad (3.106)$$

Utilisons maintenant l'hypothèse HPP : le terme en ε^2 peut être négligé devant ε et on peut

remplacer $\overline{\overline{E}}$ par $\overline{\overline{\varepsilon}}$. On a

$$\varepsilon = \frac{dl - dL}{dL} = \vec{N} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N} \quad (3.107)$$

Les composantes diagonales du tenseur des déformations en petites perturbations sont donc les allongements relatifs des vecteurs élémentaires dirigés selon les axes. Il est intéressant de comparer (3.107) et (3.47). On note que $\frac{dl - dL}{dL}$ est le développement au premier ordre de $\frac{dl^2 - dL^2}{2dL^2}$. En effet

$$\frac{1}{2} \frac{dl^2 - dL^2}{2dL^2} = \left(\frac{dl - dL}{dL} \right) \left(\frac{dl + dL}{2dL} \right) \simeq \frac{dl - dL}{dL} \quad (3.108)$$

Concernant les termes hors-diagonale, partons de l'expression (3.52) et posons

$$\varepsilon_1 = \frac{dl_1 - dL_1}{dL_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{dl_2 - dL_2}{dL_2} \quad (3.109)$$

On obtient

$$\frac{1}{2} \sin(\gamma)(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) = \vec{N}_1 \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \vec{N}_2 \quad (3.110)$$

Soit au premier ordre

$$\frac{\gamma}{2} = \vec{N}_1 \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{N}_2 \quad (3.111)$$

Choisissons les deux vecteurs \vec{N}_1 et \vec{N}_2 comme deux vecteurs de base, par exemple le premier et le second vecteur de base. Il vient alors

$$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon_{12} \quad (3.112)$$

Les termes hors-diagonaux du tenseur des déformations en petites perturbations sont donc directement la moitié de la réduction d'angle entre les vecteurs de base. Il est intéressant de comparer (3.112) et (3.53). Que devient la décomposition polaire dans le cadre de l'hypothèse HPP? Pour rappel, la décomposition polaire du gradient de la transformation revient à écrire

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}} \quad (3.113)$$

ou

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{V}} \cdot \overline{\overline{R}} \quad (3.114)$$

Partons de l'expression de $\overline{\overline{F}}$, (3.86), rappelée ci-dessous

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \quad (3.115)$$

On peut écrire

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \right)}_{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \right)}_{\overline{\overline{\omega}}} = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \quad (3.116)$$

Nous retrouvons le tenseur des déformations en HPP, $\overline{\overline{\varepsilon}}$, et nous définissons un tenseur $\overline{\overline{\omega}}$. Ce tenseur est antisymétrique et est appelé le tenseur de rotation en HPP. Vu les hypothèses HPP, on peut écrire :

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}} + \overline{\overline{\omega}} \simeq (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}}) \cdot (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\omega}}) \simeq (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\omega}}) \cdot (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}}) \quad (3.117)$$

En comparant avec (3.113) et (3.114), on voit que en HPP

$$\overline{\overline{U}} \simeq \overline{\overline{V}} \simeq \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}} \quad \overline{\overline{R}} \simeq \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\omega}} \quad (3.118)$$

Voici l'expression générale d'une transformation rigide dans l'hypothèse HPP

$$\vec{x} = (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}}(t)) \cdot \vec{X} + \vec{c}(t) \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \bar{\bar{\omega}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{c}(t) \quad (3.119)$$

où $\vec{c}(t)$ est le mode de translation rigide. La déformation associée est nulle

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \right) = \frac{1}{2} (\bar{\bar{\omega}} + \bar{\bar{\omega}}^T) = \bar{\bar{0}} \quad (3.120)$$

puisque le tenseur de rotation HPP, $\bar{\bar{\omega}}$, est antisymétrique.

Il est ici important de comparer les modes rigides du cas général (3.31), et du cas HPP (3.119). La matrice $\bar{\bar{R}}$ caractérisant la rotation est orthogonale dans le cas général alors que, $\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}}$ n'est orthogonal qu'au premier ordre. En effet, en se servant de l'antisymétrie de $\bar{\bar{\omega}}$

$$(\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}})^T (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}}) = (\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{\omega}}) (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}}) = \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{\omega}} \cdot \bar{\bar{\omega}} \simeq \bar{\bar{I}} \quad (3.121)$$

Notons que (3.119) peut aussi s'écrire

$$\vec{u} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{X} + \vec{c}(t) \quad (3.122)$$

où le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ reprend les composantes non-nulles du tenseur antisymétrique $\bar{\bar{\omega}}$.

Enfin, dans le cadre de l'hypothèse HPP, le changement de volume est donné par

$$j = \det \bar{\bar{F}} \simeq \text{Tr} \bar{\bar{\epsilon}} \quad (3.123)$$

On peut dans le cadre de l'hypothèse HPP confondre les variables d'Euler (\vec{x}, t) et celles de Lagrange (\vec{X}, t) pour le calcul d'une fonction et de ses dérivées. Les deux écritures suivantes sont donc identiques :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \right) \quad (3.124)$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \right)^T \right) \quad (3.125)$$

Une conséquence importante est que l'écriture des équations et des conditions aux limites peut s'effectuer directement sur la configuration de référence. Dans le cadre de l'hypothèse HPP, les configurations initiales et actuelles sont considérées confondues.

3.9.3 Conditions de compatibilité des déformations

La relation déformation-déplacement s'écrit en HPP :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \right)^T \right) \quad (3.126)$$

En notation indicielle, cela s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.127)$$

A tout champ de déplacement, on peut faire correspondre un champ de déformation HPP par la relation ci-dessous. Par contre, existe-t-il pour un champ de déformation quelconque, un champ de déplacement associé par (3.127). La réponse est non en général⁹. Pour que la réponse soit positive, il faut que les déformations vérifient des équations dites de compatibilité. Ces équations de compatibilité sont au nombre de 6 :

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} - \epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik} = 0 \quad (3.128)$$

9. La raison intuitive est le fait qu'il y a six composantes de déformations et seulement trois de déplacements.

3.9.4 Directions principales des déformations et cercle de Mohr

Le tenseur des déformations, $\bar{\bar{\epsilon}}$, étant un tenseur symétrique d'ordre 2, nous savons (voir section 2.8.6) qu'il existe une base privilégiée dite base propre (ou base principale) dans laquelle les composantes de ce tenseur forme une matrice diagonale. Cette base propre est orthonormée et sera notée $(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$:

$$[\bar{\bar{\epsilon}}]_{(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Pour calculer l'allongement relatif, ϵ du vecteur \vec{e}_I lors de la déformation, on se sert de la formule (3.107)

$$\epsilon = \vec{e}_I \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{e}_I = \epsilon_I \quad (3.130)$$

Les valeurs propres ϵ_I , ϵ_{II} et ϵ_{III} représentent donc les allongements relatifs de segments élémentaires placés dans les trois directions de la base propre.

Calculons maintenant la variation d'angle γ entre deux vecteurs de la base propre lors de la déformation par la formule (3.111) :

$$\frac{\gamma}{2} = \vec{e}_I \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \vec{e}_{II} = \epsilon_{II} \vec{e}_I \cdot \vec{e}_{II} = 0 \quad (3.131)$$

Les vecteurs de base restent donc orthogonaux entre eux lors de la déformation. La base propre du tenseur des déformations HPP est une base orthonormée qui reste orthogonale lors de la déformation (mais pas nécessairement orthonormée car les vecteurs de base peuvent s'allonger ou se rétrécir).

Pour illustrer cette propriété de la base propre des déformations, considérons un bloc en caoutchouc sur la surface duquel a été gravé un réseau orthogonal. Si cette surface est libre d'effort lors de la déformation, on peut montrer que la normale à cette surface est un des vecteurs propre que l'on notera \vec{e}_{III} ¹⁰. Si lors de la déformation, le réseau gravé reste orthogonal, cela indique que ce réseau était orienté selon les deux autres vecteurs propres \vec{e}_I et \vec{e}_{II} . Si par contre, le réseau perd son orthogonalité, le réseau n'était pas aligné selon la base propre.

Étudions ceci quantitativement. Donnons-nous un vecteur \vec{l} sur la surface qui fait un angle, α avec le premier vecteur de base propre \vec{e}_I , voir figure 3.8. Prenons un second vecteur \vec{l} orthogonal à \vec{l} et tel que $(\vec{l}, \vec{l}, \vec{e}_{III})$ forme une base directe :

$$\vec{l} = \cos \alpha \vec{e}_I + \sin \alpha \vec{e}_{II} \quad (3.132)$$

$$\vec{l} = -\sin \alpha \vec{e}_I + \cos \alpha \vec{e}_{II} \quad (3.133)$$

L'allongement relatif selon \vec{n} se calcule par

$$\epsilon_l = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_I & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_I + \epsilon_{II}}{2} + \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{2} \cos(-2\alpha) \quad (3.134)$$

De même, la réduction d'angle entre les vecteurs \vec{n} et \vec{l} se calcule par

$$\frac{\gamma}{2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_I & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{2} \sin(-2\alpha) \quad (3.135)$$

Le point $(\epsilon_l, \gamma/2)$ parcourt un cercle de centre $(\frac{\epsilon_I + \epsilon_{II}}{2}, 0)$ et de rayon¹¹ $\frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{2}$. Lorsque l'angle α varie de 0 à π , le point décrit complètement le cercle. Les directions angulaires pour lesquelles les distorsions angulaires, γ , sont extrémales sont données par $\alpha = \pi/4$ et $\alpha = 3\pi/4$. Ces directions correspondent aux bissectrices des directions principales.

10. Ceci sera clair lorsque nous verrons le concept de contraintes et de comportement élastique.

11. On suppose que l'ordre des valeurs propres est tel que $\epsilon_I \geq \epsilon_{II}$

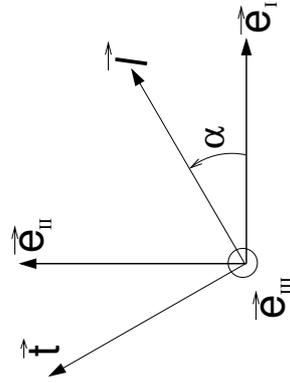


FIG. 3.8 –

3.9.5 Dépouillement d'une rosette en extensométrie

Pour connaître les déformations dans le plan d'une surface qui se déforme, on peut coller sur cette surface une rosette. Une rosette, constituée de trois jauges de déformation, mesure les allongements relatifs dans trois directions différentes du plan, soit à 45° , pour les rosettes dite à 45° ou à 60° , pour les rosettes dites à 60° , voir figure 3.9.

Une jauge de déformation, figure 3.10, peut être assimilée à une résistance métallique constituée d'un fil rectiligne très fin, que l'on colle sur la surface de la structure étudiée. On transmet ainsi au fil les déformations de la structure, d'où une variation de sa longueur, qui produit une variation de sa résistance. Cette variation est mesurée à l'aide d'un pont de Wheatstone. On peut ainsi obtenir avec précision l'allongement relatif ε_x dans la direction x de la jauge.

A partir de ε_a , ε_b et ε_c , il est possible de trouver les déformations propres et vecteurs propres dans le plan. Notons a , l'angle que fait la jauge dans la direction \vec{a} par rapport au vecteur propre (inconnu) \vec{e}_I : l'allongement relatif, ε_a dans la direction \vec{a} est donné par (3.134) :

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos(2a) \quad (3.136)$$

De même, si α est l'angle de la rosette, on a

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2(a + \alpha) \quad (3.137)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos 2(a + 2\alpha) \quad (3.138)$$

Pour résoudre ces trois équations à trois inconnues, on posera $d = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}$ et $r = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$. Pour la rosette à 45° , on a

$$\varepsilon_a = d + r \cos(2a) \quad (3.139)$$

$$\varepsilon_b = d + r \cos(2a + \pi/2) \quad (3.140)$$

$$\varepsilon_c = d + r \cos(2a + \pi) \quad (3.141)$$

d'où on tire

$$d = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2 + (\varepsilon_a + \varepsilon_c - 2\varepsilon_b)^2} \quad \tan 2a = \frac{\varepsilon_b - d}{\varepsilon_a - d} \quad (3.142)$$

Pour la rosette à 60° , on a

$$\varepsilon_a = d + r \cos(2a) \quad (3.143)$$

$$\varepsilon_b = d + r \cos(2a + 2\pi/3) \quad (3.144)$$

$$\varepsilon_c = d + r \cos(2a + 4\pi/3) \quad (3.145)$$

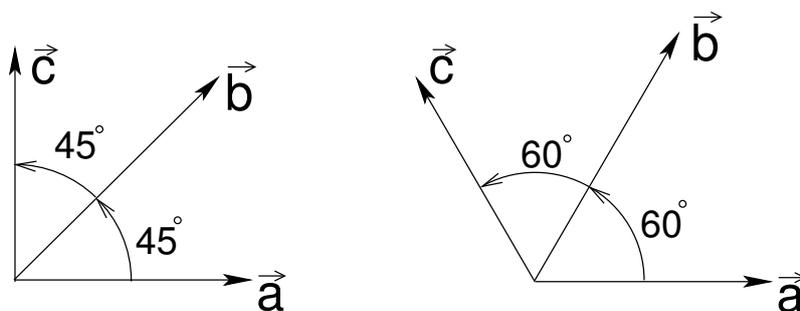


FIG. 3.9 –

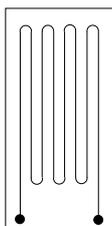


FIG. 3.10 –

d'où on tire

$$d = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \quad r = \frac{1}{3} \sqrt{(2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + 3(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad \tan 2a = \frac{\sqrt{3} \varepsilon_c - \varepsilon_b}{\varepsilon_a - d} \quad (3.146)$$

Enfin, à partir de d et r , on obtient

$$\varepsilon_I = d + r \quad \varepsilon_{II} = d - r \quad (3.147)$$

Chapitre 4

Lois de bilan

Nous venons d'introduire le bagage permettant de décrire la cinématique d'un milieu continu. Pour résoudre un problème concret de mécanique des milieux continus, il faut trois types d'équations :

- Les équations de la cinématique que nous venons de voir ;
- Les lois de bilan, objet du présent chapitre ;
- La ou les lois de comportement du milieu (si il y a plusieurs matériaux en présence). Dans ce cours, nous verrons en détail un comportement particulier qui est le comportement élastique.

Les lois de la physique classique sont d'un type général que l'on appelle loi de bilan. Ces lois ont été obtenues par l'expérience et ne sont jamais mises en défaut si l'on reste dans les hypothèses de la physique classique à savoir vitesse faible devant la vitesse de la lumière et taille "raisonnable" du système. Ces lois sont également toujours vérifiées quel que soit le milieu : solide, fluide ou gazeux. Vu la généralité de ces lois, elles sont souvent appelées lois universelles. Par contre, les lois de comportement comme le nom l'indique dépendent du milieu considéré et ne sont donc pas universelles.

Quatre lois de bilan sont à notre disposition¹ :

- la conservation de la masse ;
- le bilan de la quantité de mouvement ;
- le bilan du moment cinétique ;
- le bilan de l'énergie.

La loi de bilan de la quantité de mouvement introduit une quantité centrale en mécanique qui est la contrainte. Compte tenu de l'importance de cette quantité, un chapitre complet lui est dédié.

4.1 Forme globale des lois de bilan

Avant de décrire en détail chacune des quatre lois de bilan, nous allons d'abord étudier le caractère général d'une loi de bilan. Ce bilan s'applique à tout domaine ω intérieur au domaine² ν étudié³. Nous supposerons ici pour fixer les idées que les domaines ν et ω sont tridimension-

1. Ces quatre lois sont les lois utiles pour la mécanique. D'autres lois existent pour l'électromagnétisme comme la loi de conservation de la charge électrique.

2. Le domaine est noté ν et non V car on s'intéresse au domaine actuellement occupé par le milieu et non initialement occupé par le milieu.

3. Nous suivons ici la présentation de [5].

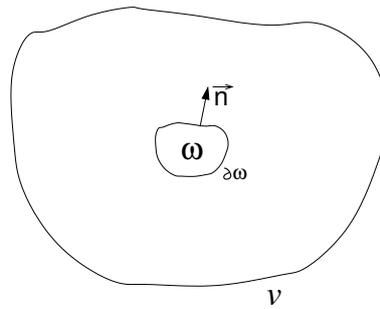


FIG. 4.1 –

nels, figure 4.1. Toute loi de bilan s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega} \alpha ds + \int_{\omega} A dv \quad (4.1)$$

Le symbole $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée matérielle déjà introduite section 3.1 et \mathcal{A} , α , A sont trois grandeurs associées dans l'énoncé de la loi.

Tout d'abord, \mathcal{A} est la densité *volumique* de la quantité à laquelle on s'intéresse. Ensuite, α est le taux de densité *surfactive* reçu à travers la surface $\partial\omega$. Enfin, A est le taux de production volumique de la quantité d'intérêt. Nous supposons que α est une fonction d'une part du point \vec{x} considéré sur la surface $\partial\omega$ et d'autre part du vecteur unitaire de la normale extérieure, \vec{n} , à cette surface en \vec{x} . Nous écrirons donc $\alpha(\vec{x}, \vec{n}, t)$. La relation (4.1) s'interprète comme suit : ce que l'on fournit en volume dans ω ou à travers la surface $\partial\omega$, membre de droite, sert à faire varier la quantité d'intérêt, membre de gauche. Voilà pourquoi une relation de type (4.1) est appelée loi de bilan : tout ce qui est fourni sert à faire varier la quantité.

Il est important de noter que la dérivée intervenant dans le membre de gauche est une dérivée matérielle, c'est à dire que l'on s'intéresse à la variation d'une quantité en suivant un ensemble donné de matière. Le domaine ω se déplace mais contient toujours les mêmes particules. C'est un domaine matériel. Donc, aucun flux de matière ne traverse $\partial\omega$.

La table 4.1 donne la signification mécanique des quantités \mathcal{A} , α , A pour les quatre lois de bilan. On note que ces quantités sont scalaires pour la conservation de la masse et le bilan de l'énergie et vectorielles pour les deux autres lois. Lorsque $\alpha = 0$ et $A = 0$, on parle de loi de conservation plutôt que de bilan. C'est le cas de la conservation de la masse.

4.2 Forme locale des lois de bilan

Les lois de bilan ont été formulées ci-dessus pour n'importe quel domaine matériel ω . Cette forme des lois de bilan offre une interprétation physique intéressante. Par contre elle n'est pas propice à la résolution analytique ou numérique de problèmes concrets. Pour cela, il nous faut la forme dite locale des lois de bilan qui va donner un ensemble d'équations aux dérivées partielles.

Pour passer de la forme globale à la forme locale, nous allons jouer sur le fait que la loi de bilan (4.1) est valable pour tout domaine ω . Si nous arrivons à transformer (4.1) et l'écrire sous la forme :

$$\int_{\omega} \text{“quelque chose”} dv = 0 \quad \forall \omega \subset v \quad (4.2)$$

nous pourrons en déduire

$$\text{“quelque chose”} = 0 \quad \text{en tout point } \vec{x} \text{ de } v \quad (4.3)$$

Lois de conservation de la masse	
$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho dv = 0$	
$\mathcal{A} = \rho$	masse volumique
Loi de bilan de la quantité de mouvement	
$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \vec{v} dv = \int_{\partial\omega} \vec{T} ds + \int_{\omega} \vec{f} dv$	
$\vec{\mathcal{A}} = \rho \vec{v}$	quantité de mouvement volumique
$\vec{\alpha} = \vec{T}$	force surfacique
$\vec{A} = \vec{f}$	force volumique
Loi de bilan du moment cinétique	
$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \vec{x} \wedge \rho \vec{v} dv = \int_{\partial\omega} \vec{x} \wedge \vec{T} ds + \int_{\omega} \vec{x} \wedge \vec{f} dv$	
$\vec{\mathcal{A}} = \vec{x} \wedge \rho \vec{v}$	moment cinétique volumique
$\vec{\alpha} = \vec{x} \wedge \vec{T}$	moment des forces surfaciques
$\vec{A} = \vec{x} \wedge \vec{f}$	moment des forces volumiques
Loi de bilan de l'énergie	
$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho (e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}) dv = \int_{\partial\omega} (q + \vec{T} \cdot \vec{v}) ds + \int_{\omega} (r + \vec{f} \cdot \vec{v}) dv$	
$\mathcal{A} = \rho (e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v})$	énergie volumique totale
$\alpha = q + \vec{T} \cdot \vec{v}$	énergie interne volumique : ρe + énergie cinétique : $\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v}$ densité surfacique du taux de chaleur reçue : q et puissance fournie par les forces surfaciques : $\vec{T} \cdot \vec{v}$
$A = r + \vec{f} \cdot \vec{v}$	source volumique de chaleur : r et puissance fournie par les forces volumiques : $\vec{f} \cdot \vec{v}$

TAB. 4.1 – Signification des quantités \mathcal{A} , α et A , pour les quatre lois de bilan de la mécanique des milieux continus.

En effet, si l'intégrale d'une quantité sur n'importe quel domaine est nulle, cette quantité est nulle partout⁴.

Pour mettre la loi générale de bilan (4.1), rappelée ci-dessous

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega} \alpha ds + \int_{\omega} A dv \quad (4.4)$$

sous la forme (4.2), il faut d'une part faire rentrer la dérivée sous le signe intégrale et d'autre part transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume.

Le théorème dit de transport ci-dessous va nous permettre de faire passer la dérivée sous le signe intégrale. Il est important de remarquer que le domaine ω sur lequel on intègre dépend du temps (il suit un ensemble donné de particules). On ne peut donc simplement permuter les signes dérivée et intégrale.

Théorème 4.1 *Si \mathcal{A} est une quantité scalaire, nous avons les égalités suivantes :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathcal{A} dv = \int_{\omega} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega} \mathcal{A} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (4.5)$$

$$= \int_{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{A} \vec{v}) \right) dv \quad (4.6)$$

$$= \int_{\omega} \left(\frac{d\mathcal{A}}{dt} + \mathcal{A} \text{div} \vec{v} \right) dv \quad (4.7)$$

Si $\vec{\mathcal{A}}$ est une quantité vectorielle, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \vec{\mathcal{A}} dv = \int_{\omega} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega} \vec{\mathcal{A}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \quad (4.8)$$

$$= \int_{\omega} \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\mathcal{A}} \otimes \vec{v}) \right) dv \quad (4.9)$$

$$= \int_{\omega} \left(\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} + \vec{\mathcal{A}} \text{div} \vec{v} \right) dv \quad (4.10)$$

Pour démontrer ce théorème, écrivons la dérivée comme une limite, illustrée figure 4.2.

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} \left(\int_{\omega(t')} \mathcal{A}(\vec{x}, t') dv - \int_{\omega(t)} \mathcal{A}(\vec{x}, t) dv \right) \quad (4.11)$$

Trois zones apparaissent sur la figure 4.2. La limite (4.11) peut se réécrire :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_I \frac{\mathcal{A}(\vec{x}, t') - \mathcal{A}(\vec{x}, t)}{t' - t} dv + \lim_{t' \rightarrow t} \int_{II} \frac{1}{t' - t} \mathcal{A}(\vec{x}, t') dv \quad (4.12)$$

$$- \lim_{t' \rightarrow t} \int_{III} \frac{1}{t' - t} \mathcal{A}(\vec{x}, t) dv \quad (4.13)$$

L'intégrand du premier terme ci-dessus n'est autre que la dérivée eulérienne de \mathcal{A} :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}(\vec{x}, t') - \mathcal{A}(\vec{x}, t)}{t' - t} dv = \frac{\partial \mathcal{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (4.14)$$

A la limite $t' \rightarrow t$, le domaine (I) coïncide avec ω . Le premier terme de (4.13) nous donne donc le premier terme du théorème :

$$\int_{\omega} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} dv \quad (4.15)$$

4. L'étudiant intéressé pourra par exemple se reporter à [5] pour une démonstration mathématique rigoureuse.

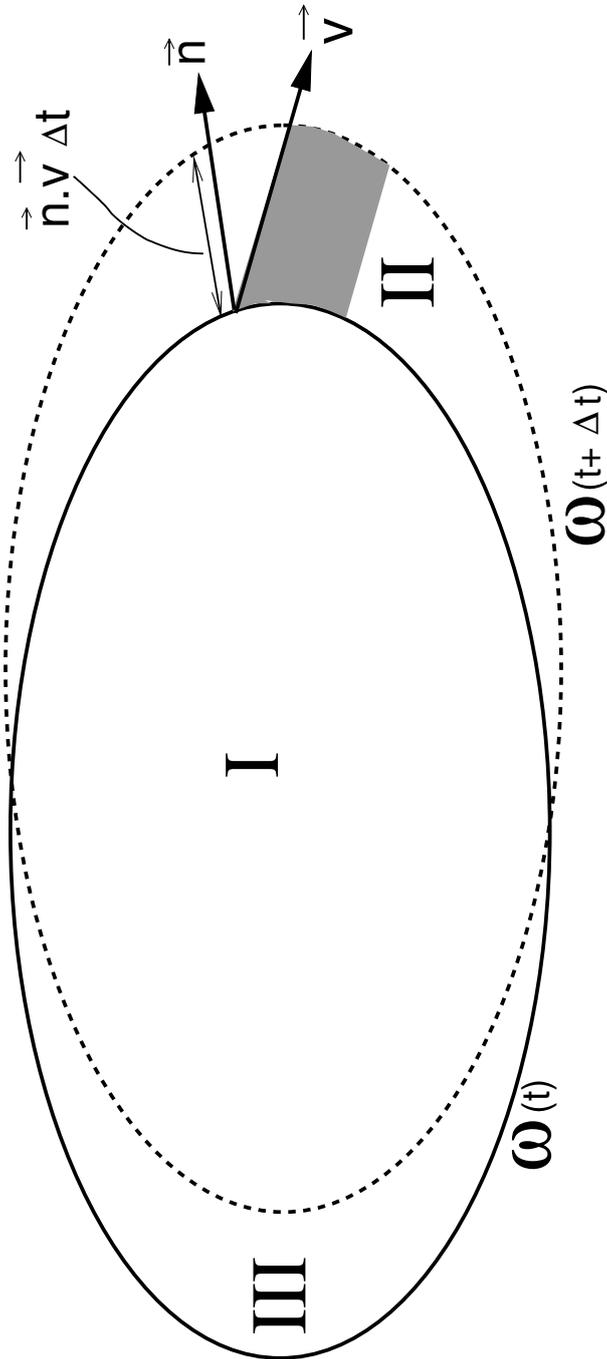


FIG. 4.2 –

Il nous reste à obtenir le second terme du théorème. Un élément de volume dv de (II), hachuré figure 4.2, s'écrit au premier ordre $dv = \vec{v} \cdot \vec{n} ds(t' - t)$. De même un élément de (III) s'écrit $dv = -\vec{v} \cdot \vec{n} ds(t' - t)$. Ainsi, la limite (4.11) est égale à

$$\int_{\omega} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega} \mathcal{A} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad (4.16)$$

ou

$$\int_{\omega} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{A} \vec{v}) dv \quad (4.17)$$

en utilisant la formule de Green-Ostrogradski, (2.45). Finalement, pour démontrer la dernière partie du théorème, on utilise la relation entre dérivée lagrangienne et eulérienne, (3.12), et la formule de la divergence d'un produit, (2.70) :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{A} \vec{v}) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathcal{A} \cdot \vec{v} + \mathcal{A} \operatorname{div} \vec{v} \quad (4.18)$$

$$= \frac{d\mathcal{A}}{dt} + \mathcal{A} \operatorname{div} \vec{v} \quad (4.19)$$

La version vectorielle du théorème de transport se démontre de manière similaire. Il nous reste maintenant à transformer l'intégrale $\int_{\partial\omega} \alpha ds$ en une intégrale de volume. Pour cela nous disposons du théorème suivant :

Théorème 4.2 *Le taux de densité surfacique $\alpha(\vec{x}, t, \vec{n})$ apparaissant dans la loi de bilan est linéaire dans la normale \vec{n} . Il existe, donc un vecteur \vec{a} tel que :*

$$\alpha(\vec{x}, t, \vec{n}) = \vec{a}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \quad (4.20)$$

On en déduit par la formule de Green-Ostrogradski les égalités suivantes :

$$\int_{\partial\omega} \alpha ds = \int_{\partial\omega} \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega} \operatorname{div} \vec{a} dv \quad (4.21)$$

Si le taux de densité surfacique est un vecteur $\vec{\alpha}(\vec{x}, t, \vec{n})$, ce vecteur est linéaire dans la normale \vec{n} . Il existe donc un tenseur du second ordre $\bar{\bar{a}}$ tel que

$$\vec{\alpha}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \bar{\bar{a}}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \quad (4.22)$$

et on en déduit par la formule de Green-Ostrogradski :

$$\int_{\partial\omega} \vec{\alpha} ds = \int_{\partial\omega} \bar{\bar{a}} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega} \operatorname{div} \bar{\bar{a}} dv \quad (4.23)$$

Pour démontrer l'existence du vecteur \vec{a} et tenseur $\bar{\bar{a}}$, on considère un trièdre dont trois faces sont orthogonales et orientées selon les axes, figure 4.3. Les normales extérieures aux quatre faces du trièdre sont $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3$ et \vec{n} . Le volume du trièdre est noté dv et les aires des surfaces sont notées ds_1, ds_2, ds_3 , et ds .

En écrivant la loi de bilan sur ce trièdre nous obtenons⁵ :

$$0 = \alpha(-\vec{e}_1) ds_1 + \alpha(-\vec{e}_2) ds_2 + \alpha(-\vec{e}_3) ds_3 + \alpha(\vec{n}) ds + Adv \quad (4.24)$$

5. le membre de gauche de la loi de bilan a été omis. Il se révèle en effet négligeable lorsque l'on fait tendre le trièdre vers un point. Il en sera de même pour le terme source A .

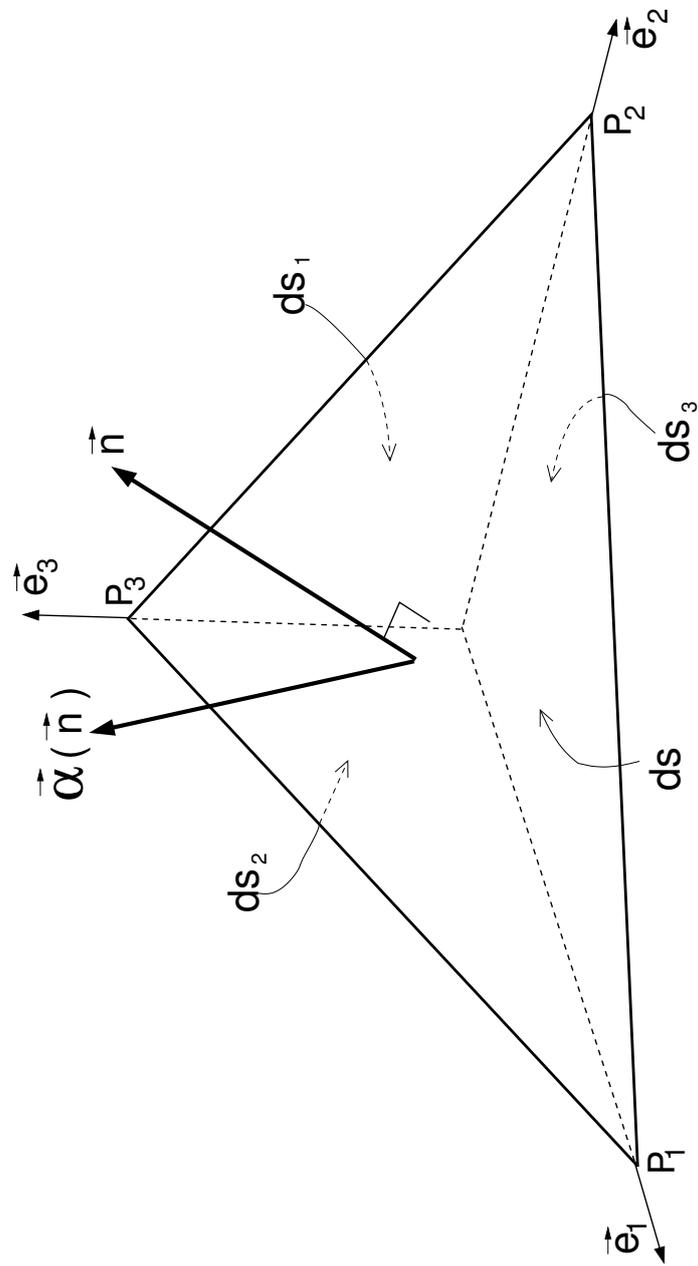


FIG. 4.3 –

On a seulement écrit explicitement la dépendance de α dans la normale. La dépendance dans la position a peu d'importance puisque nous prendrons la limite pour un trièdre tendant homothétiquement vers un point.

Nous avons les relations géométriques

$$ds_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{n} ds, \quad ds_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n} ds, \quad ds_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n} ds \quad (4.25)$$

et la relation ci-dessous que nous justifierons plus tard

$$\alpha(-\vec{n}) = -\alpha(\vec{n}) \quad (4.26)$$

Donc

$$0 = -\alpha(\vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{n} - \alpha(\vec{e}_2)\vec{e}_2 \cdot \vec{n} - \alpha(\vec{e}_3)\vec{e}_3 \cdot \vec{n} + \alpha(\vec{n}) + A \frac{dv}{ds} \quad (4.27)$$

En effectuant maintenant le passage à la limite pour le trièdre tendant homothétiquement vers un point, on obtient :

$$\alpha(\vec{n}) = \underbrace{(\alpha(\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \alpha(\vec{e}_2)\vec{e}_2 + \alpha(\vec{e}_3)\vec{e}_3)}_{\vec{a}} \cdot \vec{n} \quad (4.28)$$

La démonstration pour une quantité $\vec{\alpha}$ vectorielle est similaire, on a :

$$0 = -\vec{\alpha}(\vec{e}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) - \vec{\alpha}(\vec{e}_2)(\vec{e}_2 \cdot \vec{n}) - \vec{\alpha}(\vec{e}_3)(\vec{e}_3 \cdot \vec{n}) + \vec{\alpha}(\vec{n}) + \vec{A} \frac{dv}{ds} \quad (4.29)$$

et le passage à la limite donne

$$\vec{\alpha}(\vec{n}) = \underbrace{(\vec{\alpha}(\vec{e}_1) \otimes \vec{e}_1 + \vec{\alpha}(\vec{e}_2) \otimes \vec{e}_2 + \vec{\alpha}(\vec{e}_3) \otimes \vec{e}_3)}_{\vec{\bar{a}}} \cdot \vec{n} \quad (4.30)$$

Il nous reste à justifier la relation (4.26). Considérons figure 4.4, un domaine ω constitué de deux sous-domaines notés ω_1 et ω_2 et écrivons la loi de bilan pour chacun de ces trois domaines :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega} \alpha ds + \int_{\omega} A dv \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega_1} \alpha ds + \int_{\partial\Gamma} \alpha(\vec{n}) ds + \int_{\omega_1} A dv \quad (4.32)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_2} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega_2} \alpha ds + \int_{\partial\Gamma} \alpha(-\vec{n}) ds + \int_{\omega_2} A dv \quad (4.33)$$

En soustrayant (4.32) et (4.33) de (4.31), il reste :

$$\int_{\partial\Gamma} (\alpha(\vec{n}) + \alpha(-\vec{n})) ds = 0 \quad (4.34)$$

Cette relation devant être vraie pour tout domaine ω et donc pour toute surface Γ , il vient (4.26).

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la loi de bilan générique sous forme locale. En effet, en utilisant les théorèmes 4.1 et 4.2, la forme globale :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathcal{A} dv = \int_{\partial\omega} \alpha ds + \int_{\omega} A dv \quad (4.35)$$

devient

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{A}\vec{v}) \right) dv = \int_{\omega} \text{div} \vec{a} dv + \int_{\omega} A dv \quad (4.36)$$

d'où on tire la forme locale :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{A}\vec{v}) = \text{div} \vec{a} + A \quad (4.37)$$

Le tableau 4.2 reprend les formes globales et locales des quatre lois de bilan ainsi que la signification des quantités \vec{a} et $\vec{\bar{a}}$.

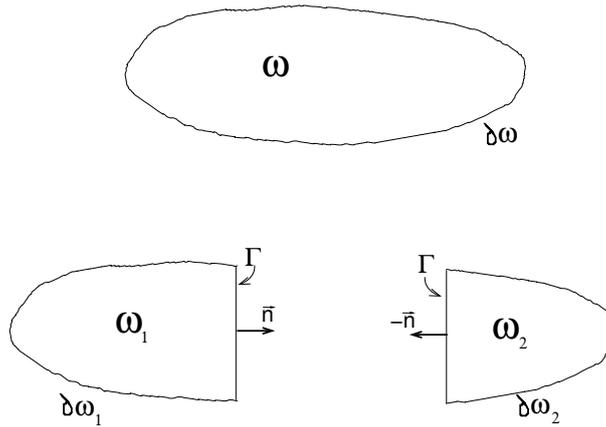


FIG. 4.4 –

Lois de conservation de la masse	
	$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho dv = 0$
forme locale	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0$
Loi de bilan de la quantité de mouvement	
	$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \vec{v} dv = \int_{\partial \omega} \vec{T} ds + \int_{\omega} \vec{f} dv$
$\bar{a} = \bar{\sigma}$ forme locale	tenseur des contraintes $\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div} \bar{\sigma} + \vec{f}$ $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j} = \sigma_{ij,j} + f_i$
Loi de bilan du moment cinétique	
	$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \vec{x} \wedge \rho \vec{v} dv = \int_{\partial \omega} \vec{x} \wedge \vec{T} ds + \int_{\omega} \vec{x} \wedge \vec{f} dv$
$\bar{a} = \vec{x} \wedge \bar{\sigma}$ forme locale	$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) + \text{div}((\vec{x} \wedge \rho \vec{v}) \otimes \vec{v}) = \text{div}(\vec{x} \wedge \bar{\sigma}) + \vec{x} \wedge \vec{f}$ $\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk} x_j \rho v_k) + (\epsilon_{ijk} x_j \rho v_k v_l)_{,l} = (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} + \epsilon_{ijk} x_j f_k$
Loi de bilan de l'énergie	
	$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho (e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}) dv = \int_{\partial \omega} (q + \vec{T} \cdot \vec{v}) ds + \int_{\omega} (r + \vec{f} \cdot \vec{v}) dv$
$\vec{a} = -\vec{q} + \vec{v} \cdot \bar{\sigma}$ forme locale	\vec{q} est le vecteur courant de chaleur $\frac{\partial}{\partial t} (\rho (e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v})) + \text{div}(\rho (e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v}) = -\text{div} \vec{q} + \text{div}(\vec{v} \cdot \bar{\sigma}) + r + \vec{f} \cdot \vec{v}$ $\frac{\partial}{\partial t} (\rho (e + \frac{1}{2} v_i v_i)) + (\rho (e + \frac{1}{2} v_j v_j) v_i)_{,i} = -q_{i,i} + \text{div}(v_i \sigma_{ij})_{,j} + r + f_i v_i$

TAB. 4.2 – Formes globales et locales des lois de bilan

4.3 Conséquences des lois de bilan

4.3.1 Conséquences de la conservation de la masse

La loi de conservation de la masse s'écrit sous forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (4.38)$$

Cette équation est appelée *l'équation de continuité*. Elle est écrite en variables eulériennes. Par exemple, si l'on étudie l'écoulement sanguin dans un tronçon de 10 cm d'une artère, cette équation doit être vérifiée en chaque point de l'artère. Il existe une forme lagrangienne de l'équation de continuité qui s'écrit

$$\rho(\vec{X}, t) J(\vec{X}, t) = \rho_0(\vec{X}, t) \quad (4.39)$$

où ρ_0 est la densité initiale de la particule \vec{X} . Pour rappel J est le Jacobien de la transformation, (3.76),

$$J(\vec{X}, t) = \det \bar{F}(\vec{X}, t) \quad (4.40)$$

Il donne le changement de volume de la particule \vec{X} . L'équation (4.39) nous dit simplement que la densité est inversement proportionnelle au changement de volume. Pour reprendre l'exemple de l'écoulement sanguin, l'équation lagrangienne (4.39) doit être vérifiée pour chaque goutte de sang que l'on suit dans son écoulement alors que l'équation eulérienne (4.38) doit être vérifiée en chaque point fixe de l'écoulement. Il est clair que pour l'étude de l'écoulement dans un tronçon donné, l'équation eulérienne est plus simple à utiliser. Par contre, pour modéliser un problème de crash de voiture, on préférera l'équation lagrangienne car on connaît le domaine initial V mais pas forcément le domaine final v qui est une inconnue.

La conservation de la masse permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.3 *Soit \mathcal{A} une quantité quelconque (scalaire, vectorielle ou tensorielle) et ω un domaine matériel quelconque, la conservation de la masse implique l'égalité suivante*

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mathcal{A} d\omega = \int_{\omega} \rho \frac{d\mathcal{A}}{dt} d\omega \quad (4.41)$$

Pour démontrer ce théorème, servons-nous successivement

- du théorème de transport 4.1 en remplaçant \mathcal{A} par $\rho \mathcal{A}$;
- de l'équation locale de la conservation de la masse (4.38) ;
- et enfin de la relation entre dérivées lagrangienne et eulérienne.

Il vient

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mathcal{A} dv = \int_{\omega} \left(\frac{\partial(\rho \mathcal{A})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathcal{A} \vec{v}) \right) dv \quad (4.42)$$

$$= \int_{\omega} \rho \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{A} \vec{v}) \right) + \mathcal{A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dv \quad (4.43)$$

$$= \int_{\omega} \rho \frac{d\mathcal{A}}{dt} dv \quad (4.44)$$

La démonstration pour une quantité vectorielle ou tensorielle est similaire.

4.3.2 Conséquences de la bilan de quantité de mouvement

La bilan de la quantité de mouvement s'écrit sous forme locale

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + (\rho v_i v_j)_{,j} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (4.45)$$

Ces équations sont appelées *les équations du mouvement* ; elles sont écrites en variables eulériennes⁶.

Dans le cas où le système est en équilibre (absence de mouvement), elles se réduisent à

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (4.46)$$

dites *équations d'équilibre*. En écrivant au premier membre de (4.45)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \quad \text{et} \quad (\rho v_i v_j)_{,j} = v_i (\rho v_j)_{,j} + \rho v_j v_{i,j} \quad (4.47)$$

et en tenant compte de l'équation de continuité (4.38), on obtient

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right) = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (4.48)$$

Le premier membre de (4.48) n'est autre que $\rho a_i = \rho \frac{dv_i}{dt}$ où \vec{a} désigne l'accélération de la particule \vec{X} , voir (3.18). Si bien que l'on peut écrire aussi

$$\rho a_i = \rho \frac{dv_i}{dt} = \sigma_{ij,j} + f_i \quad (4.49)$$

Les équations (4.49) représentent une généralisation de l'équation fondamentale de la dynamique du point $\vec{F} = m\vec{a}$. Cette analogie sera suivie en détail au chapitre 5.

4.3.3 Conséquences de la bilan du moment cinétique

Exploitions maintenant les équations de bilan du moment cinétique rappelées ci-dessous

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k) + (\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k v_l)_{,l} = (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k \quad (4.50)$$

Sachant que $\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$, $x_{j,l} = \delta_{jl}$, et $\varepsilon_{ilk} v_k v_l = 0$ on a

$$\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \varepsilon_{ijk} x_j (\rho v_k v_l)_{,l} = \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{kl,l}) + \varepsilon_{ilk} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ijk} x_j f_k \quad (4.51)$$

En se servant de l'équation du mouvement, (4.45), il reste

$$\varepsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0 \quad (4.52)$$

En développant cette expression, on obtient trois relations

$$\varepsilon_{123} \sigma_{32} + \varepsilon_{132} \sigma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (4.53)$$

$$\varepsilon_{231} \sigma_{13} + \varepsilon_{213} \sigma_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (4.54)$$

$$\varepsilon_{312} \sigma_{21} + \varepsilon_{321} \sigma_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (4.55)$$

Ces relations montrent que, quels que soient i et j ,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.56)$$

La bilan du moment cinétique implique donc la symétrie du tenseur des contraintes.

6. La forme lagrangienne de cette équation est plus complexe et ne sera pas introduite dans ce cours.

4.3.4 Conséquences du bilan de l'énergie

Le bilan de l'énergie donne sous forme locale

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(e + \frac{1}{2}v_i v_i)) + (\rho(e + \frac{1}{2}v_j v_j)v_i)_{,i} = -q_{i,i} + \text{div}(v_i \sigma_{ij})_{,j} + r + f_i v_i \quad (4.57)$$

Cette équation peut être grandement simplifiée en la combinant avec le bilan de la quantité de mouvement (4.45). Il reste

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + e_{,i} v_i\right) = -q_{i,i} + r + \sigma_{ij} v_{i,j} \quad (4.58)$$

Cette équation a une interprétation simple : la variation de l'énergie interne est due à la puissance des efforts intérieurs ($\sigma_{ij} v_{i,j}$) et à un apport de chaleur (volumique r et par conduction $q_{i,i}$).

Chapitre 5

Le tenseur des contraintes

Le concept de contrainte joue un rôle central en mécanique. Selon le type d'ouvrage, ce concept est introduit de trois manières différentes :

- introduction par le biais de la loi de bilan de la quantité de mouvement tel que cela a été fait au chapitre 4. Cette présentation a le mérite d'être rapide et d'être reliée aux lois universelles de la physique. Par contre, elle occulte la signification mécanique des contraintes ;
- introduction par une extension des concepts de la mécanique des solides indéformables ;
- introduction par la puissance intérieure et le principe des travaux virtuels, cette manière d'introduire la contrainte est intéressante car elle met en évidence la relation entre effort et mouvement.

Il est difficile de décider, parmi ces différentes présentations celle qui est la plus pertinente. Nous avons donc décidé de les présenter toutes dans ce cours. Ces différents éclairages devraient permettre à chacun selon son bagage de trouver la présentation initiale qui lui parle le plus et ensuite de cerner les autres présentations.

5.1 Introduction du tenseur des contraintes par extension de la mécanique des solides indéformables

Le mouvement d'un solide indéformable est complètement déterminé dès que l'on connaît à chaque instant deux vecteurs : la force résultante et le moment résultant appliqués sur le solide. En effet, la position du solide est définie par deux vecteurs également (la position de son centre de gravité et la rotation autour de ce centre de gravité) et le principe fondamental de la dynamique permet de relier la force résultante au déplacement du centre de gravité et le moment résultant à la rotation autour du centre de gravité.

Dans le cas d'un milieu déformable, deux choses importantes vont changer :

- la position du milieu n'est plus définie par deux vecteurs mais par une infinité de vecteurs (on parle alors de champ de vecteurs) : il faut connaître à tout instant la position de *chaque* point matériel ;
- la position n'étant plus définie par deux vecteurs mais une infinité de vecteurs, les deux équations que donnent le principe fondamental pour les solides indéformables ne vont plus suffire. En effet deux équations vectorielles ne peuvent prédire le mouvement d'une infinité de particules ! Il va falloir autant d'équations du mouvement qu'il y a d'inconnues soit une infinité (on parle alors d'équations aux dérivées partielles). Il va falloir écrire les équations du mouvement de *chaque* particule de matière.

Le premier point est clair et a déjà été détaillé au chapitre 3 sur la cinématique d'un milieu continu.

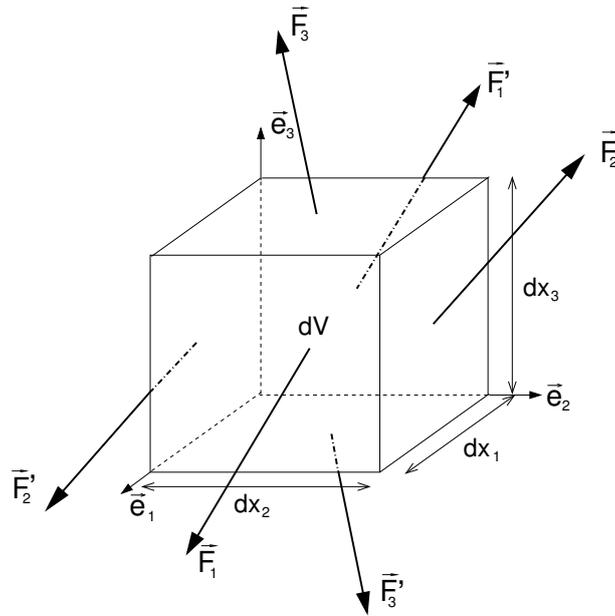


FIG. 5.1 –

Concernant le second point, nous allons isoler par la pensée un petit élément de matière quelconque dv et écrire le principe fondamental. Quels sont les efforts qui agissent sur ce petit élément de matière? Il y a des efforts volumiques à longue portée comme la gravité. Si on note \vec{f} la force par unité de volume (par exemple $\vec{f} = \rho\vec{g}$), la force totale agissant sur dv est $\vec{f}dv$.

Ensuite, il y a des forces de surface appliquées sur la surface extérieure de dv . Pour caractériser ces efforts, il faut considérer deux cas : soit le domaine élémentaire dv est complètement à l'intérieur du milieu, soit il est en surface du milieu. Dans le premier cas, les efforts de surface viennent des particules voisines. Par exemple, lorsqu'un pneu est comprimé sur la route, une particule de caoutchouc à l'intérieur du pneu est comprimée par ses voisines et subit donc une force (et par le principe de l'action-réaction la particule agit également sur ses voisines).

5.1.1 Volume élémentaire au sein du milieu

Prenons un domaine élémentaire dv en forme de cube aligné selon les axes, figure 5.1. Nous avons noté \vec{F}_1 la force appliquée à la face de normale extérieure \vec{e}_1 et par \vec{F}'_1 , la force appliquée à la face de normale extérieure $-\vec{e}_1$. De même pour les indices 2 et 3. Appliquons le principe fondamental de la dynamique[6]. Ce principe impose l'égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs. Dans un premier temps, nous écrirons l'équation du mouvement en translation puis en rotation. La somme des forces appliquées au volume élémentaire doit être égale à la masse de ce volume fois son accélération. La masse est ρdv et \vec{a} est l'accélération du centre de gravité du cube. Il vient

$$\vec{F}_1 + \vec{F}'_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}'_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}'_3 + \vec{f}dv = \rho dv \vec{a} \quad (5.1)$$

La force \vec{F}'_1 se distingue de la force \vec{F}_1 par le fait qu'elle agit sur une facette d'orientation opposée ($-\vec{e}_1$ et non \vec{e}_1) et que de plus cette facette est en x_1 et non $x_1 + dx_1$. Pour bien mettre

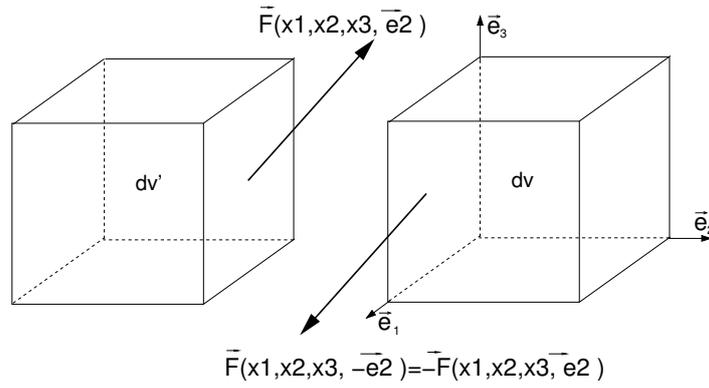


FIG. 5.2 –

en évidence la dépendance des forces à la position et à l'orientation de la facette, nous écrivons

$$\vec{F}_1 = \vec{F}(x_1 + dx_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \quad (5.2)$$

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1) \quad (5.3)$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}(x_1, x_2 + dx_2, x_3, \vec{e}_2) \quad (5.4)$$

$$\vec{F}'_2 = \vec{F}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_2) \quad (5.5)$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}(x_1, x_2, x_3 + dx_3, \vec{e}_3) \quad (5.6)$$

$$\vec{F}'_3 = \vec{F}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_3) \quad (5.7)$$

Par action-réaction, nous pouvons écrire

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1) = -\vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \quad (5.8)$$

En effet la force, ressentie par le volume dv à travers la facette de normale $-\vec{e}_1$ est l'opposée de la force qu'applique dv sur son voisin à travers la facette de normale \vec{e}_1 . Cette action-réaction est illustrée sur la figure 5.2. Nous pouvons donc réécrire l'équilibre (5.1) sous la forme

$$\vec{F}(x_1 + dx_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) + \quad (5.9)$$

$$\vec{F}(x_1, x_2 + dx_2, x_3, \vec{e}_2) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) + \quad (5.10)$$

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3 + dx_3, \vec{e}_3) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3) + \vec{f}dv = \rho d\vec{v} \quad (5.11)$$

Il nous reste à faire tendre le volume élémentaire $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ vers 0. En divisant (5.11) par dv et en prenant la limite pour $dx_1, dx_2, dx_3 \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\partial x_1} + \\ & \frac{\partial \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\partial x_2} + \\ & \frac{\partial \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\partial x_3} + \vec{f} = \rho \vec{a} \end{aligned}$$

Nous nous sommes servi de la définition de la dérivée

$$\lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1 + dx_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{dx_1} = \frac{\partial \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{\partial x_1} \quad (5.12)$$

$$\lim_{dx_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1, x_2 + dx_2, x_3, \vec{e}_2) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{dx_2} = \frac{\partial \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{\partial x_2} \quad (5.13)$$

$$\lim_{dx_3 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1, x_2, x_3 + dx_3, \vec{e}_3) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{dx_3} = \frac{\partial \vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{\partial x_3} \quad (5.14)$$

et nous avons introduit la notation

$$\lim_{dx_2, dx_3 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)}{dx_2 dx_3} = \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) \quad (5.15)$$

$$\lim_{dx_1, dx_3 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2)}{dx_1 dx_3} = \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) \quad (5.16)$$

$$\lim_{dx_1, dx_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3)}{dx_1 dx_2} = \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3) \quad (5.17)$$

Le vecteur \vec{T} est appelé vecteur contrainte. c'est la limite de la force divisée par la surface d'application lorsque cette surface tend vers 0. L'unité de \vec{T} est le Newton par mètre carré Nm^{-2} , aussi appelé le Pascal Pa .

Écrivons maintenant la seconde partie du principe fondamental de la dynamique à savoir l'équation du mouvement en rotation. Le moment résultant appliqué sur le volume élémentaire doit être égal au moment d'inertie fois l'accélération angulaire. Évaluons l'ordre de grandeur de ces deux termes. Si on note dx la dimension caractéristique du cube,

- le moment des forces surfaciques est d'ordre $O(dx^3)$ car le bras de levier est en $O(dx)$ et la force est proportionnelle à la surface donc en $O(dx^2)$;
- le moment des forces de volume est en $O(dx^4)$ car le bras de levier est en $O(dx)$ et la force de volume est proportionnelle au volume donc en $O(dx^3)$;
- enfin, le moment d'inertie du volume élémentaire est en $O(dx^5)$.

Lorsque l'on fait tendre la taille du volume élémentaire vers 0, le seul terme qui importe est donc le moment des forces surfaciques. Imposons donc que le moment résultant des forces surfaciques soit nul

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1}{2} \vec{e}_1 \wedge (dx_2 dx_3 \vec{T}(x_1 + dx_1, x_2, x_3, \vec{e}_1)) - \frac{dx_1}{2} \vec{e}_1 \wedge (dx_2 dx_3 \vec{T}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_1)) + \\ & \frac{dx_2}{2} \vec{e}_2 \wedge (dx_1 dx_3 \vec{T}(x_1, x_2 + dx_2, x_3, \vec{e}_2)) - \frac{dx_2}{2} \vec{e}_2 \wedge (dx_1 dx_3 \vec{T}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_2)) + \\ & \frac{dx_3}{2} \vec{e}_3 \wedge (dx_1 dx_2 \vec{T}(x_1, x_2, x_3 + dx_3, \vec{e}_3)) - \frac{dx_3}{2} \vec{e}_3 \wedge (dx_1 dx_2 \vec{T}(x_1, x_2, x_3, -\vec{e}_3)) = \vec{0} \end{aligned}$$

d'où on tire, au premier ordre et en prenant en compte (5.8)

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_1) + \vec{e}_2 \wedge \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_2) + \vec{e}_3 \wedge \vec{T}(x_1, x_2, x_3, \vec{e}_3) = \vec{0} \quad (5.18)$$

5.1.2 Volume élémentaire en surface du milieu

Étudions maintenant le cas d'un volume élémentaire situé en surface du milieu. Prenons comme volume élémentaire un trièdre dont la face inclinée correspond à une partie de la surface extérieure du milieu. Sur cette facette agit une force \vec{F} et sur les trois autres facettes des forces \vec{F}'_1 , \vec{F}'_2 et \vec{F}'_3 comme illustré figure 5.3. L'équation de mouvement en translation s'écrit

$$\vec{F} + \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{f} dv = \rho dv \vec{a} \quad (5.19)$$

En reprenant les arguments et notations utilisés dans le cas du cube, nous pouvons écrire

$$\vec{T}(\vec{n}) ds - \vec{T}(\vec{e}_1) ds_1 - \vec{T}(\vec{e}_2) ds_2 - \vec{T}(\vec{e}_3) ds_3 + \vec{f} dv = \rho dv \vec{a} \quad (5.20)$$

où ds_i est l'aire de la surface élémentaire de normale \vec{e}_i et ds l'aire de la facette inclinée. Il reste à passer à la limite pour $dv \rightarrow 0$. On remarque que les termes ayant le volume élémentaire dv

comme facteur sont d'un ordre supérieur aux termes ayant une aire élémentaire comme facteur. De plus, on a

$$ds_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{n} ds, \quad ds_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n} ds, \quad ds_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n} ds \quad (5.21)$$

A limite du trièdre tendant homothétiquement vers un point, la relation (5.20) devient

$$\vec{T}(\vec{n}) = \vec{T}(\vec{e}_1)(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}) + \vec{T}(\vec{e}_2)(\vec{e}_2 \cdot \vec{n}) + \vec{T}(\vec{e}_3)(\vec{e}_3 \cdot \vec{n}) \quad (5.22)$$

$$= \left(\vec{T}(\vec{e}_1) \otimes \vec{e}_1 + \vec{T}(\vec{e}_2) \otimes \vec{e}_2 + \vec{T}(\vec{e}_3) \otimes \vec{e}_3 \right) \cdot \vec{n} \quad (5.23)$$

La relation ci-dessous doit être comprise comme suit : le vecteur contrainte sur une facette de normale \vec{n} en un point dépend linéairement de l'orientation de cette normale. Les vecteurs contraintes $\vec{T}(\vec{e}_1)$, $\vec{T}(\vec{e}_2)$ et $\vec{T}(\vec{e}_3)$ peuvent être décomposés selon les vecteurs de base. On notera σ_{ij} la composante i du vecteur traction agissant sur la facette de normale \vec{e}_j :

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 \quad (5.24)$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3 \quad (5.25)$$

$$\vec{T}(\vec{e}_3) = \sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \quad (5.26)$$

En introduisant, ces décompositions dans (5.23), il vient

$$\vec{T}(\vec{n}) = \left(\sigma_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \right. \quad (5.27)$$

$$\left. \sigma_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \right. \quad (5.28)$$

$$\left. \sigma_{31}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \right) \cdot \vec{n} \quad (5.29)$$

soit sous formes intrinsèque et indicielle :

$$\vec{T}(\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \quad T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (5.30)$$

Le tenseur du second ordre $\overline{\overline{\sigma}}$ est appelé tenseur des contraintes. Il regroupe les composantes des trois vecteurs contraintes agissant sur les facettes normales aux trois vecteurs de base. La relation (5.30) indique que le vecteur contrainte agissant sur une facette d'orientation quelconque est connu si l'on connaît le tenseur contrainte en ce point et l'orientation de la facette. De plus la dépendance dans l'orientation est linéaire. Insistons sur la signification mécanique des composantes du tenseur des contraintes. La composante σ_{ij} est la force par unité de surface agissant sur une la facette de normale \vec{e}_j dans la direction i . La figure 5.4 illustre cette signification. Bien sûr le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est en général différent en chaque point \vec{x} du milieu continu.

Si l'on combine l'équilibre en rotation (5.18) et l'existence du tenseur des contraintes (5.24-5.26), on obtient :

$$\vec{e}_1 \wedge (\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3) + \quad (5.31)$$

$$\vec{e}_2 \wedge (\sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3) + \quad (5.32)$$

$$\vec{e}_3 \wedge (\sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3) = \vec{0} \quad (5.33)$$

d'où on tire

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (5.34)$$

Autrement dit, le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique. Sous formes intrinsèque et indicielle, on écrira

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^T \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (5.35)$$

Cette propriété de symétrie des contraintes est aussi appelée réciprocité des contraintes de cisaillement. Elle est illustrée sur la figure 5.5 qui représente deux facettes orthogonales au même

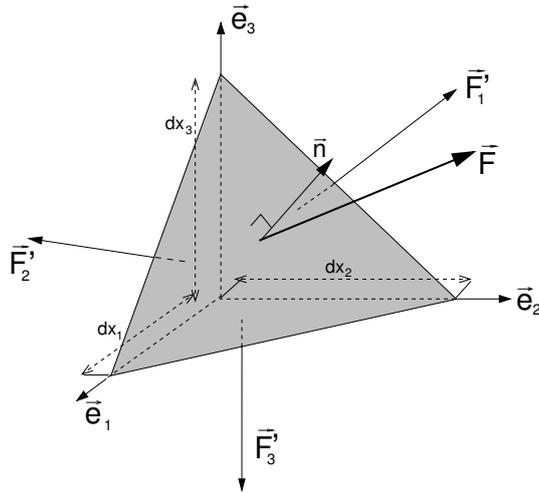


FIG. 5.3 –

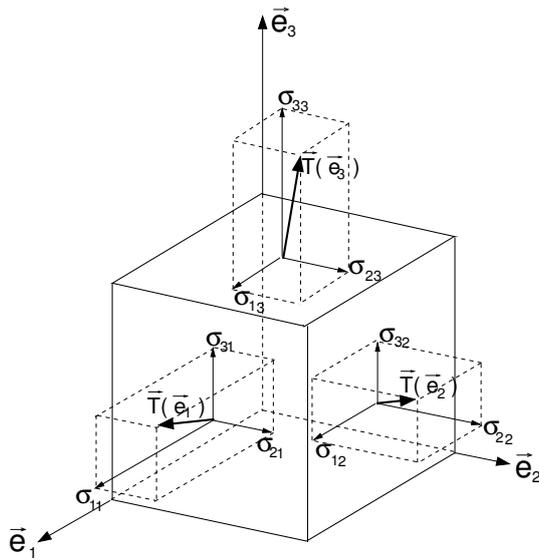


FIG. 5.4 –

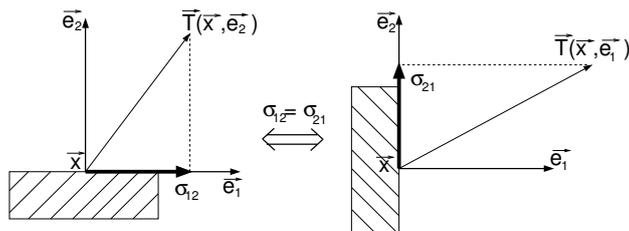


FIG. 5.5 –

point \vec{x} . La composante 1 du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale \vec{e}_2 est égale à la composante 2 du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale \vec{e}_1 .

Finalement, l'équation du mouvement (5.40), s'écrit en terme des contraintes :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho a_1 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho a_2 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho a_3 \quad (5.38)$$

Sous formes intrinsèque et indicielle, les relations s'écrivent :

$$\text{div} \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{a} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho a_i \quad (5.39)$$

5.2 Introduction du tenseur des contraintes par le principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles est une formulation intégrale équivalente aux équations locales (5.39) et (5.30).

Le principe des puissances virtuelles intervient également en mécanique des solides indéformables[6] où il est équivalent au principe fondamental de la dynamique. Ce principe s'énonce comme suit : la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\delta \mathcal{P}^a$ est égale à la différence des puissances virtuelles des efforts extérieurs $\delta \mathcal{P}^e$ et intérieurs $\delta \mathcal{P}^i$ quelque soit le champ de vitesse virtuelle $\delta \vec{v}$:

$$\delta \mathcal{P}^a = \delta \mathcal{P}^e - \delta \mathcal{P}^i \quad \forall \delta \vec{v} \quad (5.40)$$

Ce principe reste le même en mécanique des milieux continus mais la définition des différentes puissances doit être revue. Certains ouvrages [6, 7] écrivent le principe des puissance virtuelles comme $\delta \mathcal{P}^a = \delta \mathcal{P}^e + \delta \mathcal{P}^i$ car une convention de signe opposée est choisie dans la définition de la puissance intérieure. Nous avons opté pour la forme (5.40), très prisée chez les anglo-saxons, car elle permet d'interpréter plus facilement les transferts de puissance, comme nous le verrons à la section 5.2.2 et dans le chapitre sur la thermodynamique et les lois de comportement, chapitre 8.

5.2.1 Définition des puissances virtuelles

La puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit

$$\delta \mathcal{P}^a = \int_v \rho \vec{a} \cdot \delta \vec{v} dv \quad (5.41)$$

où $\delta \vec{v}$ est un champ de vitesse virtuelle c'est-à-dire un champ de vitesse quelconque à l'instant considéré. La puissance virtuelle des efforts extérieurs fournie via le volume ou via la surface extérieure :

$$\delta \mathcal{P}^e = \int_v \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dv + \int_{\partial v} \vec{T} \cdot \delta \vec{v} ds \quad (5.42)$$

La puissance virtuelle intérieure s'écrit

$$\delta \mathcal{P}^i = \int_v \bar{\sigma} : \bar{D}(\delta \vec{v}) dv \quad (5.43)$$

où le taux de déformation virtuelle est donné par (voir section 3.8)

$$\overline{\overline{D}}(\delta\vec{v}) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}}}\delta\vec{v} + (\overline{\overline{\text{grad}}}\delta\vec{v})^T) \quad (5.44)$$

C'est sur le signe devant l'intégrale (5.43) que les ouvrages divergent. Ici, nous avons choisi le signe +. L'expression de la puissance intérieure ci-dessus permet de démontrer le théorème suivant

Théorème 5.1 *Le principe des puissances virtuelles :*

$$\delta\mathcal{P}^a = \delta\mathcal{P}^e - \delta\mathcal{P}^i \quad \forall \delta\vec{v} \quad (5.45)$$

est équivalent aux équations locales (5.39) et (5.30), rappelées ci-dessous

$$\vec{d}\text{iv}\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{a} \text{ sur } v \quad \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } \partial v \quad (5.46)$$

Pour démontrer ce théorème, transformons l'expression de la puissance virtuelle intérieure :

$$\delta\mathcal{P}^i = \int_v \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}(\delta\vec{v}) dv = \int_v \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) dv \quad (5.47)$$

$$= \int_v \sigma_{ij} \delta v_{i,j} dv \quad (5.48)$$

$$= \int_v (\sigma_{ij} \delta v_{i,j})_{,j} - \sigma_{i,j} \delta v_{i,j} dv \quad (5.49)$$

$$= \int_{\partial v} \sigma_{ij} n_j \delta v_i ds - \int_v \sigma_{i,j} \delta v_i dv \quad (5.50)$$

$$= \int_{\partial v} (\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \delta\vec{v} ds - \int_v \vec{d}\text{iv}\overline{\overline{\sigma}} \cdot \delta\vec{v} dv \quad (5.51)$$

Pour obtenir (5.48), nous avons utilisé la symétrie du tenseur des contraintes et pour (5.50) le théorème de Gauss-Ostrogradski (2.46). Le principe des puissances virtuelles s'écrit maintenant

$$\int_v \rho\vec{a} \cdot \delta\vec{v} dv = \int_v \vec{f} \cdot \delta\vec{v} dv + \int_{\partial v} (\vec{T} - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \delta\vec{v} ds + \int_v \vec{d}\text{iv}\overline{\overline{\sigma}} \cdot \delta\vec{v} dv \quad \forall \delta\vec{v} \quad (5.52)$$

En jouant sur le caractère arbitraire de la vitesse virtuelle, on obtient (5.46), ce qui conclut la démonstration du théorème.

5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique s'obtient en appliquant le principe des puissances virtuelles au mouvement réel c'est-à-dire en posant $\delta\vec{v} = \vec{v}$.

Théorème 5.2 *La variation de l'énergie cinétique du système est égale à la somme des puissances intérieures et extérieures du système :*

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}^e - \mathcal{P}^i = \int_v \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_{\partial v} \vec{T} \cdot \vec{v} ds - \int_v \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}(\vec{v}) dv \quad (5.53)$$

où l'énergie cinétique est donnée par

$$K = \int_v \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dv \quad (5.54)$$

Le seul point à justifier pour la démonstration est le passage de la puissance des quantités d'accélération à la dérivée de l'énergie cinétique, à savoir l'égalité

$$\int_v \rho\vec{a} \cdot \vec{v} dv = \frac{d}{dt} \int_v \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dv \quad (5.55)$$

Cette égalité provient du théorème 4.3 et de

$$\frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a} \quad (5.56)$$

Si l'on écrit le théorème de l'énergie cinétique sous la forme

$$\mathcal{P}^e = \frac{dK}{dt} + \mathcal{P}^i \quad (5.57)$$

on obtient une interprétation mécanique intéressante de ce théorème : la puissance extérieure fournie à un milieu continu se transforme pour partie en mouvement (variation de l'énergie cinétique), et pour partie en déformation. La puissance intérieure est liée à la déformation du milieu car elle fait intervenir le taux de déformation $\overline{\overline{D}}$. On peut montrer que si le milieu se déplace de manière rigide, la puissance intérieure est nulle (car le taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ est identiquement nul en tout point).

Considérons différents cas :

- Si le milieu est indéformable, la puissance intérieure sera toujours nulle (excepté si plusieurs corps indéformables interagissent[6]) auquel cas toute la puissance extérieure fournie sert à mettre en mouvement le corps. C'est le cas d'une boule de billard suite à l'impact de la queue. L'impulsion fournie est transformée en mouvement et aucune déformation n'apparaît ;
- Le second cas limite est celui où toute la puissance extérieure fournie est transformée en puissance intérieure sans changement de l'énergie cinétique du milieu. Imaginons une balle en caoutchouc comprimée lentement dans les doigts d'une main. La puissance extérieure fournie se transforme en déformation et très peu en énergie cinétique ;
- Le cas le plus fréquent est celui dans lequel la puissance extérieure est transmise à la fois sous forme de variation de l'énergie cinétique et de déformation. C'est le cas dans un crash voiture, les modifications d'énergie cinétique et les déformations mises en jeu sont toutes deux importantes ;
- En conclusion, la répartition entre mouvement et déformation dépend de la rapidité avec laquelle la sollicitation est appliquée et la capacité ou non du milieu de se déformer facilement.

Notons finalement que dans le cas des solides indéformables, la puissance intérieure n'intervient que par le biais de ressorts placés entre les corps ou dans les relations de contact-frottement.

5.2.3 La dualité en mécanique

Il est intéressant de comparer l'expression de la puissance extérieure pour le point matériel, le solide indéformable et le milieu continu. Dans la mécanique de point matériel, la cinématique est complètement définie par un seul vecteur : la position du point au cours du temps ou sa vitesse \vec{V} . Concernant, les efforts, il n'y également qu'un seul vecteur capable de faire évoluer la position du point : la résultante des forces \vec{R} au point considéré. La puissance développée par cette force dans la vitesse est donnée par le produit scalaire :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \vec{R} \cdot \vec{V} \quad (5.58)$$

Passons maintenant à la mécanique des solides indéformables. La cinématique d'un corps indéformable est complètement fixée par l'évolution dans le temps de deux quantités vectorielles : la vitesse du centre de gravité du corps, \vec{V}_o , et le vecteur rotation de ce corps autour de son centre de gravité, $\vec{\Omega}_o$ ¹. Quels sont maintenant, les efforts permettant de faire évoluer cette

1. Les notations sont en accord avec le photocopié de mécanique des solides[6].

cinématique? Et bien ce sont deux vecteurs également! Le premier est la résultante des forces \vec{R} appliquées sur le corps et \vec{m}_o le moment résultant calculé par rapport au centre de gravité. La puissance développée par les efforts dans le mouvement s'écrit :

$$\mathcal{P}^{(e)} = \vec{R} \cdot \vec{V}_o + \vec{m}_o \cdot \vec{\Omega}_o \quad (5.59)$$

Passons maintenant à la mécanique des milieux continus. La cinématique est donnée par un nombre infini de paramètres : la vitesse \vec{v} en chaque point du domaine v^2 . Les efforts possibles peuvent être également infiniment variés : il a des forces volumique, \vec{f} , en chaque point et des forces surfaciques, \vec{F} , en chaque point de la surface. La puissance extérieure développée est une intégrale

$$\mathcal{P}^{(e)} = \int_v \vec{f} \cdot \vec{v} dv + \int_{\partial v} \vec{F} \cdot \vec{v} ds \quad (5.60)$$

Les équations (5.58), (5.59) et (5.60) donnent l'expression de la puissance extérieure pour des cinématiques de plus en plus riches (du point matériel au milieu continu en passant par le solide indéformable). Ces trois puissances s'écrivent comme un produit entre quantités cinématiques et effort pour donner chaque fois un scalaire. C'est ce que l'on appelle une dualité. Mettre deux "espaces" en dualité, c'est simplement définir un produit qui pour un couple quelconque composé d'un élément du premier espace et un élément du deuxième espace rend un scalaire. La puissance met en dualité l'espace des vitesses et celui des efforts. Nous nous sommes intéressé à la puissance extérieure mais des conclusions similaires sont obtenues avec la puissance intérieure ou des quantités d'accélération.

5.3 Propriétés locales du tenseur des contraintes

5.3.1 Contrainte normale et contrainte de cisaillement

Soit, $\bar{\bar{\sigma}}$, le tenseur des contraintes en un point, \vec{x} , du domaine. Ce tenseur permet de donner pour toute facette de normale unitaire, \vec{n} , le vecteur contrainte agissant sur cette facette.

$$\vec{T} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \quad (5.61)$$

Ce vecteur peut-être décomposé en une composante σ selon la normale et un vecteur tangentiel, $\vec{\tau}$, à la facette

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau} \quad (5.62)$$

La contrainte normale et la contrainte de cisaillement se calcule comme suit à partir de \vec{T} :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} \quad \vec{\tau} = \vec{T} - \sigma \vec{n} \quad (5.63)$$

On peut également décomposer la contrainte de cisaillement selon son module τ et sa direction \vec{t} :

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (5.64)$$

Cette décomposition est illustrée sur la figure 5.6. Par définition, σ peut être de signe quelconque alors que τ est toujours supérieure ou égal à zéro puisqu'il s'agit du module de $\vec{\tau}$. Pour une facette donnée, on distingue différents cas :

- Si $\sigma > 0$ on dit que la facette est en traction, en effet le vecteur contrainte "tire" sur la facette puisqu'il est dirigé selon la normale à la facette ;
- Si $\sigma < 0$ on dit que la facette est en compression, en effet le vecteur contrainte "pousse" sur la facette ;

2. Ne pas confondre v le domaine actuel occupé par le milieu et \vec{v} la vitesse en chaque point de ce milieu.

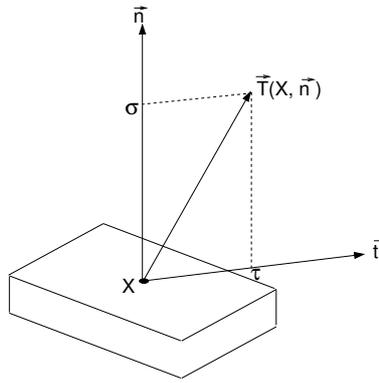


FIG. 5.6 –

- Si $\tau = 0$, on dit que la facette est soumise à de la traction pure (si $\sigma > 0$) ou de la compression pure (si $\sigma < 0$) ;
- Si $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$ on dit que la facette est soumise à du cisaillement pur ;
- Si $\sigma = 0$ et $\tau = 0$ on dit que la facette est libre (ou non chargée).

5.3.2 Contraintes normales principales

Le tenseur des contraintes étant un tenseur symétrique d'ordre 2, nous savons (voir section 2.8.6) qu'il existe une base privilégiée dite base propre (ou base principale) dans laquelle les composantes du tenseur forment une matrice diagonale. Cette base propre sera notée $(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$:

$$[\bar{\sigma}]_{(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Les trois facettes dont les normales sont un des vecteurs de la base $(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$ ne subissent aucun cisaillement et sont donc en traction ou compression pure. Par exemple, si $\sigma_{II} > 0$, la facette de normale \vec{e}_{II} est soumise à de la traction pure. Pour justifier le fait que les facettes selon \vec{e}_I, \vec{e}_{II} ou \vec{e}_{III} ne sont soumises à aucun cisaillement, il suffit de montrer que le vecteur contrainte sur la facette, disons \vec{e}_I , est bien aligné avec \vec{e}_I :

$$\vec{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{e}_I = \sigma_I \vec{e}_I \quad (5.66)$$

La relation ci-dessus est vraie puisque \vec{e}_I est un vecteur propre (voir la définition d'un vecteur propre en (2.37)).

5.3.3 Représentation des contraintes : le tricercler de Mohr

Les cercles de Mohr permettent de visualiser le tenseur des contraintes en un point sous la forme de trois cercles. Plaçons nous dans les axes propres et prenons une facette quelconque de normale \vec{n} dont les composantes sont n_I, n_{II}, n_{III} dans la base propre. Le vecteur contrainte agissant sur cette facette est :

$$[\vec{T}]_{(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_I \\ n_{II} \\ n_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I n_I \\ \sigma_{II} n_{II} \\ \sigma_{III} n_{III} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

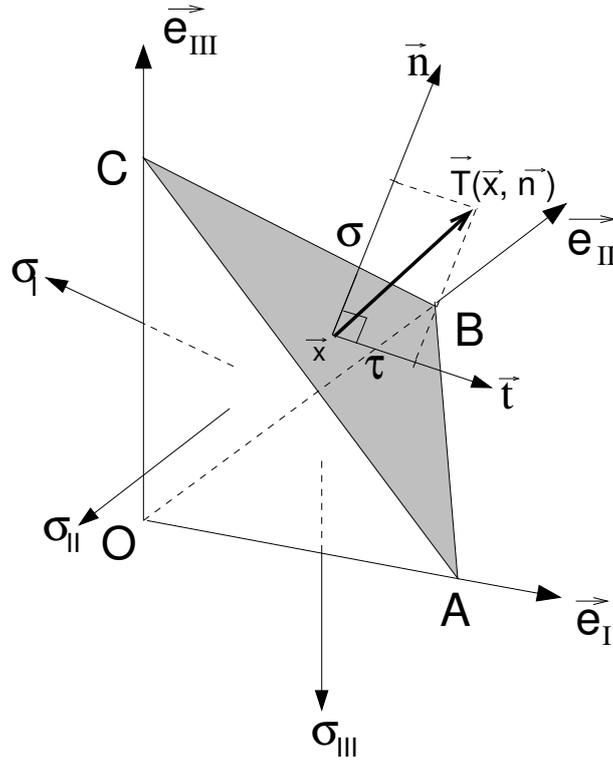


FIG. 5.7 –

Les contraintes normales et tangentielles valent :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_I n_I^2 + \sigma_{II} n_{II}^2 + \sigma_{III} n_{III}^2 \quad (5.68)$$

$$\tau^2 = \vec{T} \cdot \vec{T} - \sigma^2 = (\sigma_I n_I)^2 + (\sigma_{II} n_{II})^2 + (\sigma_{III} n_{III})^2 - \sigma^2 \quad (5.69)$$

Si l'on tient compte de la relation

$$n_I^2 + n_{II}^2 + n_{III}^2 = 1 \quad (5.70)$$

et que l'on résout (5.68), (5.69), (5.70) par rapport à n_I, n_{II}, n_{III} , on trouve

$$n_I^2 = \frac{(\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I)} \quad (5.71)$$

$$n_{II}^2 = \frac{(\sigma_{III} - \sigma)(\sigma_I - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_{III} - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{II})} \quad (5.72)$$

$$n_{III}^2 = \frac{(\sigma_I - \sigma)(\sigma_{II} - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III})} \quad (5.73)$$

Ces formules permettent de déterminer l'orientation de la facette sur laquelle agissent une contrainte normale σ et une contrainte tangentielle τ . Si l'on considère le cas d'un ensemble de facettes telles que $n_I = \text{constante}$, la première équation (5.68) donne

$$(\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma) + \tau^2 = (n_I)^2 (\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I) \quad (5.74)$$

qui peut aussi s'écrire

$$(\sigma - a_I)^2 + \tau^2 = R_I^2 \quad (5.75)$$

$$a_I = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \quad (5.76)$$

$$R_I^2 = (n_I)^2 (\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I) + \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (5.77)$$

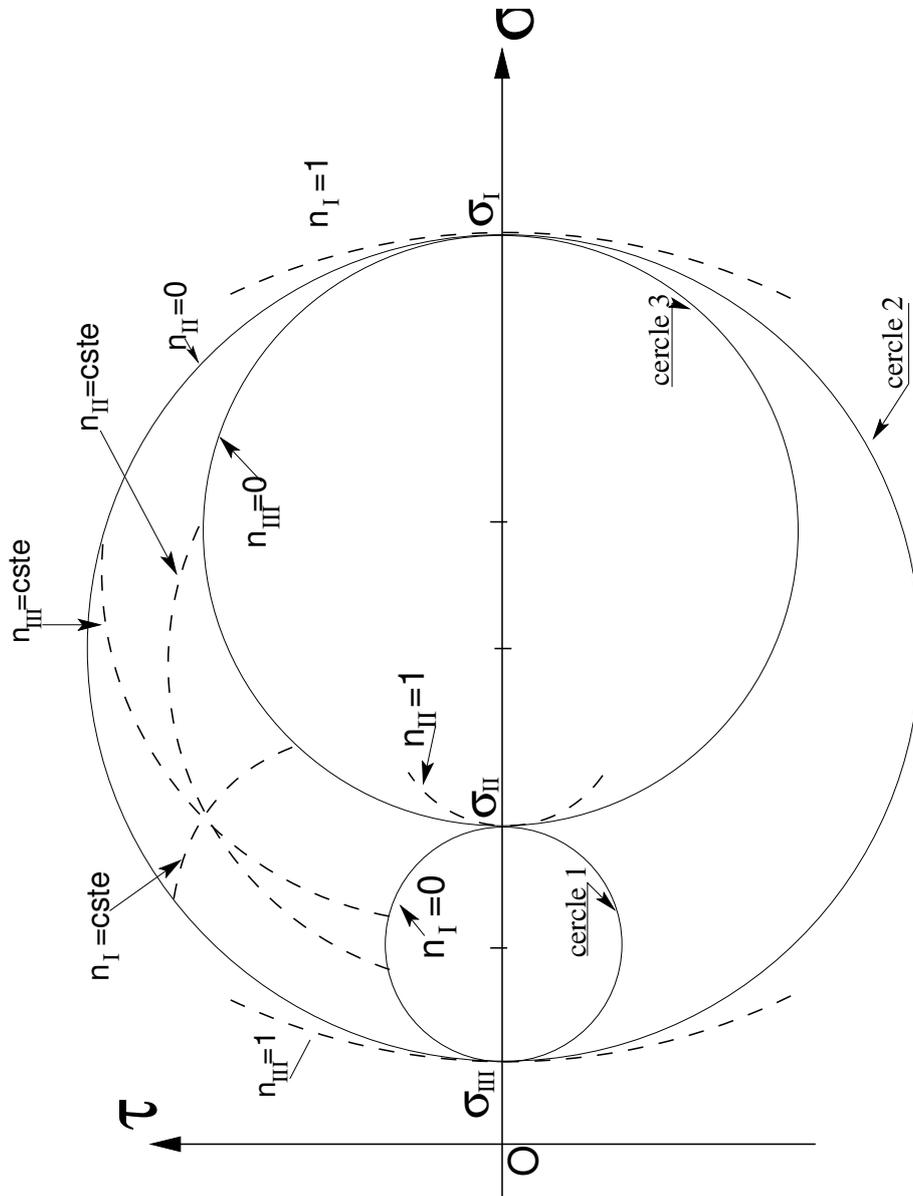


FIG. 5.8 –

Il s'agit de l'équation d'un cercle dans le plan (σ, τ) de centre $(a_I, 0)$ et de rayon R_I . En particulier pour un ensemble de facettes d'axes \vec{e}_I pour lesquelles $n_I = 0$, on obtient le cercle I tracé sur la figure 5.8. Ainsi, lorsqu'on fait pivoter une facette autour de l'axe \vec{e}_I , le point (σ, τ) représentant l'état de contrainte sur cette facette, parcourt le cercle I. De manière similaire, on trouve pour des facette telles que $n_{II} = \text{constante}$

$$(\sigma - a_{II})^2 + \tau^2 = R_{II}^2 \quad (5.78)$$

$$a_{II} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (5.79)$$

$$R_{II}^2 = (n_{II})^2(\sigma_{III} - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{II}) + \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \quad (5.80)$$

ce qui donne le cercle II lorsque $n_{II} = 0$. Enfin pour les facettes telles que $n_{III} = \text{constante}$

$$(\sigma - a_{III})^2 + \tau^2 = R_{III}^2 \quad (5.81)$$

$$a_{III} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \quad (5.82)$$

$$R_{III}^2 = (n_{III})^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III}) + \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \quad (5.83)$$

ce qui donne le cercle III lorsque $n_{III} = 0$. La construction de la figure 5.8 porte le nom de "tricerclé de Mohr". Quelles que soient les valeurs de n_I , n_{II} et n_{III} , on montre facilement que le point (σ, τ) restera dans la zone hachurée.

- Si une des composantes de la normale est nulle, le point (σ, τ) se trouve sur un des cercles ;
- Si deux des composantes sont nulles (autrement dit la troisième composante vaut 1) le point (σ, τ) se trouve sur l'axe σ soit en $(\sigma_I, 0)$, $(\sigma_{II}, 0)$ ou $(\sigma_{III}, 0)$. Par exemple, si $n_I = n_{III} = 0$ et $n_{II} = 1$, alors $(\sigma, \tau) = (\sigma_{II}, 0)$;
- D'après la figure 5.8, on trouve que le cisaillement maximal agissant sur une facette est

$$\tau = (\sigma_I - \sigma_{III})/2 \quad (5.84)$$

Sur cette facette $\sigma = (\sigma_I + \sigma_{III})/2$. En injectant, τ et σ dans (5.68) et (5.69), on voit que la facette sur laquelle agit le cisaillement maximal est donnée par $n_I^2 = n_{III}^2 = 1/2$ et $n_{II} = 0$. La normale est donc la bissectrice des vecteurs \vec{e}_I et \vec{e}_{III} .

5.3.4 État plan de contrainte

Le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ est un tenseur de contraintes planes dans le plan x_3 si

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (5.85)$$

Tout vecteur contrainte \vec{T} sera alors situé dans le plan $x_3 = 0$. D'une manière générale, un tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ est un tenseur de contraintes planes si, et seulement si, l'une des contraintes normales principales (une des valeurs propres en bref) est nulle. Le plan des contraintes planes est alors donné par la direction propre associée.

5.3.5 Tenseur des contraintes sphérique

Un tenseur des contraintes est dit sphérique si ces trois valeurs propres sont identiques. Dans ce cas, toutes les facettes ne sont qu'en traction ou compression pure selon le signe de la valeur propre. Un liquide au repos (ou un fluide parfait même en mouvement) est soumis en chaque point à un tenseur des contraintes sphérique dont la valeur propre est l'opposée de la pression.

5.3.6 Tenseur des contraintes uniaxial

Un tenseur des contraintes est dit uniaxial si deux de ses valeurs propres sont nulles. C'est l'hypothèse classique faite en chaque point dans une éprouvette mise en traction. La valeur propre non nulle est dans ce cas la force appliquée divisée par la section de l'éprouvette.

5.3.7 Tenseur des contraintes de cisaillement simple

Un tenseur des contraintes est un tenseur de cisaillement simple si, et seulement si, l'une des contraintes principales est nulle, les deux autres étant opposées.

Chapitre 6

Théorie de l'élasticité linéaire isotrope

On s'intéresse à l'évolution d'un système mécanique qui, à partir d'un état initial non chargé (les contraintes sont nulles en tout point) va atteindre un nouvel état d'équilibre sous l'action de sollicitations extérieures. Ces sollicitations extérieures peuvent être :

- des forces volumiques (par exemple la gravité ou des forces de Coriolis) ;
- des vecteurs contraintes appliqués en surface ;
- des déplacements imposés en surface.

On se place dans les hypothèses suivantes :

- l'hypothèse des petites perturbations est applicable : l'état final est très proche de l'état initial et le gradient des déplacements est faible ;
- les effets dynamiques ne sont pas pris en compte (on suppose que le chargement est imposé lentement) ;
- le comportement du matériau est élastique isotrope.

6.1 Les équations

6.1.1 La cinématique

L'hypothèse de petites perturbations étant d'application, on ne doit pas distinguer le domaine initial V et le domaine final v et on peut écrire toutes les équations sur le domaine V dont la surface sera notée S . La partie de la surface sur laquelle des déplacements \vec{u}_d sont imposés sera notée S_u . Finalement, le point courant sera noté \vec{x} .

Les équations de la cinématique s'écrivent :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\text{grad}}}\vec{u} + (\bar{\bar{\text{grad}}}\vec{u})^T) \text{ sur } V \quad (6.1)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_d \text{ sur } S_u \quad (6.2)$$

La première équation donne la relation entre déformation HPP et déplacement en tout point du domaine. Cette équation est souvent appelée équation de compatibilité. La seconde équation fixe les déplacements là où ils sont imposés. Cette équation est souvent appelée condition limite en déplacement. La figure 6.1 illustre différents types de conditions en déplacement.

Il est important de noter que sur la surface S_u toutes les composantes du déplacements peuvent être fixées ou seulement quelques unes. Par exemple, si seule la composante 2 du déplacement est nulle sur S_u on écrira

$$u_2 = 0 \text{ sur } S_u \quad (6.3)$$

L'expression générale (6.2) doit donc être aménagée pour chaque cas. Il se peut également que la surface S_u doive être décomposée en différentes parties : S_{u1}, S_{u2}, \dots

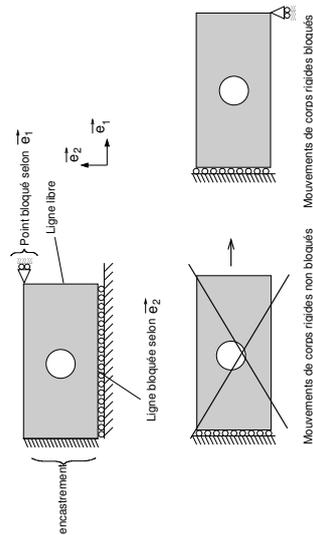


FIG. 6.1 –

6.1.2 Equilibre

Les équations d'équilibre¹ s'écrivent :

$$\operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}} + \vec{f}_d = \vec{0} \text{ sur } V \quad (6.4)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \text{ sur } S_T \quad (6.5)$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^T \text{ sur } V \quad (6.6)$$

La surface S_T est la partie de la surface extérieure sur laquelle des vecteurs contraintes \vec{T}_d sont imposés. Les équations (6.4) et (6.5) découlent de la loi de bilan de la quantité de mouvement et l'équation (6.6) découle de la loi de bilan du moment cinétique (symétrie du tenseur des contraintes). Les autres lois de bilan (masse et énergie) n'apportent rien d'intéressant à la formulation d'un problème d'élasticité.

L'équation (6.5) porte aussi le nom de condition limite en contrainte². Dans le cas d'une surface libre, le vecteur contrainte \vec{T}_d est nul. De même, tout comme c'était le cas pour les conditions limite en déplacement il peut arriver que seules certaines composantes du vecteur contrainte $\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$ soient fixées. Par exemple si seule la première composante de ce vecteur est nulle sur S_T on écrira :

$$(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_1 = 0 \text{ sur } S_T \quad (6.7)$$

6.1.3 Comportement élastique isotrope

Le comportement relie la contrainte $\bar{\bar{\sigma}}$ à la déformation $\bar{\bar{\epsilon}}$ en chaque point du domaine :

$$\bar{\bar{\sigma}} = f(\bar{\bar{\epsilon}}) \text{ sur } V \quad (6.8)$$

Un comportement élastique isotrope est complètement décrit par deux paramètres matériaux scalaires : les deux coefficients de Lamé λ et μ . Le comportement élastique isotrope s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \operatorname{Tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}} \quad \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (6.9)$$

1. pour bien les distinguer les inconnues des données du problèmes, ces dernières sont indicées avec d.
2. attention, une condition limite en contrainte indique que le vecteur contrainte est imposé et non le tenseur des contraintes.

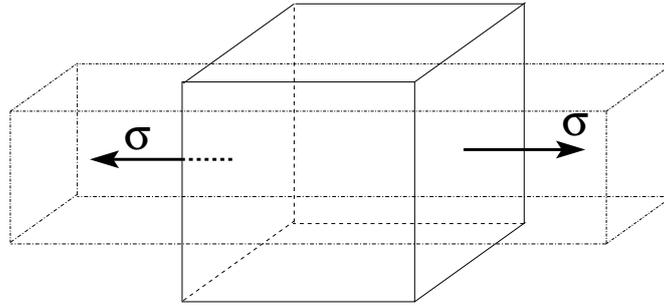


FIG. 6.2 –

Cette loi est appelée loi de Hooke. Plutôt que d'utiliser les coefficients de Lamé, on peut décrire le comportement en terme du module de Young, E , et du coefficient de Poisson ν :

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (6.10)$$

Les coefficients de Lamé sont liés au module de Young et au coefficient de Poisson par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.12)$$

et réciproquement

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (6.13)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6.14)$$

En inversant la relation (6.10), on obtient les déformations en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6.15)$$

Considérons un petit élément de matière, figure 6.2, et sollicitons-le par un tenseur des contraintes uniaxial, défini section 5.3.6, selon l'axe x :

$$[\bar{\sigma}]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

La réponse en déformation est

$$[\bar{\varepsilon}]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

La déformation selon l'axe x est égale à la contrainte imposée divisée par le module de Young (la raideur). Cette déformation est positive et correspond donc à un étirement selon l'axe x . On note que les déformations selon les axes y et z sont négatives et correspondent à un rétrécissement de la section selon les axes y et z . C'est l'effet Poisson. On note que si le coefficient de Poisson

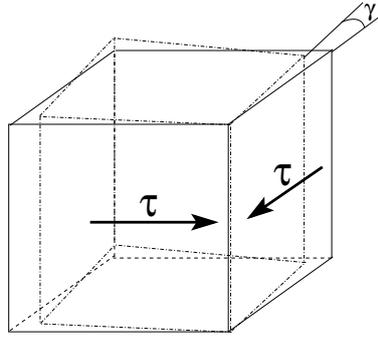


FIG. 6.3 –

est nul, la section n'est pas réduite. On montre par des arguments de stabilité que le coefficient ne peut dépasser $1/2$. Pour cette valeur, le volume est conservé lors de l'étirement. Finalement, remarquons que la traction sur l'élément de volume ne produit aucun cisaillement. Il n'en est pas de même si vous tirez sur un barreau fait d'un matériau composite. Ce matériau n'est pas isotrope et la traction induit du cisaillement.

Sollicitons maintenant notre élément de volume avec un tenseur de cisaillement simple (section 5.3.7), illustré sur la figure 6.3

$$[\sigma]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

La déformation correspondante est

$$[\varepsilon]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1+\nu)}{E}\sigma & 0 \\ \frac{(1+\nu)}{E}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\mu}\sigma & 0 \\ \frac{1}{2\mu}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

On note que la contrainte de cisaillement n'entraîne aucune elongation. Par contre un changement d'angle entre les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y intervient :

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma}{\mu} \quad (6.20)$$

Le coefficient de Lamé μ joue donc le rôle d'une raideur de cisaillement. C'est pourquoi le coefficient μ est souvent appelé module de cisaillement.

Soumettons maintenant notre volume élémentaire à un tenseur de contraintes sphérique de pression p (voir section 5.3.5 et figure 6.4) :

$$[\sigma]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

La pression p est un nombre positif mais comme elle pousse sur la surface extérieure du volume, un signe moins apparaît. La déformation correspondante est :

$$[\varepsilon]_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{bmatrix} \frac{-p(1-2\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p(1-2\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p(1-2\nu)}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p}{3K} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

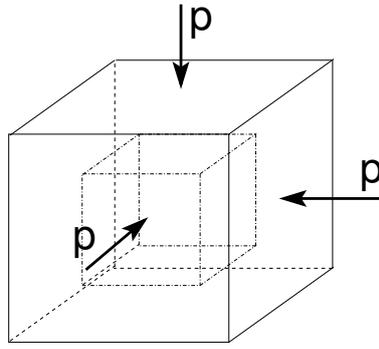


FIG. 6.4 –

où l'on a introduit le module de compressibilité

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (6.23)$$

On note que le cube est réduit de la même manière dans les trois directions (isotropie!). La réduction relative de volume est la trace du tenseur des déformation (voir section 3.9.2)

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = -\frac{p}{K} \quad (6.24)$$

Le module de compressibilité, K , relie la pression au changement de volume : c'est une "raideur volumique". Plus K est élevé moins le volume est réduit pour une pression donnée.

Voici deux points importants à retenir sur les matériaux élastiques isotropes :

- Dans le comportement élastique isotrope les cisaillements et élongations sont tout à fait découplés. Ce n'est pas le cas dans les milieux anisotropes (exemple : les composites) ;
- Le comportement n'est caractérisé que par deux paramètres scalaires. Ces deux paramètres peuvent être au choix : le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (ν), les deux coefficients de Lamé (λ et μ) ou les modules de cisaillement (μ) et de compressibilité (K).
- Notez que l'on a forcément $-1 \leq \nu \leq 1/2$.

La loi de Hooke peut se mettre sous la forme

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\varepsilon}} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad C_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (6.25)$$

ou sous forme inverse

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\sigma}} \quad \varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\sigma_{kl} \quad D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (6.26)$$

Le tenseur d'ordre 4 $\bar{\bar{C}}$ est le tenseur d'élasticité et $\bar{\bar{D}}$ son inverse. Les tenseurs $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{D}}$ sont des tenseurs d'ordre 4 et s'expriment donc à l'aide de $3^4 = 81$ composantes. Il n'y a en fait que 36 composantes indépendantes car ces tenseurs possèdent les symétries suivantes (qui découlent de la symétrie des tenseurs $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\sigma}}$ ainsi que de l'existence d'une énergie) :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad D_{ijkl} = D_{klij} = D_{jikl} = D_{ijlk} \quad (6.27)$$

Les 36 composantes peuvent être rangées dans un tableau 6x6 et les lois (6.25) et (6.26) s'écrivent alors

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

matériau	ν	E (MPa)	μ (MPa)	K (MPa)
acier	0.3	205000	78800	170800
aluminium	0.33	70000	26300	68600
verre ordinaire	0.22	60000	24600	35700
béton	0.2	30000	12500	16667
plomb	0.45	17000	5860	56700
plexiglas (résine acrylique)	0.36	3000	1100	3570
bakélite (polypropylène)	0.37	1000	365	1280
caoutchouc	0.5	2	0.67	infini!

TAB. 6.1 –

Équations cinématiques		
compatibilité		
$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}}\vec{u} + (\overline{\text{grad}}\vec{u})^T)$	sur V	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
conditions limites en déplacement		
$\vec{u} = \vec{u}_d$	sur S_u	$u_i = u_{di}$
Équations d'équilibre		
équilibre en volume		
$\text{div}\bar{\sigma} + \vec{f}_d = \vec{0}$	sur V	$\sigma_{ij,j} + f_{di} = 0$
équilibre en surface (conditions limites en contrainte)		
$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d$	sur S_T	$\sigma_{ij}n_j = T_{di}$
symétrie des contraintes		
$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T$	sur V	$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Équations de comportement		
$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon})\bar{I} + 2\mu\bar{\varepsilon}$	sur V	$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$

TAB. 6.2 – Les équations définissant un problème d'élasticité linéaire isotrope

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Compte tenu du caractère isotrope de la loi de Hooke, les tableaux 6×6 seront les mêmes ci-dessus quelle que soit la base orthonormée choisie. Par exemple, ils seront les mêmes pour des coordonnées cylindriques ou sphériques.

Pour terminer, le tableau 6.1 donne les modules élastiques approximatifs pour quelques matériaux usuels. La plupart des métaux usuels sont, en bonne approximation, isotropes. Il en va de même pour la pierre, le béton, le verre, ... et pour les résines armées de fibres réparties uniformément dans toutes les directions. Le module de compressibilité du caoutchouc est infini puisque ce matériau est incompressible.

6.1.4 Récapitulatif

Le tableau 6.2 résume les équations à notre disposition pour résoudre un problème d'élasticité linéaire isotrope en notation intrinsèque et indicielle.

Les frontières S_u et S_T doivent vérifier les conditions suivantes pour *chaque* direction de l'espace :

$$S_u \cap S_T = \emptyset \quad (6.30)$$

$$S_u \cup S_T = S \quad (6.31)$$

La première relation indique qu'en chaque point de la surface S_u , on ne peut prescrire à la fois un déplacement et un vecteur contrainte à moins que cela ne soit pour des composantes différentes. Par exemple, sur une surface de normale \vec{e}_1 , on ne peut fixer à la fois T_1 et u_1 . Par contre, on peut fixer T_1 et u_2 . La seconde relation indique que en chaque point de la surface S et pour chaque composante, il faut prescrire soit le déplacement, soit le vecteur contrainte. En clair, on ne peut sur une partie de s ne rien imposer.

Comptons le nombre d'équations et le nombre d'inconnues sur V . Le nombre d'inconnues sur V est :

- 3 pour \vec{u} ;
- 9 pour $\vec{\sigma}$;
- 9 pour $\vec{\varepsilon}$;
- soit un total de 21 inconnues.

Concernant les équations sur V , nous avons :

- 9 équations de compatibilité, (6.1) ;
- 3 équations d'équilibre (6.4) ;
- 3 conditions de symétrie du tenseur des contraintes (6.6) ;
- 9 équations de comportement (6.9) ;
- soit un total de 24 équations. En réalité, seules 21 de ces équations sont indépendantes car compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes, seules 6 équations de comportement sont nécessaires.

Les données de $\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d$ forment ce que l'on appelle le chargement. Toutes les équations apparaissant dans le problème d'élasticité sont linéaires. Ainsi si le chargement double, la solution double dans toutes ses quantités (déplacement, déformation et contraintes). De même, si $(\vec{u}, \vec{\varepsilon}, \vec{\sigma})_1$ est la solution du problème pour un chargement $(\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d)_1$ et $(\vec{u}, \vec{\varepsilon}, \vec{\sigma})_2$ est la solution pour un autre chargement $(\vec{u}_d, \vec{T}_d, \vec{f}_d)_2$. La solution correspondant à la somme des deux chargement est la somme des solutions 1 et 2 par le principe de superposition qui s'applique à tout système linéaire.

Le problème d'élasticité linéaire admet toujours une solution unique pour autant que les modes rigides aient été fixés.

6.2 Théorèmes de l'énergie potentielle

Nous allons montrer que les solutions en déplacement et en contrainte vérifient des principes de minimum. D'abord, nous définirons la notion d'admissibilité :

- on dira qu'un champ de déplacement est cinématiquement admissible (CA en abrégé) si il vérifie toutes les équations cinématiques (voir tableau 6.2). En clair, ce champ vérifie les déplacements imposés.
- on dira qu'un champ de contrainte est statiquement admissible (SA) si il vérifie toutes les équations d'équilibre (voir tableau 6.2).

Si l'on dispose d'un champ de déplacement admissible et d'un champ de contrainte admissible, a-t-on la solution du problème d'élasticité? Non. Il faut en plus que le couple déformation-

contrainte vérifie les équations de comportement, tableau 6.2, que nous écrirons sous la forme³

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (6.32)$$

La loi de comportement ci-dessus est équivalente à

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ij}C_{ijkl}\epsilon_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = 0 \quad (6.33)$$

On vérifie en effet aisément que (6.32) entraîne (6.33) et vice-versa. Notons de plus que le premier membre de (6.33) est toujours plus grand ou égal à zéro pour un couple $(\bar{\epsilon}, \bar{\sigma})$ arbitraire. La vérification du comportement en chaque point du domaine est donc équivalente à l'annulation de l'intégrale de (6.33) sur le domaine :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad \forall \vec{x} \in V \Leftrightarrow \int_V \frac{1}{2}\epsilon_{ij}C_{ijkl}\epsilon_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}dV = 0 \quad (6.34)$$

L'intégrale ci-dessus étant toujours plus grande ou égale à zéro quel que soit le couple $(\bar{\epsilon}, \bar{\sigma})$, on a le théorème suivant :

Théorème 6.1 *Le problème d'élasticité résumé dans le tableau 6.2 est identique au problème suivant : trouver le champ de déplacement admissible (\vec{u} CA) et le champ de contrainte admissible ($\bar{\sigma}$ SA) qui minimise :*

$$\min_{\vec{u} \text{ CA}, \bar{\sigma} \text{ SA}} \int_V \left(\frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\vec{u})C_{ijkl}\epsilon_{ij}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u}) \right) dV \quad (6.35)$$

L'intégrale est appelée erreur en relation de comportement car elle est non nulle si le couple $(\bar{\epsilon}, \bar{\sigma})$ ne vérifie pas le comportement en chaque point du domaine.

Le dernier terme de l'intégrale (6.35) couple le champ de déplacement et le champ de contrainte. Compte tenu des propriétés d'admissibilité des déplacements et des contraintes, nous allons pouvoir éliminer ce couplage. Il vient

$$\int_V \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u})dV = \int_V \sigma_{ij}u_{i,j}dV \quad (6.36)$$

$$= \int_V (u_i\sigma_{ij})_{,j} - \sigma_{ij,j}u_i dV \quad (6.37)$$

$$= \int_S u_i\sigma_{ij}n_j dS + \int_V f_{di}u_i dV \quad (6.38)$$

$$= \int_{S_u} u_{di}\sigma_{ij}n_j dS + \int_{S_T} T_{di}u_i dS + \int_V f_{di}u_i dV \quad (6.39)$$

Chacune des égalités ci-dessus méritent d'être justifiées :

- (6.36) découle de la définition de la déformation (6.1) et de la symétrie du tenseur des contraintes (ce qui donne $\sigma_{ij}\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{j,i} = \sigma_{ij}u_{i,j}$);
- (6.37) est obtenu à l'aide de la formule de la divergence d'un produit ;
- (6.38) découle pour le premier terme du théorème de Gauss-Ostrogradski (2.46) et pour le second de l'équilibre en volume (6.4) ;
- (6.39) découle des conditions limites en déplacement (6.2) et en contrainte (6.5).

3. Les trois théorèmes que nous allons démontrer sont valable que le comportement soit isotrope ou non et même linéaire ou non.

Le découplage obtenu dans (6.2) permet de réécrire la minimisation (6.35) sous la forme

$$\min_{\vec{u} \text{ CA}, \vec{\sigma} \text{ SA}} W(\vec{u}) - W^*(\vec{\sigma}) \quad (6.40)$$

où l'on a défini l'énergie potentielle en déplacement $W(\vec{u})$ et l'énergie potentielle en contrainte $W^*(\vec{\sigma})$ par

$$W(\vec{u}) = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}) - \int_{S_T} T_{di} u_i dS - \int_V f_{di} u_i dV \quad (6.41)$$

$$W^*(\vec{\sigma}) = - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} dV + \int_{S_u} u_{di} \sigma_{ij} n_j dS \quad (6.42)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer deux théorèmes importants appelés théorèmes de l'énergie potentielle.

Théorème 6.2 *L'énergie potentielle d'un champ cinématiquement admissible est toujours au moins égale à celle d'un champ statiquement admissible. Il n'y a égalité que si le champ de déplacement et le champ de contrainte sont les champs solutions.*

Ceci découle du fait que $W(\vec{u}) - W^*(\vec{\sigma})$ est toujours positif ou égal à zéro quels que soient \vec{u} et $\vec{\sigma}$ admissibles.

Théorème 6.3 *Le champ de déplacement solution minimise l'énergie potentielle de tous les champs cinématiquement admissibles ; le champ des contraintes solution maximise l'énergie potentielle de tous les champs statiquement admissibles.*

Ceci découle du fait que (6.40) peut se réécrire comme deux problèmes indépendants :

$$\min_{\vec{u} \text{ CA}} W(\vec{u}) \quad \text{et} \quad \max_{\vec{\sigma} \text{ SA}} W^*(\vec{\sigma}) \quad (6.43)$$

Les deux théorèmes peuvent se résumer en une ligne mathématique. Soient \vec{u}^{ex} et $\vec{\sigma}^{\text{ex}}$ les solutions exactes en déplacements et en contraintes du problèmes d'élasticité et \vec{u}^{CA} et $\vec{\sigma}^{\text{SA}}$ des champs admissibles quelconques. On a :

$$W^*(\vec{\sigma}^{\text{SA}}) \leq W^*(\vec{\sigma}^{\text{ex}}) = W(\vec{u}^{\text{ex}}) \leq W(\vec{u}^{\text{CA}}) \quad (6.44)$$

6.3 Techniques de résolution analytique

6.3.1 Approche en déplacement

Cette approche consiste à choisir le champ de déplacement comme inconnue principale. Dans la pratique, on se donne une certaine forme pour ce champ, et on cherche à vérifier toutes les équations du problème. Ce champ doit satisfaire les conditions limites en déplacement. Ensuite, à partir de ce champ on calcule les déformations à partir de la relation de compatibilité puis les contraintes à partir de la loi de comportement. Il ne reste plus qu'à vérifier si ces contraintes sont en équilibre sur le volume et satisfont les conditions limites en contrainte.

Le paragraphe ci-dessus revient à éliminer les inconnues $\vec{\sigma}$ et $\vec{\varepsilon}$ dans la table 6.2 pour ne garder que l'inconnue en déplacement. Exprimons, l'équilibre de volume en fonction de \vec{u} :

$$\sigma_{ij,j} = \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} = \lambda \varepsilon_{kk,i} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) \quad (6.45)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk,i} + \mu (u_{i,jj} + (u_{j,j})_{,i}) = (\lambda + \mu) (u_{k,k})_{,i} + \mu u_{i,kk} \quad (6.46)$$

On s'est servi dans la dernière égalité du fait que $\varepsilon_{kk} = u_{k,k}$. L'équation d'équilibre en volume s'écrit donc en terme des déplacements :

$$(\lambda + \mu)\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f}_d = \vec{0} \quad (\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu u_{i,kk} + f_{di} = 0 \quad (6.47)$$

Ces trois équations sont appelées les équations de Lamé-Navier. En se servant de la formule du Laplacien (2.74), ces équations peuvent aussi être écrites sous la forme :

$$(\lambda + 2\mu)\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{u}) - \mu\vec{\text{rot}}\vec{\text{rot}}\vec{u} + \vec{f}_d = \vec{0} \quad (6.48)$$

Cette forme est avantageuse pour la résolution lorsque l'on sait que le champ de déplacement est irrotationnel ($\vec{\text{rot}}\vec{u} = \vec{0}$).

Le processus de résolution avec l'approche en déplacement est donc :

- postuler la forme du champ de déplacement ;
- vérifier les conditions limites en déplacements ;
- vérifier les équations dites de Lamé-Navier, (2.74) ;
- calculer les déformations, puis les contraintes ;
- vérifier les conditions limites en contrainte.

Cette approche en déplacement est utilisée pour résoudre le problème du cylindre sous pression à la section 7.1.

6.3.2 Approche en contrainte

L'approche en contrainte consiste à partir d'un champ de contrainte vérifiant les équations d'équilibre. La relation de comportement (6.10) inversée permet de trouver les déformations en fonction des contraintes.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (6.49)$$

Ces déformations doivent ensuite être intégrées pour obtenir les déplacements.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.50)$$

Les conditions d'intégrabilité de (6.50), (voir section 3.9.3), s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - (\varepsilon_{jk,ik} + \varepsilon_{ik,jk}) = 0 \quad (6.51)$$

Soit en terme des contraintes :

$$\left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij}\right)_{,mm} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ll,ij} - \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) + \frac{\nu}{E}(\sigma_{ll,ik}\delta_{jk} + \sigma_{ll,jk}\delta_{ik}) = 0$$

ou encore :

$$(1+\nu)\sigma_{ij,mm} - \nu\sigma_{ll,mm}\delta_{ij} + \sigma_{ll,ij} - (1+\nu)(\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) = 0 \quad (6.52)$$

En utilisant l'équilibre, (6.53), et une conséquence (6.54) de la loi de comportement :

$$\sigma_{ij,j} + f_{di} = 0 \quad (6.53)$$

$$\sigma_{ll,mm} = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{ll,mm} \quad (6.54)$$

les équations (6.52) se simplifient en

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ll,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} f_{dl,l} \delta_{ij} + f_{dji} + f_{di,j} = 0 \quad (6.55)$$

Ces six équations sont appelées les équations de Beltrami-Michell.

Le processus de résolution avec l'approche en contrainte est donc :

- postuler un champ de contrainte ;
- vérifier les conditions d'équilibre en volume ;
- vérifier les conditions limites en contrainte ;
- vérifier les équations dites de Beltrami-Michell, (6.55) ;
- calculer les déformations, puis les déplacements à partir des contraintes ;
- vérifier les conditions limites en déplacement.

Remarques :

- On note que lorsque toutes les forces volumiques sont constantes ou nulles, tout champ de contrainte constant ou linéaire par rapport aux variables d'espace satisfait les équations de Beltrami-Michell ;
- Si les forces volumiques sont nulles, tout champ de contrainte constant vérifie à la fois les équations d'équilibre et les équations de Beltrami-Michell.

6.3.3 Solide en état plan de déformation

Lorsqu'un solide prismatique très long est sollicité par des forces perpendiculaires à ses génératrices, et si ces forces restent constantes le long de celles-ci, toute portion du solide située à une distance suffisante de ses extrémités se déforme uniquement dans un plan perpendiculaire aux génératrices et l'on peut considérer que les déformations dans le sens de la génératrice sont nulles. Les sections transversales du solide restent donc planes et il suffit d'étudier une tranche d'épaisseur unitaire. De nombreux problèmes d'importance pratique peuvent être étudiés en état plan de déformation. C'est le cas, par exemple, d'une galerie ou d'un tunnel horizontal revêtus d'un soutènement continu résistant à la poussée des terrains environnants, figure 6.5. On peut aussi citer le cas d'un barrage poids, figure 6.6, d'une digue ou d'un talus de hauteur constante.

Dans un tel cas, on choisira le vecteur de base \vec{e}_3 , perpendiculaire à la tranche unitaire étudiée. Mathématiquement, un solide est en état plan de déformation si le champ de déplacement à la forme :

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2) \vec{e}_2 \quad (6.56)$$

Les déformations correspondantes, (6.1), ont la forme

$$[\bar{\epsilon}]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2) & \epsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2) & \epsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

En introduisant ces déformations dans la loi de Hooke (6.10), on obtient

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

et

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (6.59)$$

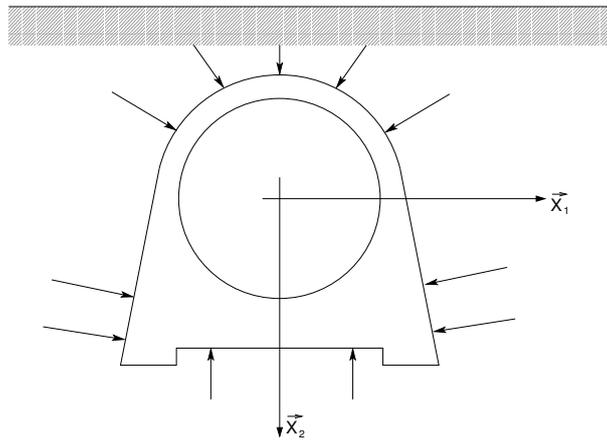


FIG. 6.5 –

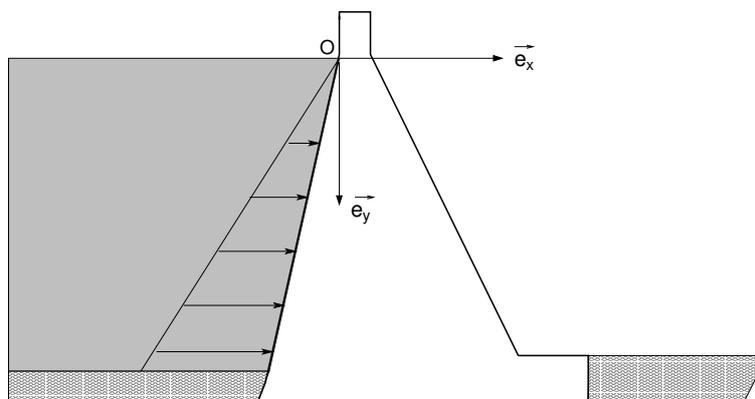


FIG. 6.6 –

La relation inverse de (6.58) peut également être utile en pratique :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Les équations de Lamé-Navier se réduisent à deux équations

$$(\lambda + \mu)(u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} + \mu(u_{1,11} + u_{1,22}) + f_1 = 0 \quad (6.61)$$

$$(\lambda + \mu)(u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} + \mu(u_{2,11} + u_{2,22}) + f_2 = 0 \quad (6.62)$$

et les équations de Beltrami-Michell à une seule équation :

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} + \frac{1}{1-\nu}(f_{1,1} + f_{2,2}) = 0 \quad (6.63)$$

6.3.4 Solide en état plan de contrainte

Il arrive fréquemment que l'on ait à étudier l'état de contrainte dans des tôles planes de faible épaisseur sollicitée dans leur plan. Il est alors indiqué de choisir le vecteur de base \vec{e}_3 perpendiculaire à la tôle, figure 6.7. Les contraintes σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} sont évidemment nulles sur les deux faces de la tôle. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre, à l'intérieur de la

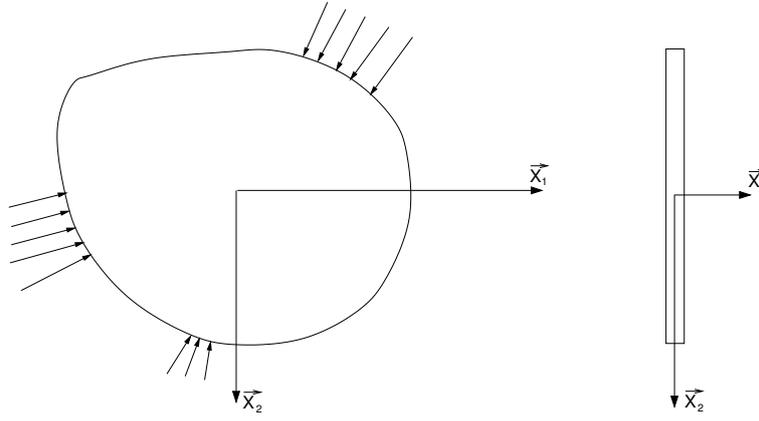


FIG. 6.7 –

tôle, que des valeurs très faibles et l'on ne commet donc pas d'erreur importante en affirmant qu'elles y sont nulles. Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} ne dépendent pratiquement pas de x_3 . On admettra qu'elles sont constantes sur l'épaisseur de la tôle. En résumé, l'hypothèse de l'état plan de contrainte s'écrit :

$$[\bar{\sigma}]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

En introduisant (6.64) dans la loi de Hooke (6.29), il vient

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

et

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (6.66)$$

L'inversion de (6.65) donne

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Les équations de Lamé-Navier se réduisent aux deux équations suivantes :

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}(u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} + \mu(u_{1,11} + u_{1,22}) + f_1 = 0 \quad (6.68)$$

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}(u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} + \mu(u_{2,11} + u_{2,22}) + f_2 = 0 \quad (6.69)$$

Quant aux équations de Beltrami-Michell, quatre équations apparaissent :

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} + (1 + \nu)(f_{1,1} + f_{2,2}) = 0 \quad (6.70)$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} = 0 \quad (6.71)$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} = 0 \quad (6.72)$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,12} = 0 \quad (6.73)$$

Les contraintes doivent vérifier à la fois les équations ci-dessus et les équations d'équilibre. En général, il n'y a aucune solution. C'est pourquoi, on n'impose pas la vérification des équations (6.71-6.73)⁴. On impose seulement la première équation, (6.70). L'hypothèse de l'état plan de contrainte viole donc les équations du problème 3D mais cela reste une très bonne approximation pour autant que la pièce étudiée est de faible épaisseur.

Remarques :

- Si les forces volumiques sont constantes ou nulles, les équations (6.63) et (6.70) sont identiques. Si de plus les conditions limites ne font pas apparaître de conditions limites en déplacement (si ce n'est le blocage des modes rigides), alors on obtiendra les mêmes contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} que le solide soit en état plan de de déformation ou en état plan de contrainte. En plus, ces contraintes seront indépendantes des propriétés du matériau (module de Young et coefficient de Poisson). Par contre, la contrainte σ_{33} , les déformations et les déplacements seront eux différents en état plan de déformation et de contrainte et dépendront eux des propriétés du matériau.
- En comparant les lois de Hooke, (6.67) et (6.58) on constate que l'on passe de l'une à l'autre par une simple substitution de modules élastiques : Pour passer de l'état plan de contrainte à l'état plan de déformation, il suffit d'effectuer les substitutions :

$$E = \frac{E'}{1-\nu'^2} \quad \nu = \frac{\nu'}{1-\nu'} \quad (6.74)$$

puis de supprimer les accents. Pour passer de l'état plan de déformation à l'état plan de contrainte, il suffit d'effectuer les substitutions :

$$E = \frac{E'(1+2\nu')}{(1+\nu')^2} \quad \nu = \frac{\nu'}{1+\nu'} \quad (6.75)$$

puis de supprimer les accents. Ces substitutions ne modifient pas μ .

6.3.5 Fonction de contrainte d'Airy

En l'absence de forces de volume, nous avons vu que l'équation de Beltrami-Michell était la même en état plan de contrainte ou de déformation :

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}),_{11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22}),_{22} = 0 \quad (6.76)$$

Les équations d'équilibre en volume sont également les mêmes :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \quad (6.77)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (6.78)$$

La méthode la plus commode pour vérifier ces équations est d'introduire une fonction de contrainte ϕ , dite fonction d'Airy, telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.79)$$

On vérifie immédiatement que, quelle que soit la fonction ϕ , les contraintes calculées selon (6.79) satisfont l'équilibre en volume (6.77)- (6.78). En introduisant (6.79) dans (6.76), on trouve que la fonction d'Airy doit satisfaire à l'équation biharmonique

$$\Delta \Delta \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} \right) = 0 \quad (6.80)$$

4. Ces équations imposent à la trace des contraintes d'être linéaire ce qui est trop restrictif.

Ainsi, la solution d'un problème d'élasticité plane qui ne comporte pas de force de volume se réduit à rechercher une solution de l'équation (6.80) qui satisfasse les conditions limites (en contrainte ou en déplacement selon les données du problème).

L'utilisation d'une fonction d'Airy sera illustrée dans l'exemple de la traction d'un barreau prismatique à la section 7.2.

6.4 Techniques de résolution numériques

Les techniques analytiques sont vite dépassées lorsque le problème devient un peu complexe, il faut alors recourir à des approches numériques. On distingue trois grandes familles d'approches numériques pour la mécanique des milieux continus :

- les éléments finis ;
- les différences finies ;
- les éléments de frontière.

La première approche a le mérite d'être applicable quelle que soit la géométrie du milieu. Elle est donc utilisée pour tous les problèmes de mécanique faisant intervenir des géométries complexes (crash voiture, écoulement sanguin, étude vibratoire de fusée, design de puce électronique contre l'échauffement excessif, ...). Les codes industriels les plus connus sont : Samcef (le seul européen), Abaqus, Nastran et Ansys.

La méthode des différences finies nécessite des domaines de formes simples. Elle est particulièrement utilisée en météorologie (l'atmosphère a une forme simple) et pour l'étude d'écoulement.

Enfin, la méthode des éléments frontières permet la prise en compte simple d'un milieu infini ou semi-infini (mais ce milieu doit être linéaire).

6.5 Thermoélasticité

Nous considérons maintenant le cas où les déformations sont causées non seulement par des contraintes mais également par des élévations de température. C'est le phénomène de la thermoélasticité. Une élévation de température a tendance en général⁵ à faire gonfler les corps et une diminution à tendance à les contracter. Une relation thermoélastique isotrope s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}}_{\text{déformations d'origine mécanique}} + \underbrace{\frac{\alpha}{3}(T - T_0)\delta_{ij}}_{\text{déformations d'origine thermique}} \quad (6.81)$$

La température T_0 est la température à l'état naturel. Le coefficient α est appelé coefficient de dilatation thermique. Il relie la variation de volume à l'élévation de température. En effet, en considérant les contraintes nulles et en prenant la trace de (6.81), on obtient

$$\text{Tr}\bar{\varepsilon} = \alpha(T - T_0) \quad (6.82)$$

En inversant la relation (6.81), on a

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \frac{E\alpha}{1-2\nu}(T - T_0)\delta_{ij} \quad (6.83)$$

La résolution d'un problème de thermo-élasticité ne diffère d'un problème d'élasticité que par la loi de comportement (si le champ de température T est supposé connu). Ainsi, toutes

5. Le contre-exemple classique est celui de l'eau dont la densité est maximale à 4 degré Celsius.

Équations cinématiques	
compatibilité	
$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}}\vec{u} + (\overline{\text{grad}}\vec{u})^T)$	sur V $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
conditions limites en déplacement	
$\vec{u} = \vec{u}_d$	sur S_u $u_i = u_{di}$
Équations d'équilibre	
équilibre en volume	
$\text{div}\bar{\bar{\sigma}}^* + \vec{f}_d + \vec{f}_d^* = \vec{0}$	sur V $\sigma_{ij,j}^* + f_{di} + f_{di}^* = 0$
équilibre en surface (conditions limites en contrainte)	
$\bar{\bar{\sigma}}^* \cdot \vec{n} = \vec{T}_d + \vec{T}_d^*$	sur S_T $\sigma_{ij}^* n_j = T_{di} + T_{di}^*$
symétrie des contraintes	
$\bar{\bar{\sigma}}^* = \bar{\bar{\sigma}}^{*T}$	sur V $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ji}^*$
Équations de comportement	
$\bar{\bar{\sigma}}^* = \lambda \text{Tr}(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{\epsilon}}$	sur V $\sigma_{ij}^* = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$

TAB. 6.3 – Les équations définissant un problème de thermoélasticité linéaire isotrope

les équations du tableau 6.2 sont à résoudre, excepté le comportement qui doit être remplacé par (6.83).

On peut aussi voir le problème de thermoélasticité comme un problème d'élasticité classique tel que donné dans le tableau 6.2 avec un chargement d'origine thermique supplémentaire qui s'exprime par

- un vecteur contrainte supplémentaire sur S_T (voir 6.5) de valeur⁶

$$\vec{T}_d^* = \frac{E\alpha(T - T_0)}{1 - 2\nu} \vec{n} \quad (6.84)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la surface S_T ;

- une force de volume supplémentaire sur V

$$\vec{f}_d^* = -\frac{E\alpha}{1 - 2\nu} \vec{\text{grad}}T \quad (6.85)$$

On remarquera que ces forces volumiques dérivent du potentiel.

$$-\frac{E\alpha}{1 - 2\nu}(T - T_0) \quad (6.86)$$

Ce chargement supplémentaire est ajouté au chargement réel \vec{T}_d et \vec{f}_d . Le problème de thermoélasticité est résumé dans le tableau 6.3. La contrainte réelle est donnée par

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* - \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}(T - T_0)\delta_{ij} \quad (6.87)$$

6. Ne pas confondre le vecteur contrainte \vec{T} et la température T .

Chapitre 7

Problèmes classiques d'élasticité

Les problèmes résolus dans cette section permettent d'illustrer les techniques de résolution présentées au chapitre précédent.

7.1 Cylindre sous pression

On considère un cylindre circulaire de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , figure 7.1. Il est soumis à l'action de pressions interne p_i et externe p_e uniformément réparties.

Résolution : Si le cylindre est suffisamment long, il est raisonnable de faire l'hypothèse de l'état plan de déformation. Il est également tout indiqué de choisir des coordonnées cylindriques, le vecteur \vec{e}_z coïncidant avec celui du cylindre. Par raison de symétrie, le déplacement d'un point quelconque ne peut être que radial et indépendant de θ et z :

$$\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r \quad (7.1)$$

On en déduit par la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques que $\text{rot}\vec{u} = \vec{0}$. Les équations d'équilibre en terme des déplacements (Lamé-Navier), (6.48), donnent :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) \right] + f_r = 0 \quad (7.2)$$

En l'absence de force de volume cette équation s'intègre facilement. On obtient

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad u_\theta = 0 \quad u_z = 0 \quad (7.3)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Pour les déterminer, il nous reste à imposer les conditions limites en contrainte. Pour cela, il faut d'abord calculer les déformations puis les contraintes associées au champ de déplacement. Les déformations sont la partie symétrique du gradient des déplacements. En utilisant la formule du gradient d'un vecteur en cylindrique, on obtient

$$\varepsilon_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \quad (7.4)$$

Il n'y a donc pas de déformation de cisaillement, ce qui était évident a priori, vu la symétrie du problème. En appliquant la loi de Hooke, (6.58), il vient

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (7.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (7.6)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu E C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (7.7)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (7.8)$$

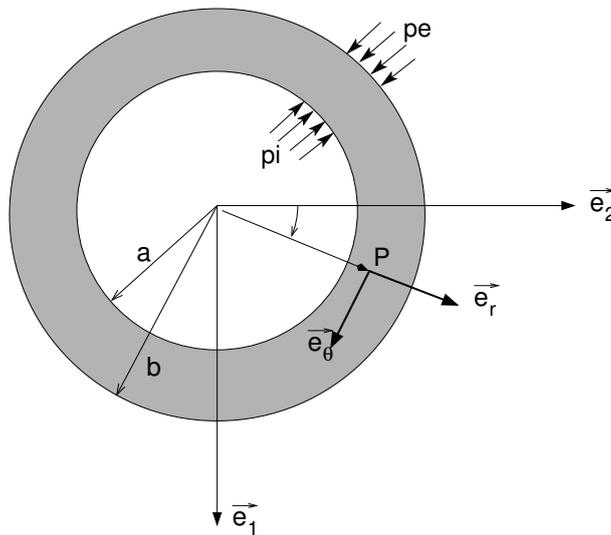


FIG. 7.1 –

La condition limite en contrainte s'exprime par

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d \quad (7.9)$$

avec sur la face intérieure¹ :

$$\vec{n} = -\vec{e}_r \quad \vec{T}_d = p_i \vec{e}_r \quad (7.10)$$

En utilisant (7.10), la relation (7.9) s'écrit sous forme matricielle, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr}(r=a) = -p_i \quad (7.11)$$

Pour la face extérieure, on a

$$\vec{n} = \vec{e}_r \quad \vec{T}_d = -p_e \vec{e}_r \quad (7.12)$$

et

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{rr}(r=b) = -p_e \quad (7.13)$$

Les deux conditions sur σ_{rr} fournissent les deux constantes. Tous calculs faits, on obtient

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{p_i - p_e}{1/a^2 - 1/b^2} \quad (7.14)$$

Les contraintes non nulles valent donc

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} - \frac{p_i - p_e}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (7.15)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} + \frac{p_i - p_e}{r^2/a^2 - r^2/b^2} \quad (7.16)$$

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{a^2 p_i - b^2 p_e}{b^2 - a^2} \quad (7.17)$$

1. Il est essentiel de comprendre l'origine des signes.

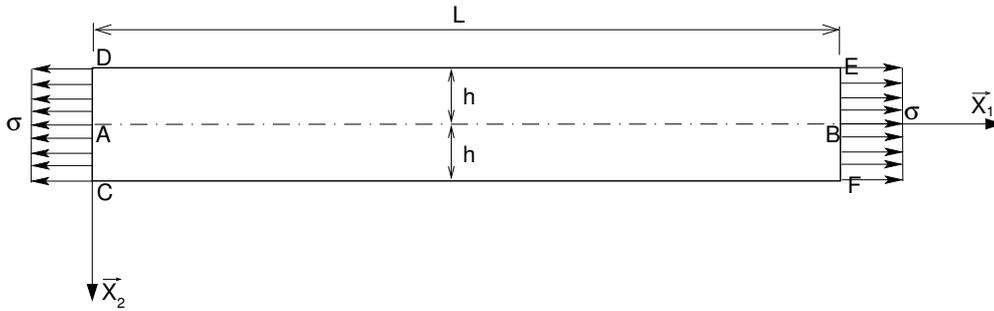


FIG. 7.2 –

Pour le déplacement u_r , on trouve enfin

$$u_r = \frac{1}{2\mu(b^2 - a^2)} \left[(1 - 2\nu)(a^2 p_i - b^2 p_e)r + a^2 b^2 (p_i - p_e) \frac{1}{r} \right] \quad (7.18)$$

Cette exemple a permis d'illustrer l'approche en déplacement (voir section 6.3.1) qui part d'une forme du champ de déplacement et impose toutes les conditions sur ce champ.

Remarques :

- Les contraintes dans la section du cylindre, σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont indépendantes des constantes élastiques. Ceci est en accord avec ce que nous avons observé à la section 6.3.4. En clair, que le cylindre soit en plexiglas ou en acier ces contraintes seront les mêmes². La contraintes σ_{zz} , les déformations et déplacements dépendent elles par contre des constantes élastiques.
- Pour obtenir les résultats correspondants à l'état plan de contrainte, il suffit de poser σ_{zz} et d'effectuer les substitutions (6.75). Celles-ci ne modifient pas les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ puisqu'elles sont indépendantes des constantes élastiques. Enfin, la déformation ε_{zz} se calcule par (6.66).
- Si l'épaisseur du cylindre est faible devant le rayon moyen $R = (a + b)/2$, on obtient au premier ordre les contraintes suivantes en état plan de déformation :

$$\sigma_{rr} \simeq 0 \quad \sigma_{\theta\theta} \simeq pR/e \quad \sigma_{zz} \simeq \nu pR/e \quad u_r = (1 - \nu)(1 + \nu)pR^2/(Ee)$$

où $p = p_i - p_e$. Ces formules simplifiées permettent notamment de déterminer rapidement les contraintes dans la paroi d'une chaudière cylindrique sous pression.

7.2 Traction d'un barreau prismatique

Considérons, figure 7.2, un barreau de longueur L , largeur $2h$ et épaisseur unitaire faible devant h et l . Sa section droite a donc une aire $A = 2h$. Il est soumis des forces surfaciques d'intensité σ uniformément réparties sur ses sections extrémités.

Résolution : Cette exemple illustre l'utilisation d'une fonction de contrainte d'Airy, voir section 6.3.5. Considérons une fonction d'Airy de la forme

$$\phi = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 \quad (7.19)$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes à déterminer. Cette fonction d'Airy est biharmonique Les contraintes correspondantes valent

$$\sigma_{xx} = 2C_3 \quad \sigma_{yy} = 2C_1 \quad \sigma_{xy} = -C_2 \quad (7.20)$$

2. Cette propriété est le fondement de la photo-élasticité qui permet de visualiser des contraintes dans du plexiglas dont les propriétés optiques varient avec la contrainte.

Il reste à imposer les conditions limites en contrainte $\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}_d$.

– Sur la face EF : $\vec{n} = \vec{e}_x, \vec{T}_d = \sigma \vec{e}_x$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 = \sigma/2, C_2 = 0 \quad (7.21)$$

– Sur la face CD : $\vec{n} = -\vec{e}_x, \vec{T}_d = -\sigma \vec{e}_x$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_3 = \sigma/2, C_2 = 0 \quad (7.22)$$

– Sur la face DE : $\vec{n} = -\vec{e}_y, \vec{T}_d = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 = 0, C_1 = 0 \quad (7.23)$$

– Sur la face CF : $\vec{n} = \vec{e}_y, \vec{T}_d = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2C_3 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & 2C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_2 = 0, C_1 = 0 \quad (7.24)$$

Les contraintes sont donc uniformes sur le barreau et valent

$$\sigma_{xx} = \sigma \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (7.25)$$

Si les faces avant et arrière du barreau sont libres, on est en état plan de contrainte. les déformations sont données par (6.65)

$$\varepsilon_{xx} = \sigma/E \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\sigma/E \quad \varepsilon_{xy} \quad (7.26)$$

Enfin, pour obtenir les déplacements, il faut intégrer les relations déformations-déplacements qui s'écrivent ici

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad \varepsilon_{yy} = u_{y,y} \quad \varepsilon_{xy} = 1/2(u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (7.27)$$

Les deux premières donnent, respectivement

$$u_x = \frac{\sigma}{E}x + f(y) \quad u_y = -\nu\frac{\sigma}{E}x + g(x) \quad (7.28)$$

où $f(y)$ et $g(x)$ sont des fonctions quelconques de y et x respectivement. En reportant (7.28) dans la troisième équation de (7.27), il vient

$$f(y)_{,y} + g(x)_{,x} = 0 \quad (7.29)$$

d'où

$$f(y)_{,y} = c \quad g(x)_{,x} = -c \quad (7.30)$$

où c est une constante arbitraire. Intégrant (7.30), et reportant dans (7.28), on trouve

$$u_x = \frac{\sigma}{E}x + a + cy \quad u_y = -\nu\frac{\sigma}{E}x + b - cx \quad (7.31)$$

où a et b sont également des constantes arbitraires. Les déplacements ne sont déterminés qu'à un mouvement de corps rigide près, représenté par les fonctions $f(y)$ et $g(x)$. Les constantes a et b représentent une translation et c une rotation. Les constantes a, b, c ne peuvent être déterminées qu'en imposant trois conditions d'appui adéquates.

Voici un certain nombre de conditions d'appui valides :

- $u_x = u_y = u_{y,x} = 0$ en $(0,0)$: cela fixe le point A et empêche toute rotation autour de ce point.
- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(L,0)$: cela fixe le point A et empêche le mouvement du point B selon \vec{e}_y .
- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(0, -h)$: cela fixe le point A et empêche le déplacement du point D selon \vec{e}_x .

Voici, par contre, un certain nombre de conditions d'appui non valides car elles ne fixent pas complètement les modes rigides ou empêchent le corps de se déformer.

- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(L,0)$
- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(0, -h)$
- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_x = 0$ en $(L, -h)$
- $u_x = u_y = 0$ en $(0,0)$ et $u_y = 0$ en $(L, -h)$

Notons que qu'elles que soient les conditions d'appui valides choisies, celles-ci ne modifient en rien les déformations et contraintes à l'intérieur du barreau.

7.3 Torsion d'un barreau prismatique

On considère, figure 7.3, un barreau de surface latérale S_e et d'extrémités S_0 et S_L . La surface S_e est libre. Les déplacements selon \vec{e}_x et \vec{e}_y sont imposés à zéro dans la section S_0 et ils sont imposés à $u_x = -\Theta L y$ et $u_y = \Theta L x$ dans la section S_L . Ce mode de déplacement correspond à une rotation de la surface S_L autour de l'axe \vec{e}_z avec un angle ΘL . Finalement, la composante z du vecteur contrainte est nulle sur S_0 et S_L .

Résolution : C'est Saint-Venant (1855) qui s'est le premier intéressé à la résolution de ce problème. il a postulé la solution sous la forme

$$u_x = -\Theta z y \quad u_y = \Theta z x \quad u_z = \Theta \psi(x, y) \quad (7.32)$$

et a montré que cette forme permet de satisfaire toutes les équations. C'est ce que nous allons faire. Le champ de déplacement (7.32) correspond à une rotation de chaque section du barreau. L'angle Θ représente l'angle de rotation entre deux sections distantes de un mètre. Cela se voit de suite si on exprime (7.32) en coordonnées cylindriques :

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \Theta z r \quad u_z = \Theta \psi(x, y) \quad (7.33)$$

La fonction ψ représente le gauchissement de la section lors de sa rotation.

Essayons maintenant de vérifier toutes les équations du problème élastique. Les déformations associées au champ de déplacement (7.32) sont données par

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = 0 \quad (7.34)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2}(u_{z,x} + u_{x,z}) = \frac{1}{2}\Theta(\psi_{,x} - y) \quad (7.35)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}(u_{z,y} + u_{y,z}) = \frac{1}{2}\Theta(\psi_{,y} + x) \quad (7.36)$$

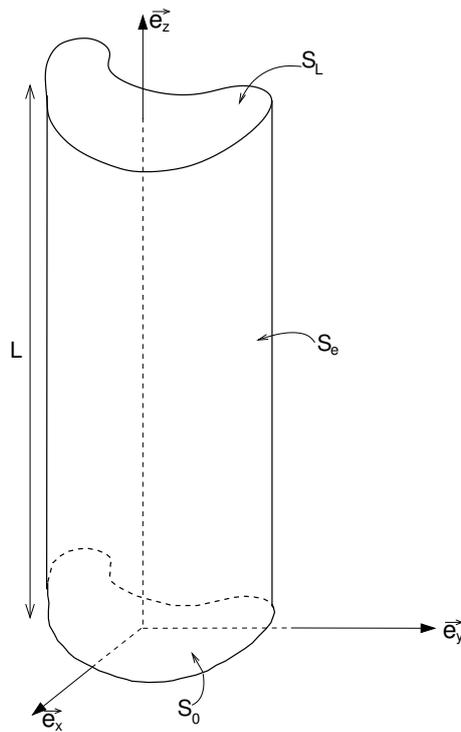


FIG. 7.3 –

Les contraintes correspondantes sont

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad (7.37)$$

$$\sigma_{xz} = \mu(u_{z,x} + u_{x,z}) = \mu\Theta(\psi_{,x} - y) \quad (7.38)$$

$$\sigma_{yz} = \mu(u_{z,y} + u_{y,z}) = \mu\Theta(\psi_{,y} + x) \quad (7.39)$$

On note que ces contraintes sont indépendantes de la coordonnées z , la seule équation d'équilibre en volume non triviale est donc :

$$\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} = 0 \quad (7.40)$$

Cette équation indique que nous pouvons exprimer les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} à l'aide d'une seule fonction $\phi(x,y)$ appelée "fonction de contrainte de Prandtl" par les relations suivantes

$$\sigma_{xz} = \phi_{,y} \quad \sigma_{yz} = -\phi_{,x} \quad (7.41)$$

Par les équations (7.39) et (7.41), on a

$$\phi_{,y} = \mu\Theta(\psi_{,x} - y) \quad -\phi_{,x} = \mu\Theta(\psi_{,y} + x) \quad (7.42)$$

En éliminant ψ entre ces deux équations, on trouve que la fonction de contrainte ϕ doit vérifier

$$\Delta\phi = -2\mu\Theta \quad (7.43)$$

Imposons maintenant l'équilibre en surface sur la surface latérale S_e :

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = \bar{T}_d \text{ où } \bar{n} = \cos\alpha\bar{e}_x + \sin\alpha\bar{e}_y \quad \bar{T}_d = \bar{0} \quad (7.44)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

$$\Rightarrow \sigma_{xz} \cos\alpha + \sigma_{yz} \sin\alpha = 0 \quad (7.46)$$

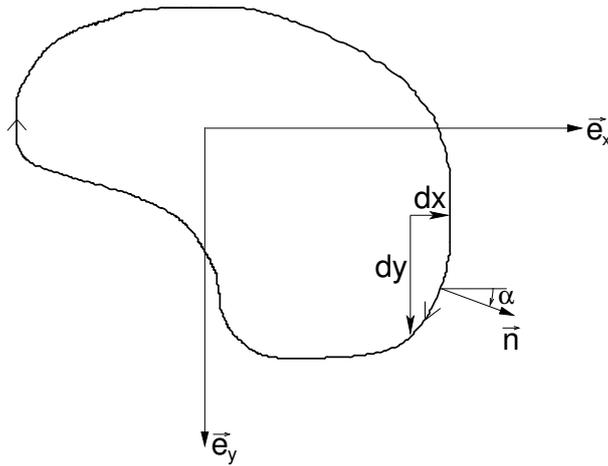


FIG. 7.4 –

L'angle α est l'angle que fait la normale extérieure avec l'axe \vec{e}_x , figure 7.4. Si on note s l'abscisse curviligne du contour et que l'on écrit les contraintes en terme de la fonction de contrainte ϕ , (7.41), la condition de surface libre (7.46) s'écrit :

$$\sigma_{xz} \cos \alpha + \sigma_{yz} \sin \alpha = \sigma_{xz,y,s} - \sigma_{yz,x,s} = \phi_{,y,y,s} + \phi_{,x,x,s} = \phi_{,s} = 0 \quad (7.47)$$

Pour vérifier l'équilibre sur la surface latérale, il suffit donc que ϕ soit constant sur cette surface.

Concernant, les conditions limites en contrainte sur S_0 et S_L , nous devons nous assurer que

$$(\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_L \quad (7.48)$$

Ces conditions sont trivialement vérifiées car $\sigma_{zz} = 0$.

Résumons les résultats obtenus. Pour résoudre le problème d'un barreau en torsion de section quelconque, il suffit de trouver une fonction ϕ vérifiant dans la section l'équation (7.43) et s'annulant sur le contour de la section. Une fois ϕ connu, les contraintes sont définies par

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad \sigma_{xz} = \phi_{,y} \quad \sigma_{yz} = -\phi_{,x} \quad (7.49)$$

Nous sommes assurés que ces contraintes vérifient bien l'équilibre en volume et en surface. Finalement, les déformations sont données par³

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = 0 \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2\mu} \phi_{,y} \quad \epsilon_{yz} = -\frac{1}{2\mu} \phi_{,x} \quad (7.50)$$

Pour trouver les déplacements, il reste à calculer ψ à partir de ϕ par (7.42).

Dans la formulation du problème de la torsion d'un barreau. Nous avons considéré que la surface supérieure tourne d'un angle ΘL et que la section inférieure ne tourne pas. Pour parvenir à cette rotation relative, il faut des efforts. Ce sont les réactions correspondant à la cinématique imposée. Calculons la résultante de efforts sur la section supérieure. La force résultante selon \vec{e}_x est

$$F_x = \int_{S_L} (\bar{\sigma} \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x dS = \int_{S_L} \sigma_{xz} dS \quad (7.51)$$

$$= \int_{S_L} \phi_{,y} dS = \int_{S_L} \text{grad} \phi \cdot \vec{e}_y dS = \int_C \phi \cos \alpha dC = 0 \quad (7.52)$$

3. Il est important de savoir interpréter pourquoi certaines composantes sont nulles et d'autres non nulles à la lumière de la section 3.9.2.

On s'est servi de la formule (2.45) ainsi que du fait que ϕ est nul sur le contour c de S_L . De même, on montre que la force résultante selon \vec{e}_y est nulle. Bien sûr, la force résultante selon \vec{e}_z est également nulle puisque selon \vec{e}_z , la section est libre d'effort.

Concernant le moment résultant, \vec{M} appliqué à la section, il se calcule par

$$\vec{M}_T = \int_{S_L} \vec{x} \wedge (\overline{\sigma} \cdot \vec{e}_z) dS = \int_{S_L} \vec{x} \wedge (\phi_{,y} \vec{e}_x - \phi_{,x} \vec{e}_y) dS \quad (7.53)$$

$$= - \int_{S_L} (\vec{x} \cdot \text{grad} \phi) \vec{e}_z dS = \int_{S_L} (-\text{div}(\phi \vec{x}) + \text{div}(\vec{x}) \phi) \vec{e}_z dS \quad (7.54)$$

La dernière égalité a été obtenue par (2.70). Nous pouvons poursuivre en utilisant la formule de Green-Ostrogradski (2.45) et le fait que $\phi = 0$ sur C et $\text{div} \vec{x} = 2$.

$$\int_{S_L} -\text{div}(\phi \vec{x}) + \text{div}(\vec{x}) \phi dS = \int_C (\phi \vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{e}_z dC + \int_{S_L} 2\phi \vec{e}_z dS \quad (7.55)$$

$$= \int_{S_L} 2\phi dS \vec{e}_z \quad (7.56)$$

Le couple imposé est dirigé selon \vec{e}_z et vaut deux fois l'intégrale de ϕ sur la section. Le calcul du moment résultant sur la section S_0 donne le moment opposé. On a donc bien l'équilibre du barreau.

Si on fait le rapport entre le moment de torsion M_T et l'angle de torsion par unité de longueur Θ on obtient une quantité appelée la rigidité torsionnelle notée R_T qui est une caractéristique qui dépend de la géométrie de la section et du matériau.

Remarques :

- L'équation (7.56) n'est valable seulement si la section du barreau est convexe ;
- Si la section du barreau n'est pas simplement connexe, c'est à dire que cette section a des trous, on peut toujours imposer à ϕ d'être nul sur le contour extérieur mais on imposera seulement à ϕ d'être constant sur les autres contours.
- On peut interpréter les équations que doivent satisfaire ϕ par l'analogie dite de la membrane. Considérons une membrane de la forme de la section et tendue dans son plan par une tension S , figure 7.5. Si une pression p est appliquée sur la membrane, elle va s'enfoncer verticalement par un déplacement w qui est solution de l'équation suivante : $\Delta w = -p/S$. En supposant que la membrane est fixée sur son contour $w = 0$. Les équations régissant w sont donc identiques aux équations régissant ϕ pour autant que l'on remplace $2\mu\Theta$ par p/S .
- Si l'on travaille dans la section avec une autre système de coordonnées que le système cartésien, on ne peut utiliser l'équation (7.41). On utilise alors la version intrinsèque de (7.41) qui est

$$\overline{\sigma} \cdot \vec{e}_z = \vec{\text{grad}} \phi \wedge \vec{e}_z \quad (7.57)$$

De même, la version intrinsèque de (7.42) est

$$\vec{\text{grad}} \phi \wedge \vec{e}_z = \mu\Theta (\vec{\text{grad}} \psi + \vec{e}_z \wedge \vec{x}) \quad (7.58)$$

- A titre d'exemple, prenons le cas d'un barreau à section circulaire, figure 7.6. Par symétrie et en ayant à l'esprit l'analogie de la membrane, il est clair que le champ ϕ ne dépend que de la coordonnée r en coordonnées cylindrique.

En utilisant la formule du Laplacien en coordonnées cylindriques, on obtient l'équation suivante pour ϕ

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = -2\mu\Theta \quad (7.59)$$

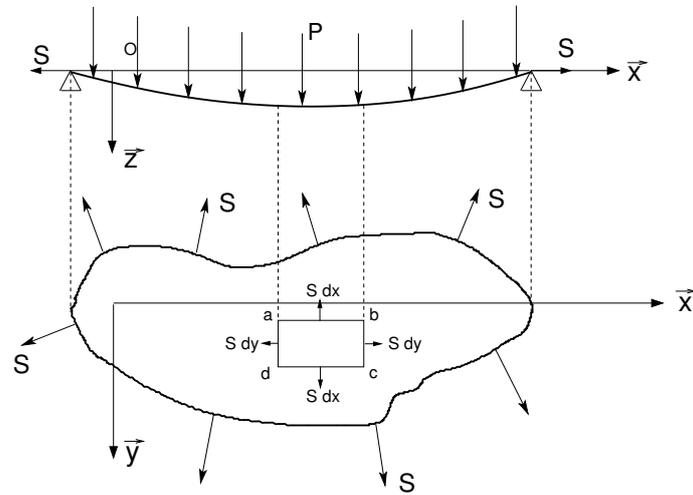


FIG. 7.5 –

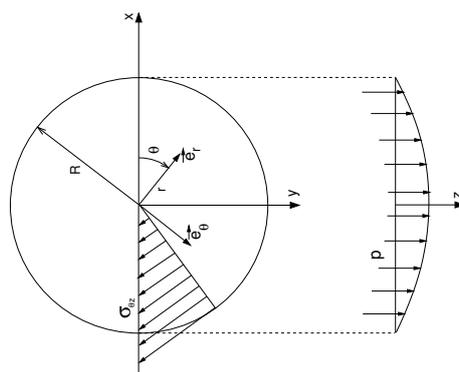


FIG. 7.6 –

d'où en tenant compte de la condition $\phi = 0$ en $r = R$ et en imposant à ϕ de rester fini en $r = 0$, on obtient

$$\phi = \frac{\mu\Theta}{2}(R^2 - r^2) \quad (7.60)$$

L'utilisation de (7.57) en coordonnées cylindrique donne⁴.

$$\sigma_{rz} = 0 \quad \sigma_{\theta z} = \mu\Theta r \quad (7.61)$$

et

$$\varepsilon_{rz} = 0 \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\Theta r \quad (7.62)$$

Il reste à calculer le déplacement. Le gauchissement ψ se calcule par (7.58) et on obtient $\psi = 0$. Les déplacements sont donc

$$u_r = 0 \quad u_\theta = \Theta z r \quad u_z = \Theta \Psi(x, y) \quad (7.63)$$

Dans le cas particulier d'un barreau à section circulaire, il n'y a donc pas de gauchissement de la section lors de la torsion. Le moment de torsion est calculé par (7.56) et vaut

$$M_T = \mu\Theta \frac{\pi R^4}{2} \quad (7.64)$$

La rigidité torsionnelle vaut donc

$$R_T = \mu \frac{\pi R^4}{2} \quad (7.65)$$

4. Il est bon de savoir interpréter pourquoi $\varepsilon_{rz} = 0$ et par contre $\varepsilon_{\theta z} \neq 0$ à la lumière de la section 3.9.2

Chapitre 8

Thermodynamique et lois de comportement

8.1 Le premier principe

La première loi de la thermodynamique (aussi appelée loi de bilan de l'énergie) a déjà été présentée succinctement dans le chapitre 4. Nous reprenons ici cette présentation de manière plus approfondie en faisant ressortir les conséquences mécaniques de cette loi. Cette loi met en relation trois quantités : l'énergie totale du système, le taux de chaleur reçu et la puissance des efforts extérieurs.

Par définition, l'énergie totale d'un système ω est la somme de l'énergie interne E et de l'énergie cinétique K :

$$E(\omega) + K(\omega) = \int_{\omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dv \quad (8.1)$$

où l'on noté e l'énergie interne massique.

Par analogie avec les hypothèses faites pour les efforts extérieurs, il est normal de supposer qu'un système reçoit de la chaleur à travers sa surface ou directement en volume :

$$\dot{Q}(\omega) = \int_{\partial\omega} q ds + \int_{\omega} r dv \quad (8.2)$$

où q est la densité *surfactive* de taux de chaleur reçue et r la densité *volumique* du taux de chaleur reçue. La chaleur reçue à travers la frontière est l'analogue de l'action du vecteur contrainte et la chaleur reçue en volume est l'analogue de la force de volume.

La source volumique de chaleur peut venir d'une action à distance par exemple par le biais de phénomènes électro-magnétiques (chauffage par induction ou four micro-onde) ou bien venir d'un phénomène local non mécanique comme une réaction chimique (combustion par exemple) ou un changement de phase. La densité surfactive du taux de chaleur reçu q dépend du point considéré sur la surface et la normale à cette surface. Le théorème 4.2 nous apprend que cette dépendance est linéaire :

$$q = -\vec{q} \cdot \vec{n} \quad (8.3)$$

Par définition, $\vec{q}(\vec{x}, t)$ est le vecteur courant de chaleur. Le signe négatif s'explique par le fait que la normale \vec{n} est la normale extérieure au système.

Finalement, nous sommes en mesure d'écrire le premier principe de la thermodynamique. A chaque instant, la dérivée particulière de l'énergie totale (somme de l'énergie interne et cinétique) est la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système \mathcal{P}^e et du taux de chaleur reçue par le système \dot{Q} :

$$\frac{d(E + K)}{dt} = \mathcal{P}^e + \dot{Q} \quad (8.4)$$

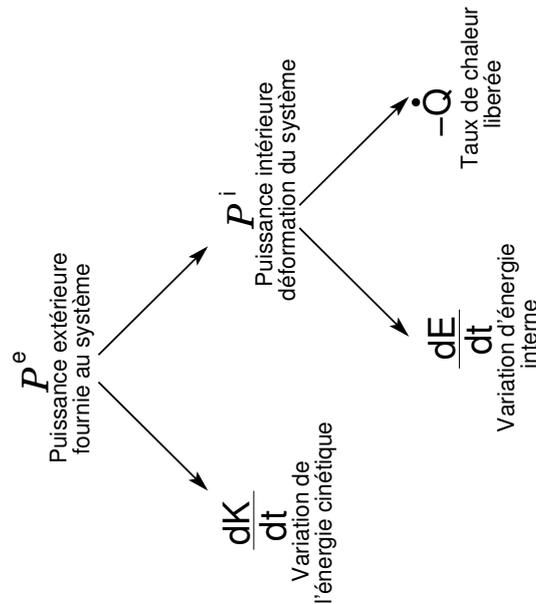


FIG. 8.1 –

ou plus explicitement tel que cela avait été écrit dans le chapitre 4 sur les lois de bilan, tableau 4.2

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dv = \int_{\partial\omega} (q + \vec{T} \cdot \vec{v}) ds + \int_{\omega} (r + \vec{f} \cdot \vec{v}) dv \quad (8.5)$$

La puissance extérieure est fournie au système par les forces imposées et par les réactions sous les déplacements imposés. C'est donc une puissance de type mécanique fournie au système. Par contre, le terme \dot{Q} est une puissance fournie au système sous forme de chaleur ("en chauffant"). Le premier principe de la thermodynamique permet de relier ces deux puissances d'origine différente dans une même équation.

Il est intéressant de combiner le bilan de l'énergie (8.4) avec le théorème de l'énergie cinétique rappelé ci-dessous

$$\mathcal{P}^e = \frac{dK}{dt} + \mathcal{P}^i \quad (8.6)$$

pour obtenir

$$\mathcal{P}^i = \frac{dE}{dt} - \dot{Q} \quad (8.7)$$

Les équations (8.6) et (8.7) sont illustrées sur la figure 8.1. La puissance extérieure fournie est transformée en mouvement ($\frac{dK}{dt}$) et/ou en déformation (\mathcal{P}^i). Ensuite, la déformation du milieu entraîne un changement de l'énergie de ce milieu ($\frac{dE}{dt}$) et/ou libérer de la chaleur ($-\dot{Q}$).

La relation (8.7) s'écrit sous forme locale

$$\underbrace{\sigma_{ij} v_{i,j}}_{\text{puiss. intérieure volumique}} = \underbrace{\rho \frac{de}{dt}}_{\text{variation énergie interne}} + \underbrace{q_{i,i} - r}_{\text{taux de chaleur dégagée}} \quad (8.8)$$

et est souvent appelée l'équation de la chaleur.

8.2 Le second principe

Le premier principe de la thermodynamique fait intervenir deux nouveaux concepts : la notion d'énergie interne et de flux de chaleur. De même, le second principe introduit deux nouveaux concepts à savoir la température et l'entropie.

La température absolue :

- se mesure en Kelvin (K)
- n'est jamais négative ;
- est notée T ;
- peut être définie en chaque point du milieu et à chaque instant (si cela n'est pas possible, nous ne sommes pas en présence d'un milieu continu).

L'entropie

- sera notée S ;
- l'unité d'entropie est une énergie par degré JK^{-1} ;
- l'entropie S d'un système est la somme de chacune des parties du système. On suppose qu'en chaque point on est capable de définir une entropie spécifique (c'est à dire une entropie par unité de masse) $s(\vec{x}, t)$. L'entropie du système ω s'écrit alors :

$$S = \int_{\omega} \rho s(\vec{x}, t) dv \quad (8.9)$$

- l'entropie n'est définie qu'à une constante près pour un système donné. Il suffit de fixer s en un point et à un instant pour lever cette indétermination.

Le second principe s'exprime par une inégalité

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\omega} \frac{r}{T} dv - \int_{\partial\omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} ds \quad (8.10)$$

On voit que, si on considère T et $\frac{dS}{dt}$ comme fixés, l'inégalité (8.10) fournit une inégalité a priori portant sur le taux de chaleur que peut recevoir ω . Si, à l'instant t , la température T est uniforme, (8.10) donne exactement une borne supérieure du taux de quantité de chaleur que peut recevoir ω , à savoir $T \frac{dS}{dt}$.

L'inégalité (8.10) peut encore s'écrire

$$\int_{\omega} \rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \text{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) dv \geq 0 \quad (8.11)$$

en utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski et le théorème 4.3 sur la dérivation d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse. Sous forme locale, nous avons

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \text{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \geq 0 \quad (8.12)$$

Il est souvent intéressant d'exprimer cette inégalité en ne faisant pas apparaître le terme de source de chaleur r . On peut éliminer r en se servant du premier principe (8.8). Comme T est positif, on obtient

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j} - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\text{grad}} T \geq 0 \quad (8.13)$$

Il est aussi indiqué d'introduire l'énergie libre spécifique, définie par

$$\psi = e - Ts \quad (8.14)$$

qui permet d'écrire (8.13) sous la forme de l'inégalité

$$-\rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (8.15)$$

souvent appelée l'inégalité de Clausius-Duheim. L'énergie libre s'exprime en fonction de l'entropie comme variable indépendante alors que la variable indépendante est la température pour l'énergie libre.

Le membre de gauche de (8.15) est la dissipation notée d . Le second principe nous apprend donc que la dissipation doit toujours être positive. Cette dissipation se compose de deux termes :

- la dissipation intrinsèque (ou mécanique) volumique

$$d^m = -\rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j} \quad (8.16)$$

- la dissipation volumique thermique

$$d^{th} = - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\text{grad}}T}{T} \quad (8.17)$$

Il est d'usage d'imposer le caractère positif de ces deux dissipations indépendamment.

La positivité de la dissipation thermique implique que le produit scalaire du vecteur courant de chaleur \vec{q} et du gradient de température est négatif. Lorsque la conduction est isotrope, la relation liant \vec{q} et $\text{grad}T$ s'écrit :

$$\vec{q} = -k \vec{\text{grad}}T \quad (8.18)$$

où k est le coefficient de conduction. La loi (8.18) est appelée loi de Fourier. Habituellement, on se contente de supposer que k ne dépend que de la température ou même, plus particulièrement encore, que k est une constante.

L'expression de l'énergie libre massique pour un milieu thermoélastique en hypothèse HPP est

$$\psi(T, \bar{\epsilon}) = \psi_0 - s_0(T - T_0) + \frac{1}{2\rho_0} \left(\lambda(\epsilon_{kk})^2 + 2\mu\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - 2\frac{E}{1-2\nu}\alpha(T - T_0)\epsilon_{kk} - \rho_0 \frac{c}{T_0}(T - T_0)^2 \right) \quad (8.19)$$

où

- ψ_0 est l'énergie libre à déformation nulle et une température de référence T_0 ;
- s_0 est l'entropie à déformation nulle et température de référence T_0 ;
- c est la chaleur spécifique à déformation constante.

Calculons l'expression de la dissipation mécanique pour un matériau thermoélastique. Il vient¹

$$d^m = -\rho_0 \left(\frac{d\psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j} \quad (8.20)$$

$$= -\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + s \frac{dT}{dt} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j} \quad (8.21)$$

$$= -(\lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - \frac{E\alpha}{1-2\nu}(T - T_0)\delta_{ij})v_{i,j} + \sigma_{ij}v_{i,j} \quad (8.22)$$

$$= 0 \quad (8.23)$$

où on s'est servi de

- $\dot{\epsilon}_{ij} = v_{i,j}$;
- $\frac{\partial\psi}{\partial T} = -s$ par définition de l'énergie libre ;
- la relation de comportement 6.83.

La dissipation mécanique est donc nulle pour un matériau thermoélastique (il est réversible).

1. Nous nous plaçons dans l'hypothèse HPP et les densités actuelles ρ sont très proches des densités initiales avant déformation ρ_0 .

Bibliographie

- [1] J. Garrigues. *Mécanique des milieux continus*. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, 2002. cours disponible en ligne sur <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/>.
- [2] L. Sédov. *Mécanique des milieux continus, Tome I*. Editions MIR, Moscou, 1973.
- [3] S. Cescotto. *Eléments de mécanique des solides déformables*. Université de Liège, 1988. Polycopié à l'usage des étudiants.
- [4] J. Bonet and R.D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 0 521 57272 X hardback.
- [5] P. Germain. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Masson, 1973. tome 1.
- [6] D. Le Houedec. *Mécanique des solides*. Ecole Central de Nantes, 1999. Polycopié à l'usage des étudiants première année.
- [7] J.-F. Sini. *Mécanique des Fluides*. Ecole centrale de Nantes, 1999. Polycopié à l'usage des étudiants deuxième année.