

Première partie .  
Synthèse des filtres



# 1. Éléments de filtrage analogique

## 1.1. Introduction

Le filtrage est l'opération qui consiste à modifier les composantes spectrales d'un signal. Le filtre est un circuit qui réalise cette opération. Les intervalles de fréquence où les composants du signal sont transmises sont appelées bandes passantes ; les intervalles où les signaux sont bloqués sont désignés sous le nom de bandes d'arrêt ou d'atténuation.

### 1.1.1. Filtre idéal

Un filtre idéal est caractérisé par :

1. une réponse fréquentielle dont le module vaut 1 dans les bandes passantes ;
2. une réponse fréquentielle dont le module vaut 0 dans les bandes d'arrêt ;
3. un temps de propagation  $t_p$  qui est le même pour toutes les composantes spectrales. Ce temps de propagation constant est équivalent à une réponse fréquentielle à phase linéaire.

Ce type de filtres, purement théorique et bien entendu impossible à réaliser pratiquement, est celui vers lequel on tend avec un filtre réel. Les réponse fréquentielles des 4 filtres idéaux de base sont représentés à la figure 1.1.

### 1.1.2. Formes canoniques

Les filtres réels sont généralement représentés par des fonctions de transfert  $H(s)$  dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes en  $s$ . Ces polynômes sont ordonnés de manière croissante (forme de Bode) ou dans l'ordre décroissant (forme de Laplace). Dans chaque cas, le premier coefficient de ces polynômes doit être égal à un.

Afin de faciliter l'analyse, le tracé des réponses fréquentielles et la réalisation des filtres, ces polynômes sont généralement décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2. Ces facteurs simples font intervenir une pulsation caractéristique  $\omega_0$  et, pour ceux d'ordre 2, un facteur de qualité  $Q_0$  ou, son inverse, le coefficient d'amortissement  $\zeta = 1/2Q_0$ .

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

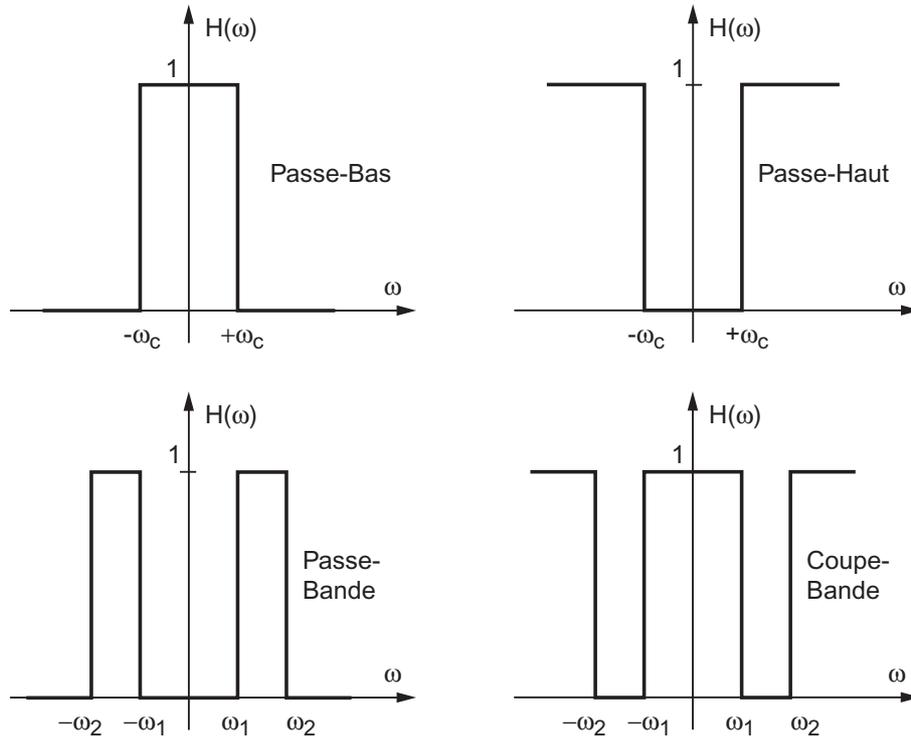


FIG. 1.1.: Réponses fréquentielles des filtres idéaux

L'ensemble des possibilités de description des filtres se réduit donc aux facteurs simples suivants représentés sous la forme de Bode :

$$\begin{aligned} \frac{s}{\omega_1} & & 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \\ 1 + \frac{s}{\omega_1} & & 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

On y trouve :

- les pulsations caractéristiques  $\omega_1$  et  $\omega_0$  ;
- le facteur de qualité  $Q_0$  ;
- le coefficient d'amortissement  $\zeta = 1/(2Q_0)$ .

Voici un exemple d'écriture de fonctions de transfert dans les formes de Bode et de Laplace :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1 + s/\omega_1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \\ H(s) &= \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{(s + \omega_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \end{aligned}$$

### 1.1.3. Formes normalisées

Il est d'usage de décrire ces fonctions de transfert à l'aide de polynômes normalisés dans lesquels les pulsations caractéristiques sont unitaires. Les polynômes normalisés

d'ordre 1 s'écrivent alors sous la forme :

$$P_1(s) = s + 1 \quad (1.2)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_1(s) = \begin{cases} s + \omega_1 \\ 1 + \frac{s}{\omega_1} \end{cases} \quad (1.3)$$

Les polynômes normalisés d'ordre 2 s'écrivent sous la forme :

$$P_2(s) = s^2 + 2\zeta s + 1 \quad (1.4)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_2(s) = \begin{cases} s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \\ 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2} \end{cases} \quad (1.5)$$

#### 1.1.4. Filtrés d'ordre 2

Les filtres fondamentaux sont du type passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. A ceux-ci, on peut en ajouter beaucoup d'autres tels que, par exemple, les filtres correcteurs d'amplitude et les filtres déphaseurs.

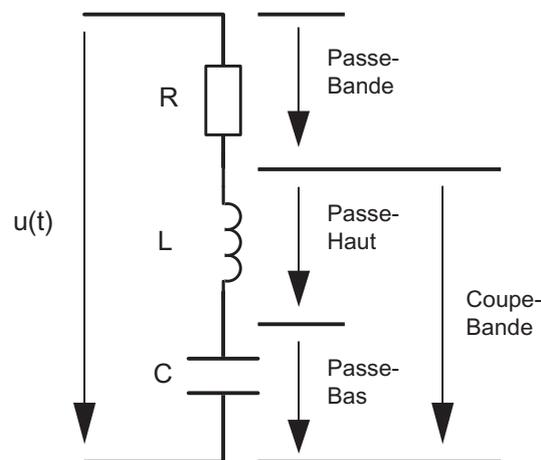


FIG. 1.2.: Filtrés d'ordre 2 réalisé avec un circuit série RLC

La figure 1.2 montre comment le circuit RLC permet de réaliser les 4 filtres de base. Suivant l'endroit où l'on recueille la tension de sortie, on trouve en effet :

- le filtre passe-bas aux bornes de la capacité

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (1.6)$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

– le filtre passe-bande aux bornes de la résistance

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{2\zeta (s/\omega_0)}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (1.7)$$

– le filtre passe-haut aux bornes de l'inductance

$$H_{PH}(s) = \frac{(s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (1.8)$$

– le réjecteur de bande aux bornes de l'inductance et de la capacité

$$H_{R\Delta}(s) = \frac{1 + (s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (1.9)$$

Dans le cas du filtre passe-bande d'ordre 2, on n'oubliera pas les relations importantes suivantes :

$$\Delta\omega \equiv \omega_s - \omega_i = \frac{\omega_0}{Q_0}, \quad \omega_0^2 = \omega_s \cdot \omega_i \quad (1.10)$$

où  $\omega_i$ ,  $\omega_s$ ,  $\Delta\omega$  sont, respectivement, les pulsations de coupure inférieure, supérieure et la bande passante du filtre.

## 1.2. Filtres optimums

### 1.2.1. Gabarit

Contrairement au filtre idéal, un filtre réel possède une bande de transition entre les bandes passantes et d'arrêt et les spécifications du filtre sont généralement données à l'aide d'un gabarit (figure 3.1). Celui-ci précise les bandes passantes, bandes de transition et bandes d'arrêt souhaitées.

A la donnée du gabarit, on peut ajouter des spécifications telles que

- l'amplitude de l'ondulation acceptée dans les bandes passantes et/ou d'arrêt
- l'uniformité du temps de propagation dans la bande passante (phase linéaire).

Il est important de relever ici que les gabarits ne sont pas toujours aussi simples que celui de la figure 3.1. Pour exemple, vous trouverez à la figure 1.4 le gabarit que doivent respecter les transmissions téléphoniques aux USA.

### 1.2.2. Approximations

Suivant le cahier des charges donné, la réalisation d'un filtre passe-bas conduit à des fonctions de transfert dont les dénominateurs sont des polynômes qui optimisent au mieux les contraintes demandées. Ces polynômes, appelés polynômes d'approximation, réalisent des filtres caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

- une bande passante plate au maximum pour les **filtres de Butterworth** ;

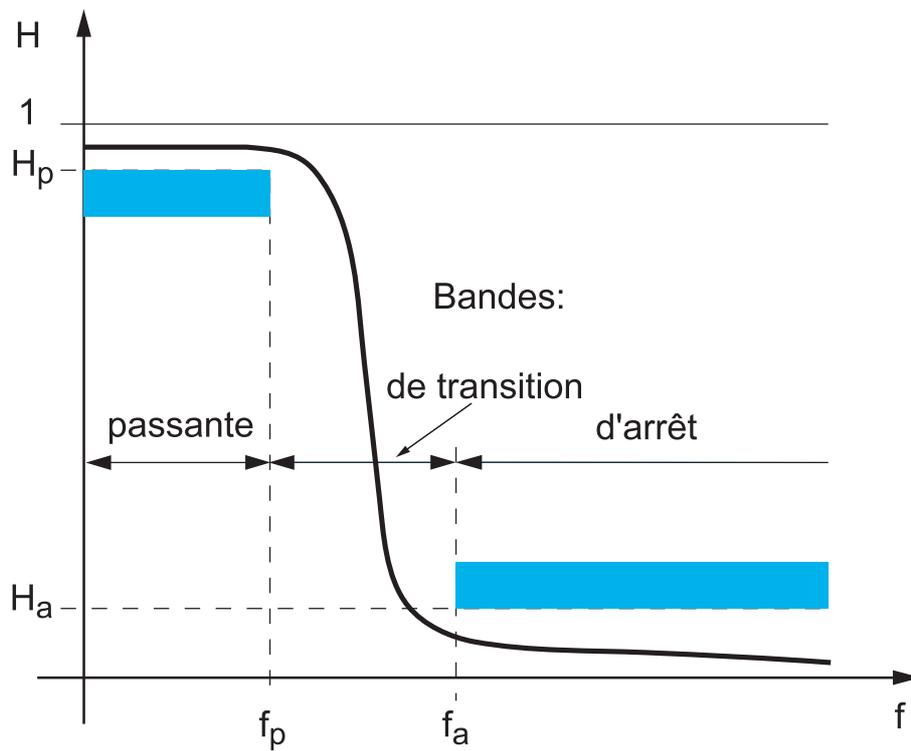


FIG. 1.3.: Gabarit pour un filtre passe-bas

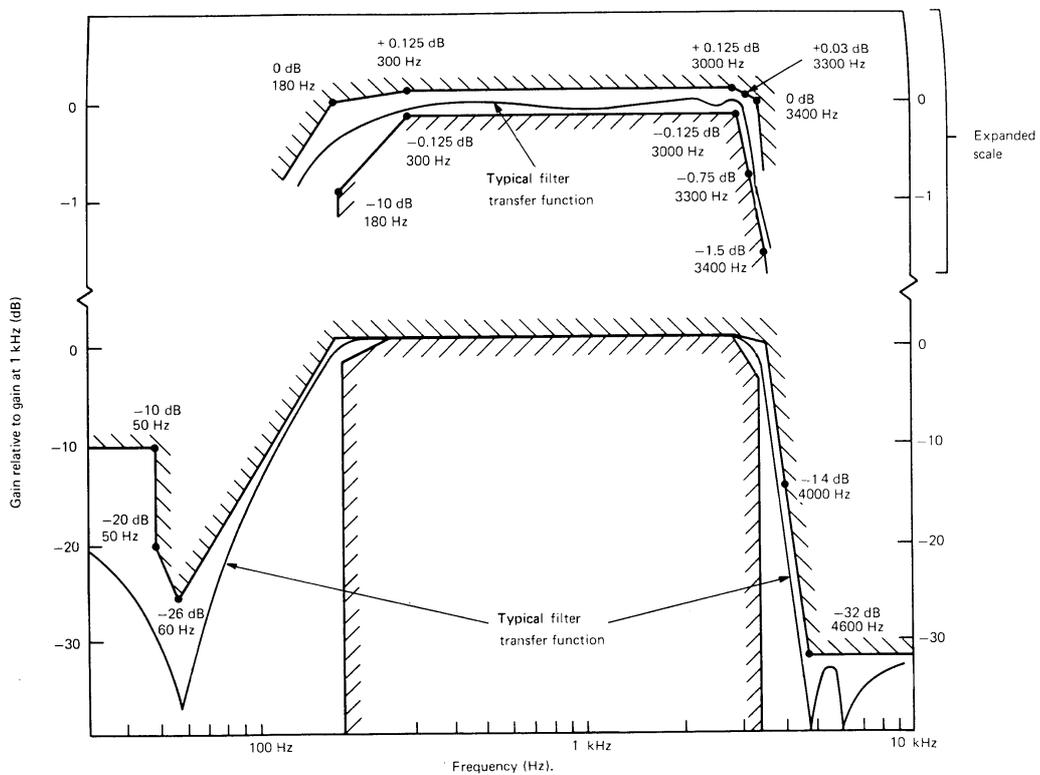


FIG. 1.4.: Gabarit de transmission téléphonique (Copyright 1975, ATT Company)

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

- un temps de propagation uniforme (ou une phase linéaire) dans la bande passante pour les **filtres de Bessel** ;
- une bande de transition étroite obtenue au dépend d'une ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande passante pour les **filtres de Tchebycheff de type I**.

Les filtres ci-dessus sont des filtres dits tout pôles pour lesquels le numérateur est d'ordre 0. Leurs fonctions de transfert s'écrivent alors sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \quad (1.11)$$

D'autres approximations de filtres réels existent comme par exemple :

- les **filtres de Tchebycheff de type II** qui n'ont pas d'ondulations dans la bande passante mais en possèdent dans la bande d'arrêt ;
- les **filtres elliptiques** pour lesquels on accepte des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt.

Les fonctions de transfert de ces filtres sont alors décrites par un rapport de deux polynômes ;

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.12)$$

Suivant la nature du filtre les performances sont sensiblement différentes ; elles sont présentées dans le tableau 1.1.

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible

TAB. 1.1.: Caractéristiques selon le type de filtres [4]

### 1.2.3. Temps de propagation

On sait que le déphasage est une mesure du décalage temporel  $t_d$  entre deux signaux périodiques de même nature et que l'on a la relation suivante :

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t_d}{T}$$

De manière équivalente, cela s'écrit

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{T} t_d = \omega t_d \quad \Leftrightarrow \quad t_d = \frac{\varphi(\omega)}{\omega} = T \frac{\varphi(\omega)}{2\pi}$$

Lorsque l'on s'intéresse au *temps de propagation*  $t_p$  d'un filtre réel, celui-ci est négatif et on le définit comme suit

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (1.13)$$

Sa valeur est généralement donnée pour les basses fréquences

$$t_p = -\left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (1.14)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant, toutes les composantes spectrales d'un signal sont retardées du même temps  $t_p$  et le signal temporel est ainsi peu déformé.

### 1.2.4. Illustration des réponses fréquentielles et temporelles

Pour cette illustration, on considère quatre filtres d'ordre 5 et de nature différente. Les figures 1.5 à 1.8 illustrent le comportement temporel et fréquentiel des filtres de Butterworth, Bessel et Tchebycheff I en utilisant des échelles logarithmiques (diagrammes de Bode).

Dans un but de comparaison, on y a ajouté un filtre passe-bas composé de 5 cellules identiques d'ordre 1. Afin que les comparaisons se fassent sur une base commune, tous les filtres ont la même pulsation de coupure, à savoir,  $\omega_c = 1$  [rad/sec].

La figure 1.9 permet de comparer les réponses de l'ensemble des filtres. La figure 1.10 utilise des axes linéaires afin de mettre en évidence le comportement de la phase et celui du temps de propagation des 4 filtres.

# 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

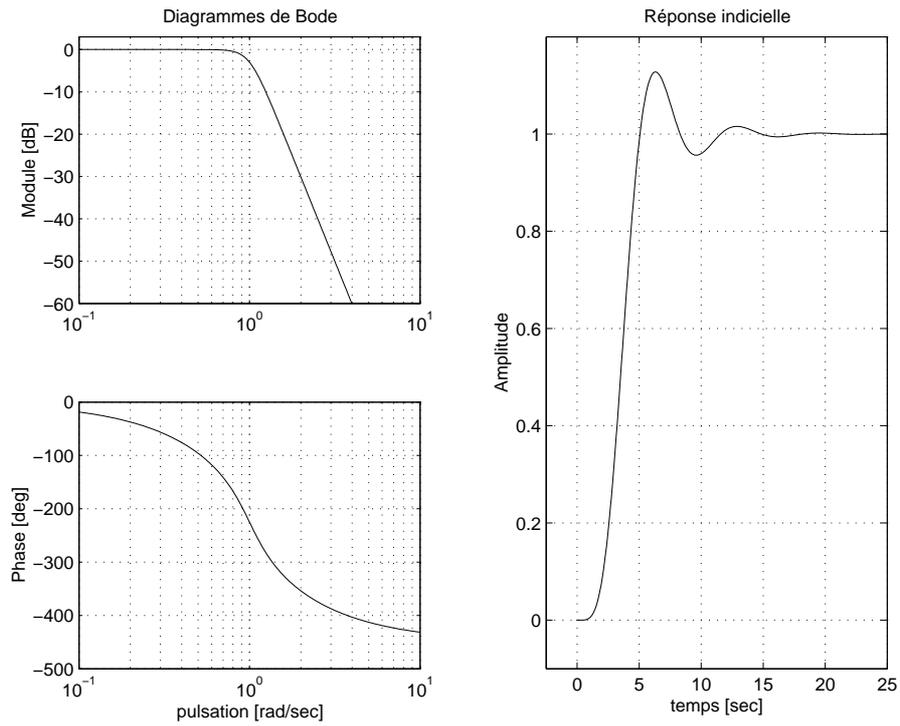


FIG. 1.5.: Filtre de Butterworth ( $n=5$ )

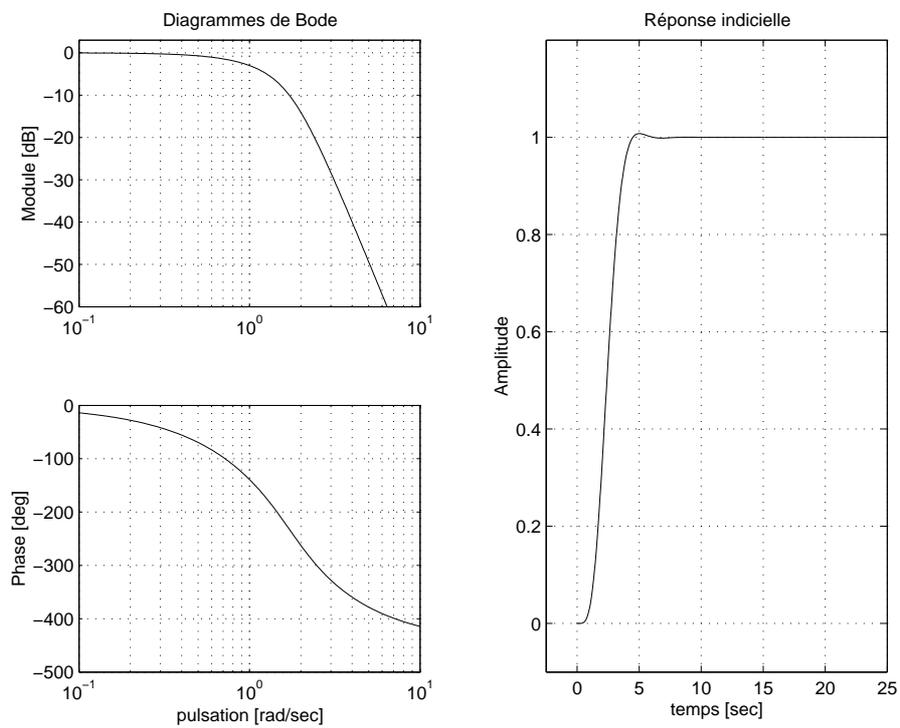


FIG. 1.6.: Filtre de Bessel ( $n=5$ )

## 1.2. Filtres optimums

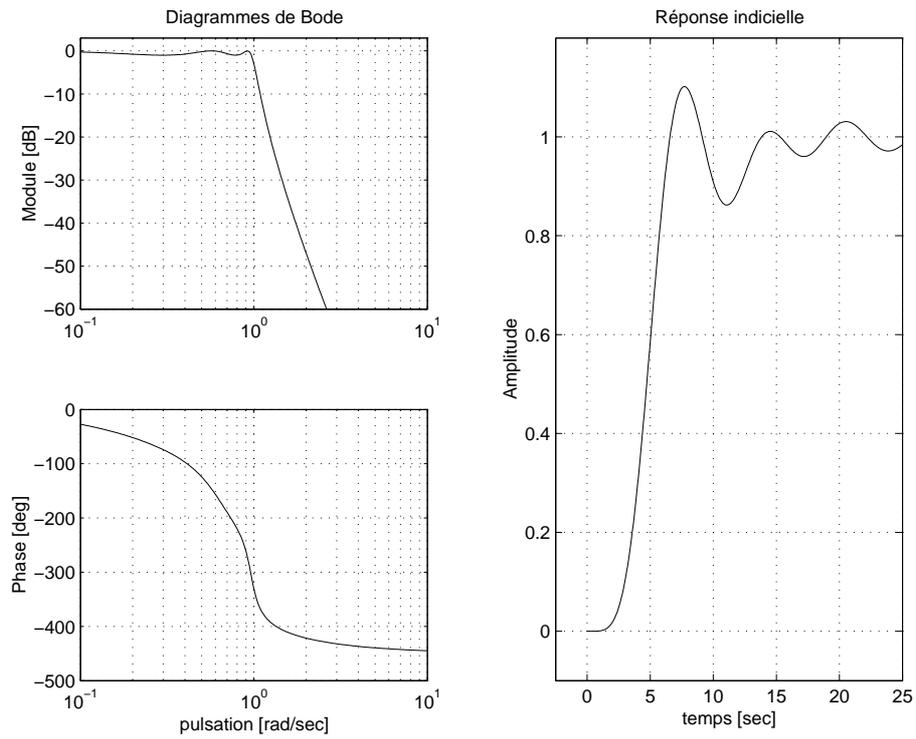


FIG. 1.7.: Filtre de Tchebycheff ( $n=5$ )

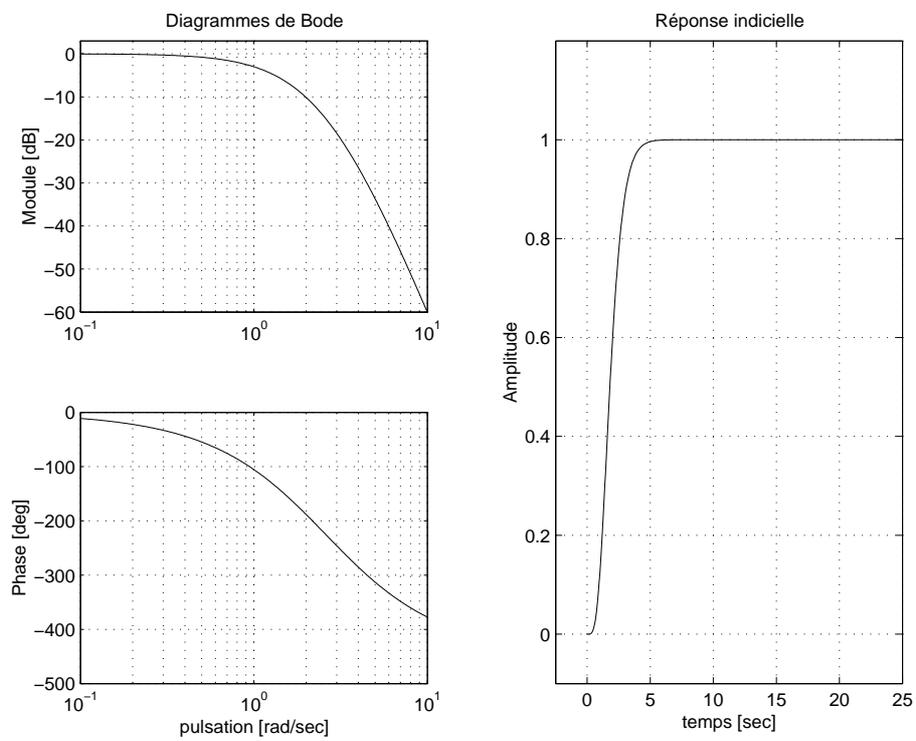


FIG. 1.8.: Filtre composé de 5 cellules d'ordre 1

# 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

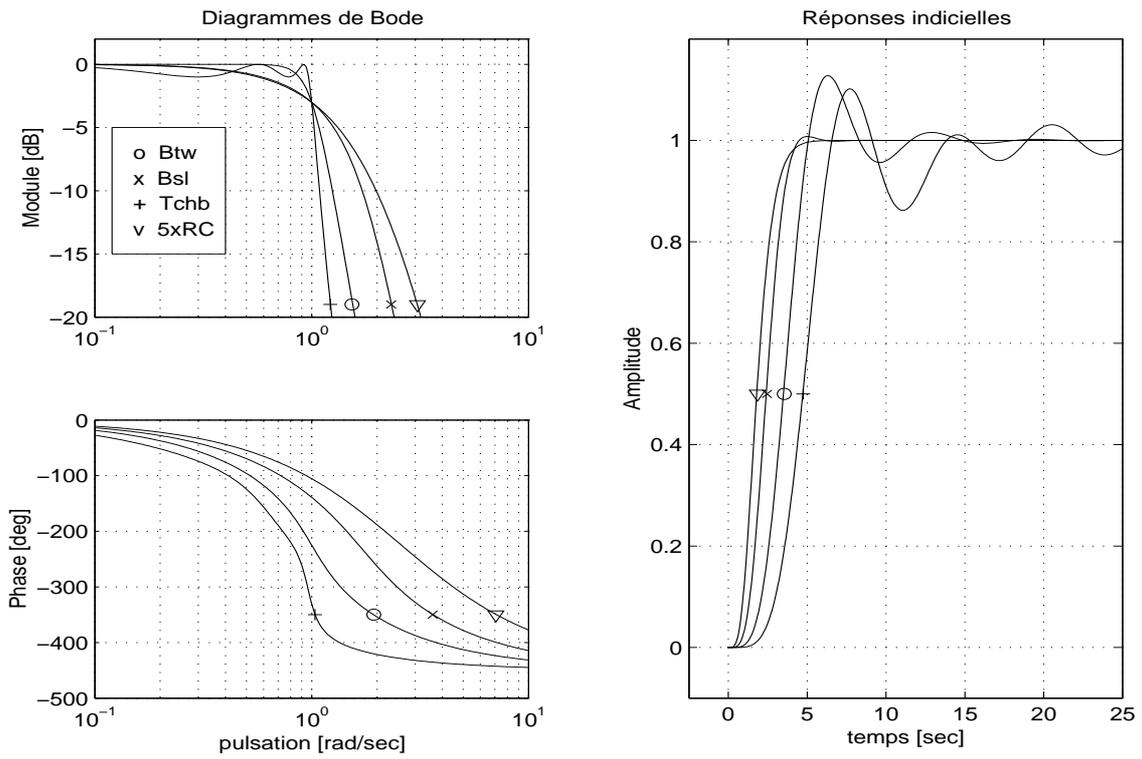


FIG. 1.9.: Comparaison des réponses fréquentielles et indicielles

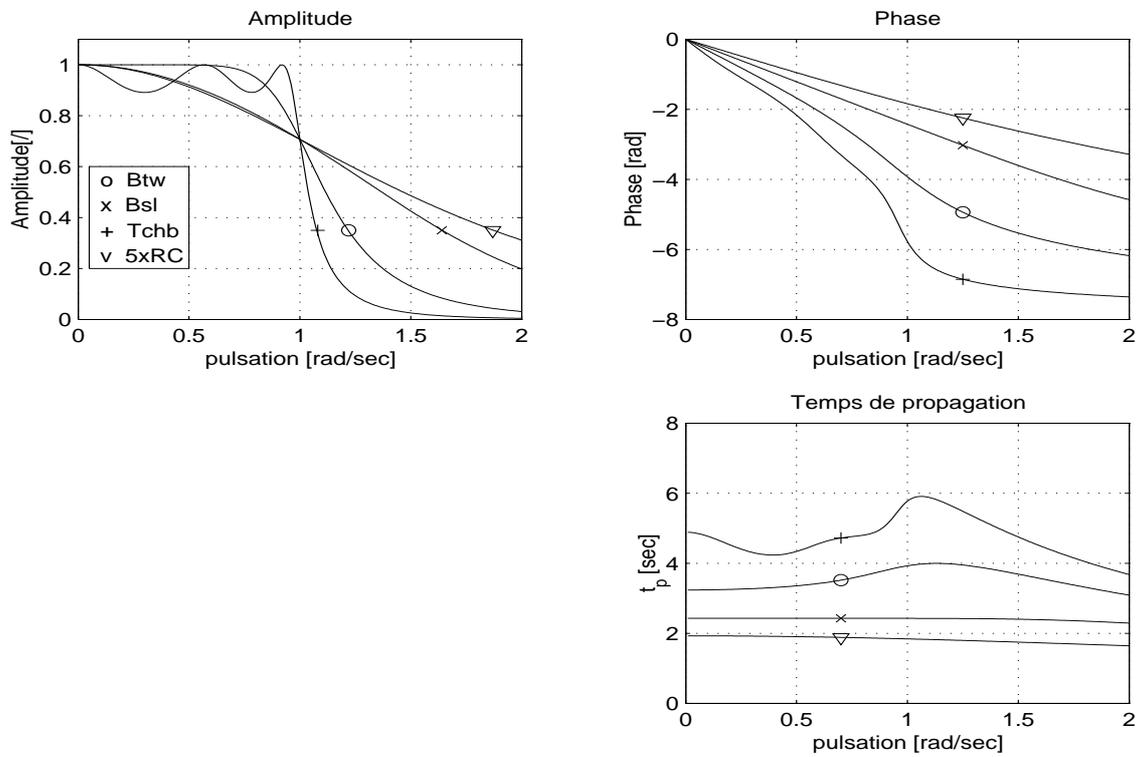


FIG. 1.10.: Diagrammes linéaires et temps de propagation

### 1.3. Filtrés de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont caractérisés par une réponse en amplitude extrêmement plate dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (1.15)$$

On notera que cette réponse est normalisée par rapport à la pulsation de coupure  $\omega_c$  pour laquelle le filtre possède une atténuation de  $\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$ .

En écrivant la fonction de transfert avec la variable de Laplace et en choisissant  $\omega_c = 1$ , on obtient une description équivalente :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (1.16)$$

On voit ainsi que le dénominateur de cette description est un polynôme d'ordre  $2n$

$$D(s) = 1 + (-s^2)^n = 0 \quad (1.17)$$

dont les racines sont uniformément réparties sur un cercle de rayon unité. L'angle entre chaque racine vaut  $\pi/n$  et, suivant que l'ordre est pair ou impair, on aura les situations illustrées par la figure 1.11.

On notera que les pôles à parties réelles positives sont instables. Ils sont dus à  $H(-s)$ , la partie non réalisable de la fonction de transfert utilisée pour décrire le module de la réponse fréquentielle. Les pôles restant représentent la fonction de transfert  $H(s)$  du filtre que l'on désire réaliser.

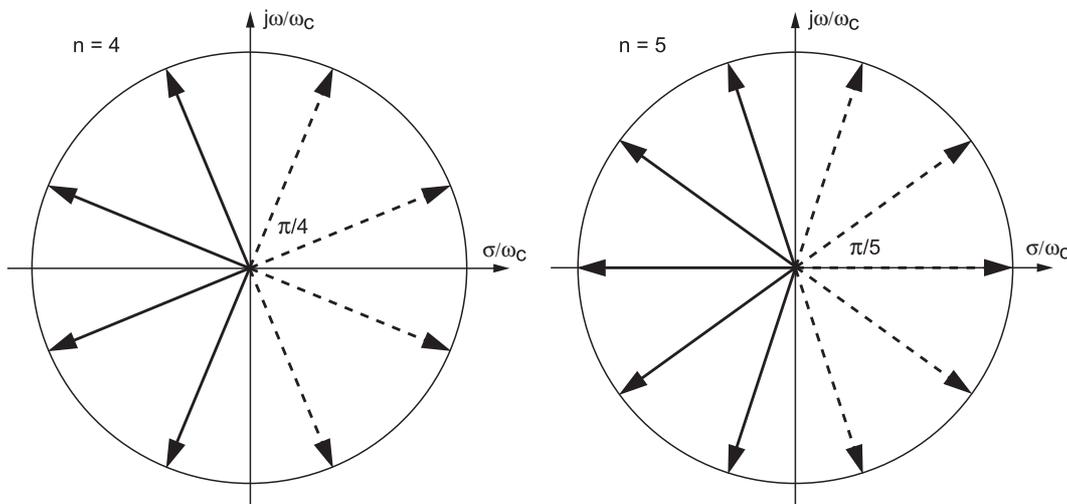


FIG. 1.11.: Position des pôles pour un filtre de Butterworth

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

Comme on l'a dit plus haut, les filtres passe-bas étudiés ici sont des filtres tout pôles décrits de manière générale par :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (1.18)$$

Pour calculer le polynôme  $A(s)$ , il suffit de connaître les coordonnées de chacun des pôles correspondant aux trinômes constitutifs du polynôme. En effet, si l'on a  $p_{1,2} = -a \pm jb$ , il vient :

$$A(s) = \begin{cases} (s + a + jb)(s + a - jb) \\ s^2 + 2a s + a^2 + b^2 \\ s^2 + 2a s + 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

avec  $a^2 + b^2 = 1$  car les racines normalisées par rapport à  $\omega_c$  se situent sur un cercle de rayon unité.

Dans le cas d'un polynôme d'ordre 5, ce dernier sera décomposé en 3 polynômes de base provenant du pôle réel et des 2 paires de pôles complexes :

Pôles	Polynômes
$p_1 = -1$	$P_1(s) = 1 + s$
$p_{2,3} = -0.809 \pm j0.588$	$P_2(s) = 1 + 1.618 s + s^2$
$p_{4,5} = -0.309 \pm j0.951$	$P_3(s) = 1 + 0.618 s + s^2$

On notera que pour chaque cellule d'ordre 2, le facteur de qualité correspondant  $Q_{0k}$  est donné par l'inverse du deuxième coefficient. Ainsi, pour le polynôme d'ordre 5, on aura  $Q_{02} = 1/1.618$  et  $Q_{03} = 1/0.618$ .

### 1.3.1. Tableau des polynômes de Butterworth

Connaissant la position des pôles d'un polynôme d'ordre  $n$  quelconque, il est aisé d'en calculer les trinômes constitutifs. Ceux-ci sont donnés dans le tableau 1.2.

### 1.3.2. Ordre et pulsation caractéristique d'un filtre

Dans l'analyse des filtres, il est fréquent d'exprimer la réponse fréquentielle à l'aide de l'atténuation  $A(j\omega)$  définie comme l'inverse de  $H(j\omega)$  :

$$A(j\omega) \equiv \frac{1}{H(j\omega)} \quad (1.20)$$

$n$	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.414s + s^2)$
3	$(1 + s)(1 + 1.000s + s^2)$
4	$(1 + 1.848s + s^2)(1 + 0.765s + s^2)$
5	$(1 + s)(1 + 1.618s + s^2)(1 + 0.618s + s^2)$
6	$(1 + 1.932s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.518s + s^2)$
7	$(1 + s)(1 + 1.802s + s^2)(1 + 1.247s + s^2)(1 + 0.445s + s^2)$
8	$(1 + 1.962s + s^2)(1 + 1.663s + s^2)(1 + 1.111s + s^2)(1 + 0.390s + s^2)$
9	$(1 + s)(1 + 1.879s + s^2)(1 + 1.532s + s^2)(1 + 1.000s + s^2)(1 + 0.347s + s^2)$
10	$(1 + 1.975s + s^2)(1 + 1.782s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.908s + s^2)(1 + 0.313s + s^2)$

TAB. 1.2.: Quelques polynômes de Butterworth

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

L'atténuation d'un filtre de Butterworth est alors décrite par

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (1.21)$$

Comme la connaissance des 2 paramètres  $n$  et  $\omega_c$  suffit à caractériser la réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth, la donnée d'un gabarit passe-bas à l'aide de 2 coordonnées suffit pour déterminer complètement le filtre (figure 1.12).

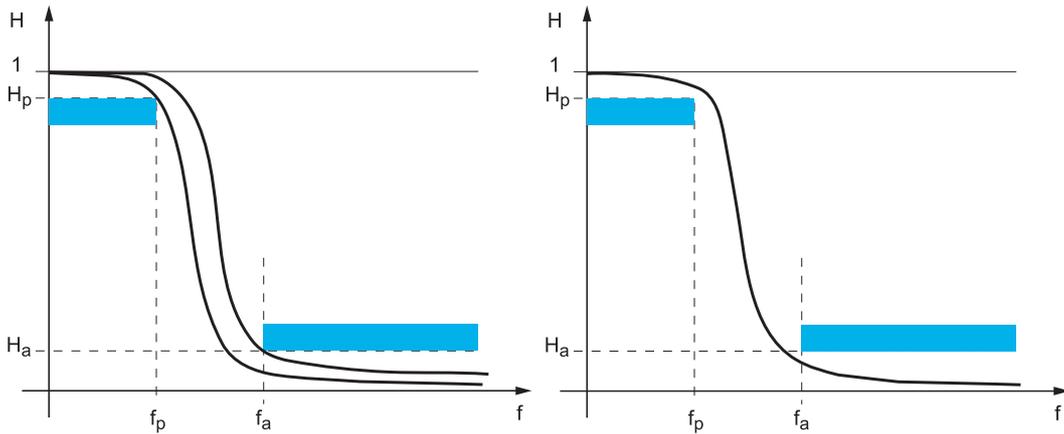


FIG. 1.12.: Gabarit et réalisation d'un filtre de Butterworth

En effet, sachant que les atténuations aux points  $P$  (fin de la bande passante) et  $A$  (début de la bande d'arrêt) s'écrivent :

$$|A(j\omega_p)|^2 \equiv A_p^2 = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (1.22)$$

$$|A(j\omega_a)|^2 \equiv A_a^2 = 1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (1.23)$$

On résout aisément ce système de 2 équations à 2 inconnues en effectuant le rapport des deux équations après avoir passé la valeur 1 dans le membre de gauche. Prenant le logarithme des deux membres de l'équation, on obtient finalement :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log \left[ (A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1) \right]}{\log (\omega_p / \omega_a)} \quad (1.24)$$

Une fois l'ordre connu, on peut calculer la pulsation de coupure à partir d'une des deux équations d'atténuation. Ce qui donne

$$\omega_c = \frac{\omega_m}{(A^2(\omega_m) - 1)^{1/2n}} \quad (1.25)$$

avec

$$\omega_m = \omega_p \text{ ou } \omega_a$$

Comme la valeur trouvée pour l'ordre  $n$  du filtre n'est généralement pas un entier, on l'arrondit à une valeur entière supérieure. On peut ainsi calculer deux valeurs différentes pour  $\omega_c$  : l'une avec la pulsation  $\omega_p$  et l'autre avec la pulsation  $\omega_a$ .

En choisissant l'une ou l'autre de ces deux pulsations caractéristiques, la courbe de réponse fréquentielle touchera l'une ou l'autre partie du gabarit (figure 1.12a); ce qui n'est pas satisfaisant. Par contre, en prenant pour  $\omega_c$  la moyenne géométrique des deux valeurs ainsi trouvées, on permettra à la courbe de réponse fréquentielle de ne pas toucher le gabarit (figure 1.12b).

### 1.3.3. Synthèse d'un filtre de Butterworth

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité ne comportant pas d'oscillations dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned} H_p &= -1 \text{ dB} & f_p &= 1 \text{ kHz} \\ H_a &= -40 \text{ dB} & f_a &= 3 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Pour ce faire on demande de :

1. trouver l'ordre  $n$  et la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre ;
2. calculer les facteurs de qualité et le polynôme de réalisation ;
3. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

**Solution :**

1. On a :

$$A_p = 1/H_p = +1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad A_p^2 - 1 = 0.2589$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \Rightarrow \quad A_a^2 - 1 \simeq 10^4$$

d'où l'on tire :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log s [(A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1)]}{\log (\omega_p / \omega_a)} = \frac{1}{2} \frac{\log (0.2589 / 10^4)}{\log (1/3)} = 4.80 \simeq 5$$

$$f_{c,p} = \frac{f_p}{(A_p^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{1 \text{ kHz}}{0.2589^{1/10}} = 1.145 \text{ kHz}$$

$$f_{c,a} = \frac{f_a}{(A_a^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{3 \text{ kHz}}{10^{4/10}} = 1.194 \text{ kHz}$$

On peut ainsi calculer la fréquence de coupure

$$f_c = \sqrt{f_{c,p} \cdot f_{c,a}} = 1.17 \text{ kHz}$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

2. D'après le tableau 1.2, le polynôme normalisé d'ordre 5 vaut :

$$P_{5,n}(s) = (1 + s) (1 + 1.618s + s^2) (1 + 0.618s + s^2)$$

On en déduit immédiatement les facteurs de qualité en prenant l'inverse des coefficients d'ordre 1 des deux trinômes :

$$Q_{02} = \frac{1}{1.618} = 0.618 = -5.7 \text{ dB}$$

$$Q_{03} = \frac{1}{0.618} = 1.618 = +5.7 \text{ dB}$$

En remplaçant la variable  $s$  par  $s/(2\pi f_c) = 1.36 \cdot 10^{-4} s$ , on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_5(s) = (1 + 1.36 \cdot 10^{-4} s) \cdot (1 + 2.20 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2) \cdot (1 + 0.84 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2)$$

3. Partant du polynôme  $P_5(s)$ , on en déduit  $H(s) = 1/P_5(s)$  et on peut calculer puis tracer les réponses fréquentielles de chaque cellule (figure 1.13). La somme (en dB) de ces 3 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d'ordre 5 (figure 1.14). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont également présentées dans la figure 1.15.

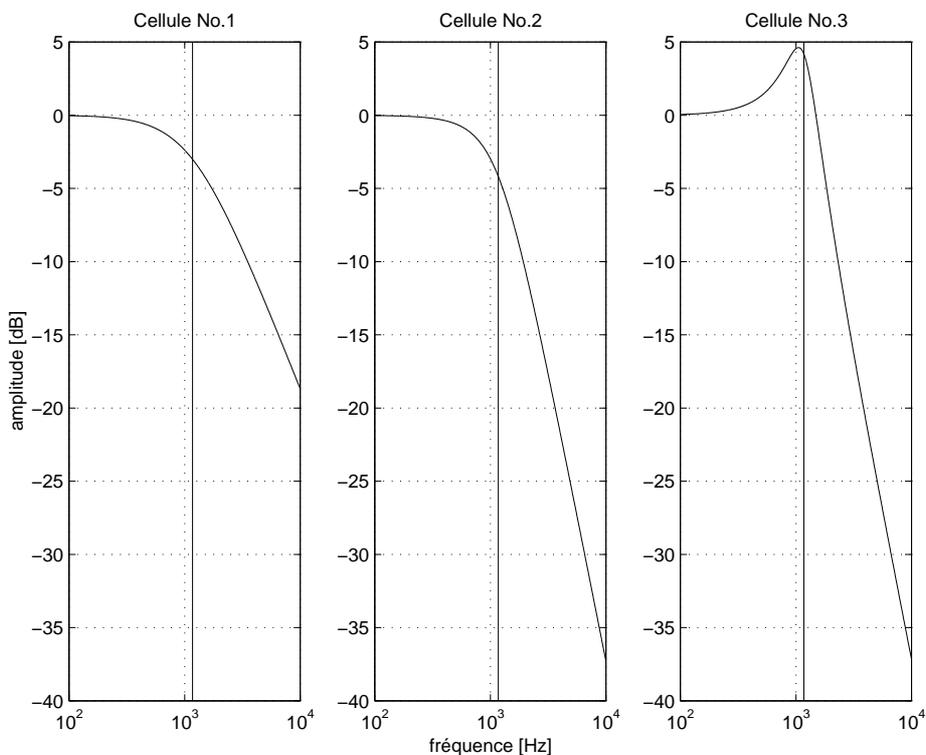


FIG. 1.13.: Réponses fréquentielles de chaque cellule

### 1.3. Filtres de Butterworth

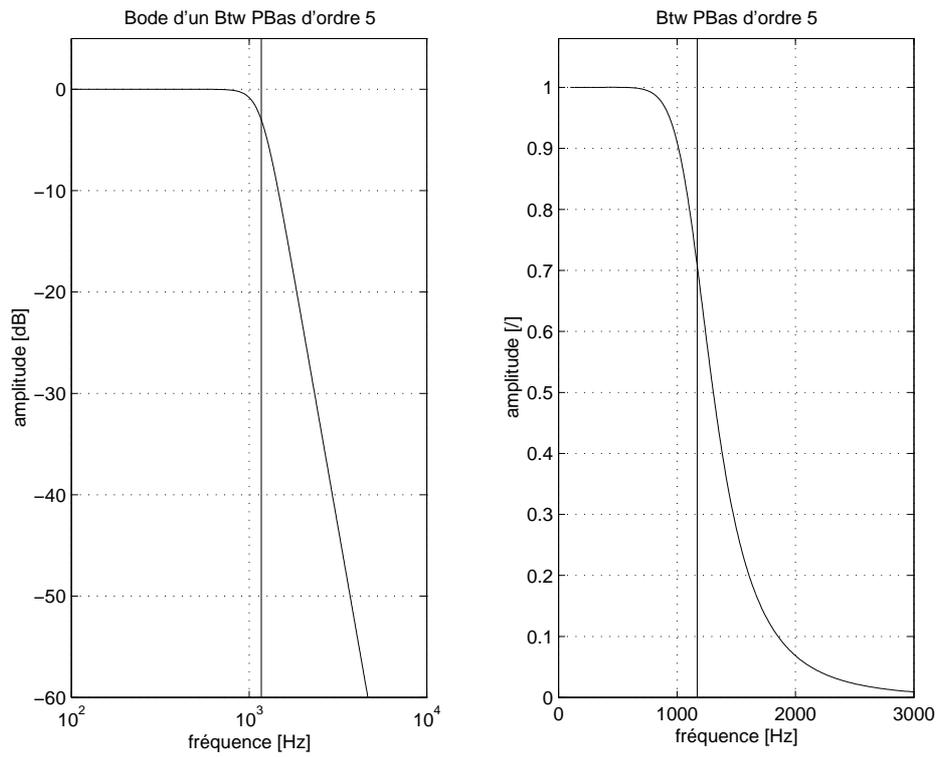


FIG. 1.14.: Réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

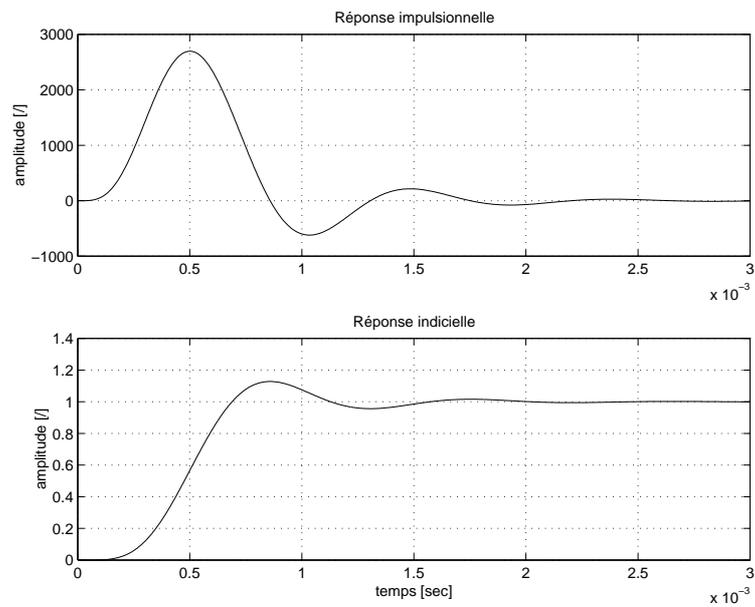


FIG. 1.15.: Réponses temporelles d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

## 1.4. Filtres de Tchebycheff

Lorsque les spécifications du gabarit permettent une ondulation dans la bande passante du filtre, on utilise fréquemment un filtre de Tchebycheff de type I dont la réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_r)^{2n}} \quad (1.26)$$

avec  $\omega_r$  délimitant la bande dans laquelle on accepte une ondulation  $r$  généralement exprimée en dB. On voit donc que pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation n'est plus la pulsation de coupure mais la pulsation d'ondulation  $\omega_r$ .

La fonction  $C_n$  décrivant la réponse fréquentielle du filtre est oscillante dans la bande passante et croissante dans la bande d'arrêt. Elle est décrite par :

$$C_n(\omega/\omega_r) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{acosh}(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r > 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

L'amplitude  $\epsilon$  de la fonction  $C_n$  est liée à l'ondulation  $r$  acceptée dans la bande passante au travers de la relation suivante :

$$1 + \epsilon^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^2 = 10^{r_{dB}/10} - 1 \quad (1.28)$$

### 1.4.1. Caractéristique des filtres de Tchebycheff

La réponse fréquentielle des filtres de Tchebycheff est illustrée par la figure 1.16 pour laquelle on a pris  $r = 1 \text{ dB}$ . On constate que le nombre d'extrémums présents dans la bande d'ondulation est égal à l'ordre du filtre et que les ondulations se situent au-dessus ou au-dessous de 1 suivant que le filtre est d'ordre pair ou impair.

On se souviendra que la pulsation de la bande d'ondulation  $\omega_r$  sert de pulsation de normalisation et qu'elle est reliée à la pulsation de coupure  $\omega_c$  par la relation :

$$\omega_c = \omega_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \quad (1.29)$$

### 1.4.2. Calcul de l'ordre d'un filtre de Tchebycheff

Comme la donnée de la largeur de la bande d'ondulation fixe la pulsation de normalisation  $\omega_r$ , il suffit de connaître un point de la bande d'arrêt et l'amplitude  $\epsilon$  de l'ondulation admise pour déterminer l'ordre  $n$  du filtre [1] :

$$n \geq \frac{\log\left(\sqrt{A_a^2 - 1} + \sqrt{A_a^2 - 1 - \epsilon^2}\right) - \log(\epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a/\omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a/\omega_r\right)^2 - 1}\right)} \quad (1.30)$$

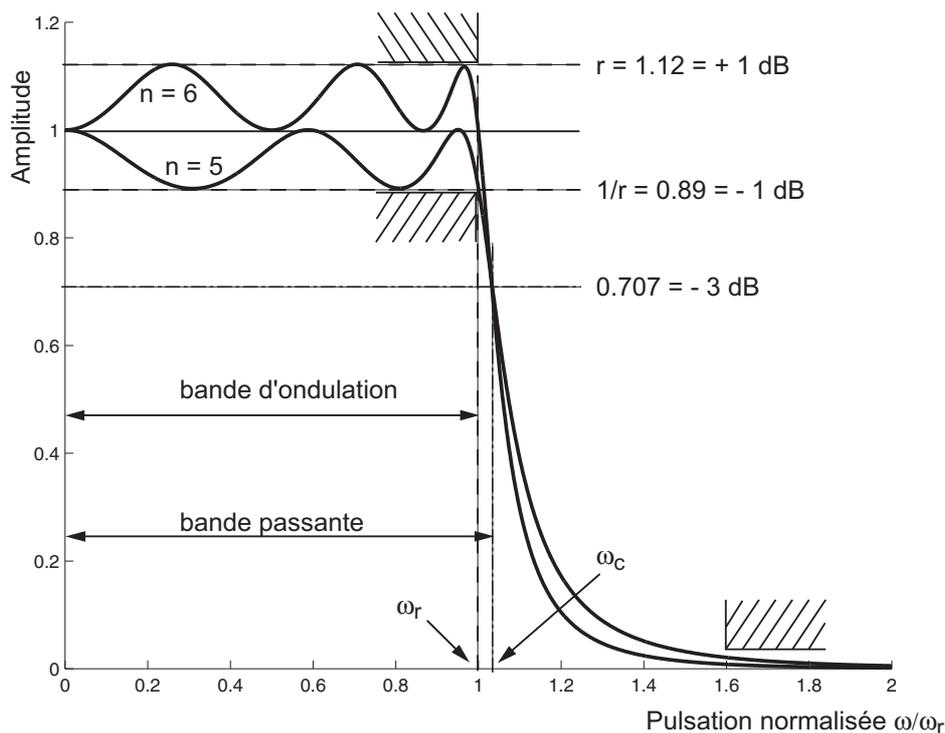


FIG. 1.16.: Réponse fréquentielle des filtres Tchebycheff

Dans la situation fréquente où l'atténuation  $A_a$  est plus grande que 10, cette expression peut être simplifiée pour donner :

$$n \geq \frac{\log(2 A_a / \epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a / \omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_r\right)^2 - 1}\right)} \quad (1.31)$$

### 1.4.3. Tableau des polynômes de Tchebycheff

On peut montrer que les racines des polynômes réalisant la réponse fréquentielle décrite par l'équation (1.26) se situent sur une ellipse dont le petit diamètre dépend de l'ondulation  $r$ . A partir de cette ellipse, on peut calculer les polynômes de Tchebycheff dont quelques uns sont données dans le tableau 1.3 pour  $r = 0.5$  et  $1.0 \text{ dB}$ .

### 1.4.4. Synthèse d'un filtre de Tchebycheff

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité pour lequel on accepte une ondulation de 1 dB dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$H_r = 1 \text{ dB} \quad f_r = 1 \text{ kHz}$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

$n$	$P(s)$ pour $r = 0.5 \text{ dB} = 1.059$ ou $\epsilon = 0.3493$
1	$(1 + 0.349s)$
2	$(1 + 0.940s + 0.659s^2)$
3	$(1 + 1.596s)(1 + 0.548s + 0.875s^2)$
4	$(1 + 2.376s + 2.806s^2)(1 + 0.330s + 0.940s^2)$
5	$(1 + 2.760s)(1 + 1.230s + 2.097s^2)(1 + 0.216s + 0.965s^2)$
6	$(1 + 3.692s + 6.370s^2)(1 + 0.719s + 1.695s^2)(1 + 0.152s + 0.977s^2)$
7	$(1 + 3.904s)(1 + 1.818s + 3.939s^2)(1 + 0.472s + 1.477s^2)(1 + 0.112s + 0.984s^2)$
8	$(1 + 4.981s + 11.36s^2)(1 + 1.037s + 2.788s^2)(1 + 0.335s + 1.349s^2)(1 + 0.086s + 0.988s^2)$
$n$	$P(s)$ pour $r = 1.0 \text{ dB} = 1.122$ ou $\epsilon = 0.5089$
1	$(1 + 0.509s)$
2	$(1 + 0.996s + 0.907s^2)$
3	$(1 + 2.024s)(1 + 0.497s + 1.006s^2)$
4	$(1 + 2.411s + 3.579s^2)(1 + 0.283s + 1.014s^2)$
5	$(1 + 3.454s)(1 + 1.091s + 2.329s^2)(1 + 0.181s + 1.012s^2)$
6	$(1 + 3.722s + 8.019s^2)(1 + 0.609s + 1.793s^2)(1 + 0.126s + 1.009s^2)$
7	$(1 + 4.868s)(1 + 1.606s + 4.339s^2)(1 + 0.392s + 1.530s^2)(1 + 0.092s + 1.007s^2)$
8	$(1 + 5.010s + 14.23s^2)(1 + 0.876s + 2.934s^2)(1 + 0.276s + 1.382s^2)(1 + 0.070s + 1.006s^2)$

TAB. 1.3.: Quelques polynômes de Tchebycheff

$$H_a = -40 \text{ dB} \quad f_a = 3 \text{ kHz}$$

Pour ce faire on demande de :

1. calculer l'ordre  $n$  du filtre et sa fréquence de coupure  $f_c$  ;
2. calculer les fréquence caractéristique et facteur de qualité de chaque cellule ;
3. calculer le polynôme de réalisation ;
4. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

**Solution :**

1. On a :

$$A_p = 1/H_r = r = 1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \sqrt{r^2 - 1} = 0.5089$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \text{et} \quad u_a = f_a/f_r = 3$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(2 A_a/\epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a/\omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a/\omega_r\right)^2 - 1}\right)} \\ &\geq \frac{\log(200/0.5089)}{\log\left(3 + \sqrt{3^2 - 1}\right)} = 3.39 \simeq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_c &= f_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \\ &= 1 \text{ kHz} \cdot \cosh\left(\frac{1}{4} \operatorname{acosh}(1/0.5089)\right) = 1053 \text{ Hz} \end{aligned}$$

2. Du tableau 1.3, on tire le polynôme normalisé pour une ondulation de 1 dB

$$P_{4,n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

On en déduit immédiatement les 2 facteurs de qualité

$$Q_{01} = \frac{\sqrt{3.579}}{2.411} = 0.785 = -2 \text{ dB} \quad Q_{02} = \frac{\sqrt{1.014}}{0.283} = 3.56 = +11 \text{ dB}$$

et les 2 fréquences caractéristiques

$$f_{01} = \frac{f_r}{\sqrt{3.579}} = 528 \text{ Hz} \quad f_{02} = \frac{f_r}{\sqrt{1.014}} = 993 \text{ Hz}$$

3. Effectuant le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{2\pi f_r} = 1.59 \cdot 10^{-4} s$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

sur le polynôme normalisé

$$P_{4n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_4(s) = (1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)$$

À ce polynôme correspond la fonction de transfert suivante :

$$H_4(s) = \frac{1}{(1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)}$$

dont les pulsations caractéristiques, facteurs d'amortissement et de qualité valent :

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{9.066 \cdot 10^{-8}}} = 3321 \text{ rad/sec} \qquad \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{2.568 \cdot 10^{-8}}} = 6240 \text{ rad/sec}$$

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = 528 \text{ Hz} \qquad f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = 993 \text{ Hz}$$

$$\zeta_1 = \frac{3.84 \cdot 10^{-4} \omega_{01}}{2} = 0.637 \qquad \zeta_2 = \frac{0.45 \cdot 10^{-4} \omega_{02}}{2} = 0.1405$$

$$Q_{01} = \frac{1}{2\zeta_1} = 0.785 = -2 \text{ dB} \qquad Q_{02} = \frac{1}{2\zeta_2} = 3.56 = 11 \text{ dB}$$

Les réponses fréquentielles des deux cellules sont tracées à la figure 1.17. La somme (en dB) de ces 2 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Tchebycheff d'ordre 4 (figure 1.18). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont présentées dans la figure 1.19.

### 1.5. Filtres de Bessel

Comme on vient de le voir, les filtres de Butterworth et Tchebycheff conduisent à des réponses indicielles ayant un fort dépassement malgré le fait que les amplitudes des composantes spectrales soient pratiquement maintenues à leurs valeurs dans la bande passante. Ce phénomène provient du fait que le déphasage de chacune de ces composantes n'est pas proportionnel à sa fréquence.

Avec les filtres de Bessel (dits également de Thomson), on obtient des réponses indicielles presque sans dépassement grâce au temps de propagation qui, dans la bande passante, est pratiquement indépendant de la fréquence. Cela se paye naturellement par une réponse fréquentielle en amplitude moins abrupte dans la bande de transition que les filtres précédents (le filtre idéal n'existe pas encore!).

Un temps de propagation constant (indépendant de la fréquence) signifie que toutes les composantes spectrales d'un signal sont transmises avec le même décalage temporel. L'intégrité de la forme du signal est ainsi respectée sauf pour les composantes spectrales que l'on désire supprimer par filtrage des amplitudes.

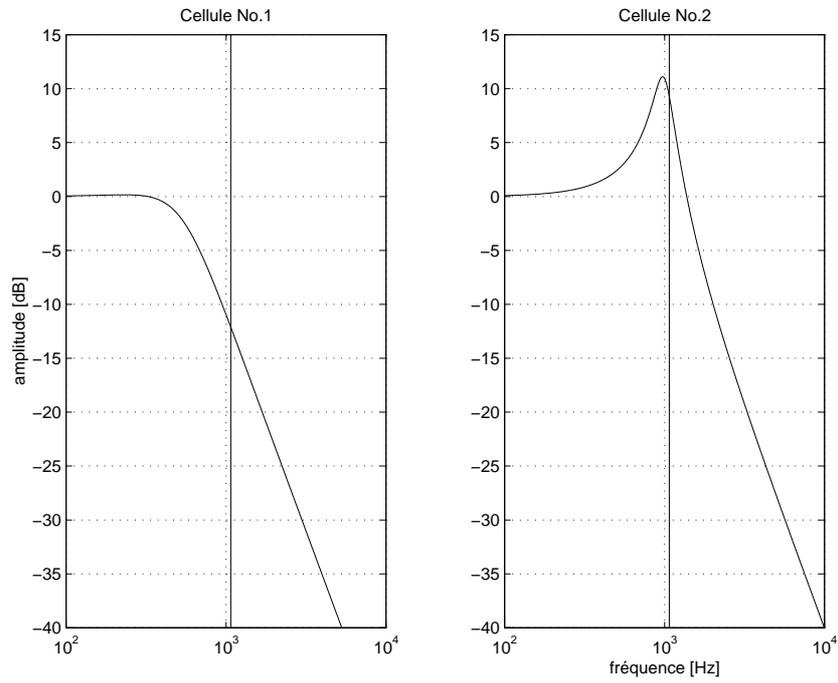


FIG. 1.17.: Réponses fréquentielles des 2 cellules

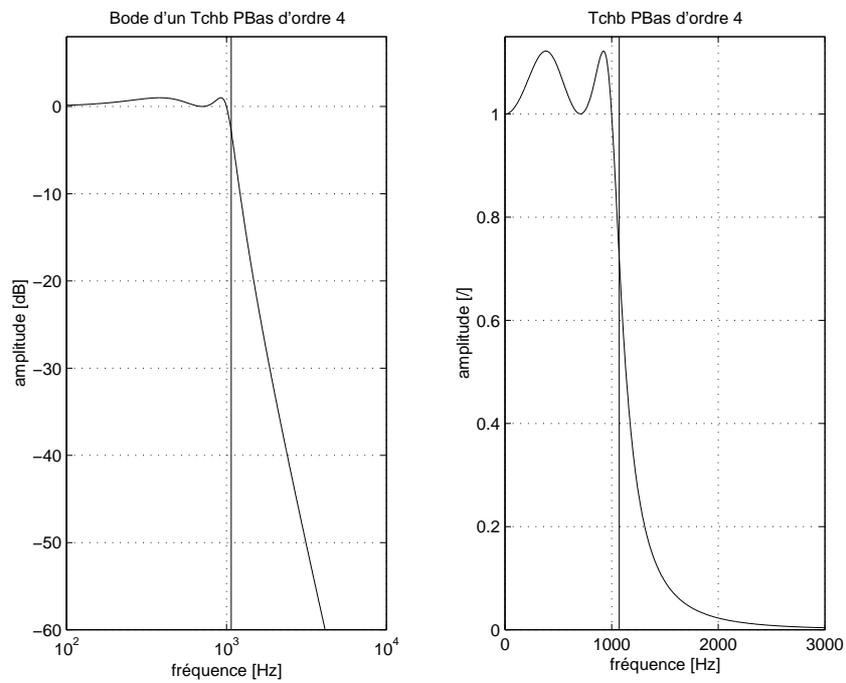


FIG. 1.18.: Réponse fréquentielle d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

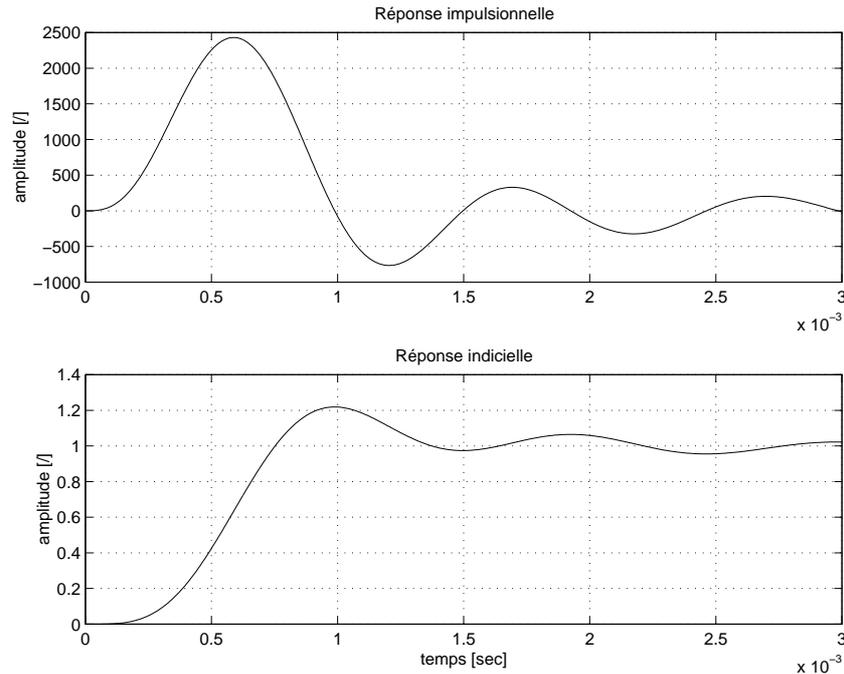


FIG. 1.19.: Réponses temporelles d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

### 1.5.1. Phase linéaire et temps de propagation

On a vu au paragraphe 1.2.3 que le temps de propagation  $t_p$  est défini comme suit

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (1.32)$$

et que sa valeur est généralement donnée pour les basses fréquences

$$t_p = -\left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (1.33)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant (indépendant de la fréquence du signal), on dit que l'on a affaire à des filtres à phase linéaire car, dans ce cas, on a bien évidemment

$$\varphi(\omega) = -\omega t_p \quad (1.34)$$

C'est la propriété essentielle des filtres de Bessel.

### 1.5.2. Temps de propagation des filtres passe-bas

On montre aisément que la phase de cellules d'ordre 1 ou 2

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \quad (1.35)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 1/Q_0 j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2} \quad (1.36)$$

valent respectivement

$$\varphi_1(\omega) = -\text{atan}(\omega/\omega_1) \quad (1.37)$$

$$\varphi_2(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) \quad (1.38)$$

Les temps de propagation valent alors

$$t_{p,1}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_1(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}(\omega/\omega_1)}{\omega}$$

$$t_{p,2}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_2(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right)}{\omega}$$

La valeur du temps de propagation est généralement donnée pour les basses-fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ); on obtient alors pour les cellules d'ordre 1 et 2, respectivement

$$t_{p,1} = \frac{1}{\omega_1}, \quad t_{p,2} = \frac{1}{Q_0\omega_0} \quad (1.39)$$

Comme un filtre d'ordre quelconque est constitué de cellules d'ordre 1 et 2, les temps de propagation s'ajoutent pour donner

$$t_p = \sum_k \frac{1}{Q_{0,k}\omega_{0,k}} \quad (1.40)$$

avec  $Q_{0,k} = 1$  pour les cellules d'ordre 1.

### 1.5.3. Fonctions de transfert

Les fonctions de transfert conduisant à un temps de propagation constant dans la bande passante possèdent un dénominateur décrit par des polynômes de Bessel

$$P(s) = \frac{1}{H(s)} = 1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n \quad (1.41)$$

dont les coefficients se calculent de manière itérative

$$b_k = \frac{2(n-k+1)}{k(2n-k+1)} b_{k-1} \quad \text{avec} \quad b_1 = 1 \quad (1.42)$$

Le tableau 1.4 donne quelques polynômes de Bessel décomposés en produits de binômes et trinômes normalisés par rapport à la pulsation de coupure du filtre. Le tableau a été construit en recherchant numériquement les racines des polynômes originaux et les pulsations de coupure.

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

$n$	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.3614s + 0.6178s^2)$
3	$(1 + 1.3225s)(1 + 0.9998s + 0.4773s^2)$
4	$(1 + 1.3389s + 0.4883s^2)(1 + 0.7738s + 0.3885s^2)$
5	$(1 + 1.5015s)(1 + 1.1408s + 0.4133s^2)(1 + 0.6219s + 0.3249s^2)$
6	$(1 + 1.2224s + 0.3891s^2)(1 + 0.9691s + 0.3509s^2)(1 + 0.5133s + 0.2759s^2)$
7	$(1 + 1.6840s)(1 + 1.0946s + 0.3396s^2)(1 + 0.8305s + 0.3012s^2)(1 + 0.4333s + 0.2382s^2)$
8	$(1 + 1.112s + 0.3166s^2)(1 + 0.976s + 0.2984s^2)(1 + 0.721s + 0.2625s^2)(1 + 0.373s + 0.209s^2)$

TAB. 1.4.: Quelques polynômes de Bessel-Thomson

### 1.5.4. Synthèse d'un filtre de Bessel

D'un point de vue analytique, il n'existe malheureusement pas d'approche simple pour trouver les pôles de  $H(s)$ . On ne peut donc pas déterminer analytiquement la valeur de la pulsation de coupure et trouver l'ordre du filtre à partir d'un gabarit. On se contente alors d'une approche itérative conduisant à vérifier si un filtre donné (ordre et pulsation de coupure) entre bien dans le gabarit requis. La synthèse se résume donc à définir la bande passante (-3 dB) désirée et à choisir un ordre du filtre suffisamment élevé pour atteindre l'atténuation souhaitée.

À titre illustratif, considérons le cas d'un filtre de Bessel d'ordre 6 et de pulsation de coupure  $\omega_c = 1$  [rad/sec]. Du tableau 1.4, on tire le polynôme normalisé par rapport à la pulsation de coupure  $\omega_c$ . Comme nous avons choisi de prendre  $\omega_c = 1$  [rad/sec], ce polynôme n'a pas besoin d'être modifié et l'on a

$$H(s) = \frac{1}{(1 + 1.2224s + 0.3891s^2)(1 + 0.9691s + 0.3509s^2)(1 + 0.5133s + 0.2759s^2)}$$

De cette fonction de transfert, nous déduisons que le filtre est réalisé à l'aide de trois cellules d'ordre 2 caractérisées par :

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{0.3891}} = 1.60 \left[ \frac{rad}{sec} \right] \quad Q_{01} = \frac{1}{1.2224 \cdot \omega_{01}} = 0.51$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{0.3509}} = 1.69 \left[ \frac{rad}{sec} \right] \quad Q_{02} = \frac{1}{0.9691 \cdot \omega_{02}} = 0.61$$

## 1.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

$$\omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{0.2759}} = 1.90 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad Q_{03} = \frac{1}{0.5133 \cdot \omega_{03}} = 1.02$$

Comme le temps de propagation total est égal à la somme des temps de propagation de chaque cellule, on a

$$t_p = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{Q_{0k} \cdot \omega_{0k}} = 1.22 + 0.97 + 0.51 = 2.70 [\text{sec}]$$

La figure 1.20 montre la réponse fréquentielle de ce filtre d'ordre 6 dont la pulsation de coupure vaut 1 rad/sec. La figure 1.21 illustre la réponse indicielle du filtre. Il est intéressant de relever que le temps nécessaire pour atteindre le 50% de la réponse indicielle correspond au temps de propagation du filtre. Enfin, la figure 1.22 montre comment la phase et le temps de propagation changent avec la pulsation. On voit bien que, dans la bande passante, la phase varie linéairement et que le temps de propagation est pratiquement indépendant de la pulsation.

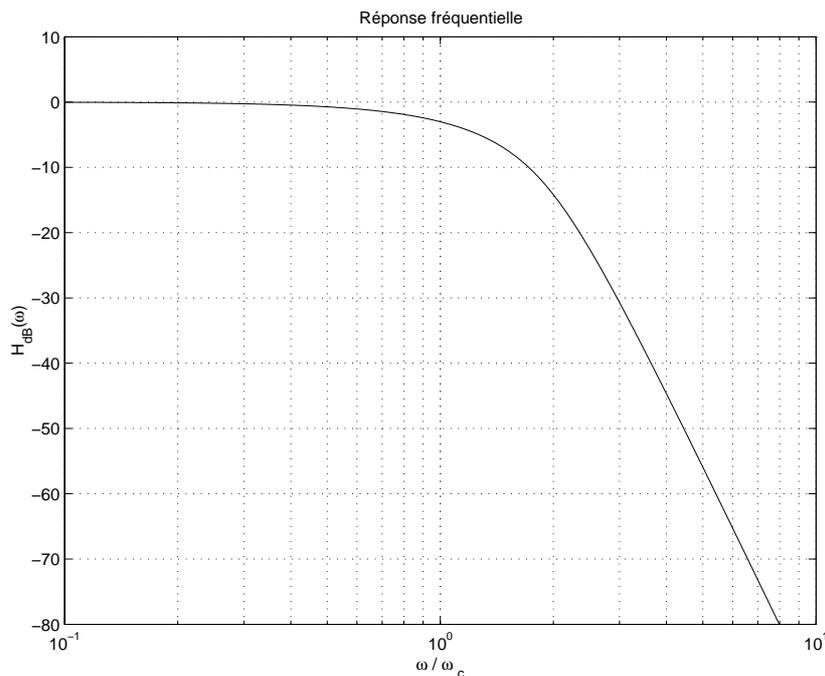


FIG. 1.20.: Réponse fréquentielle d'un filtre de Bessel d'ordre 6

## 1.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

Lors de l'utilisation des filtres, on souhaite souvent avoir simultanément une bande passante étroite et un régime transitoire rapide. Or, cela est inconciliable. Pour le

# 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

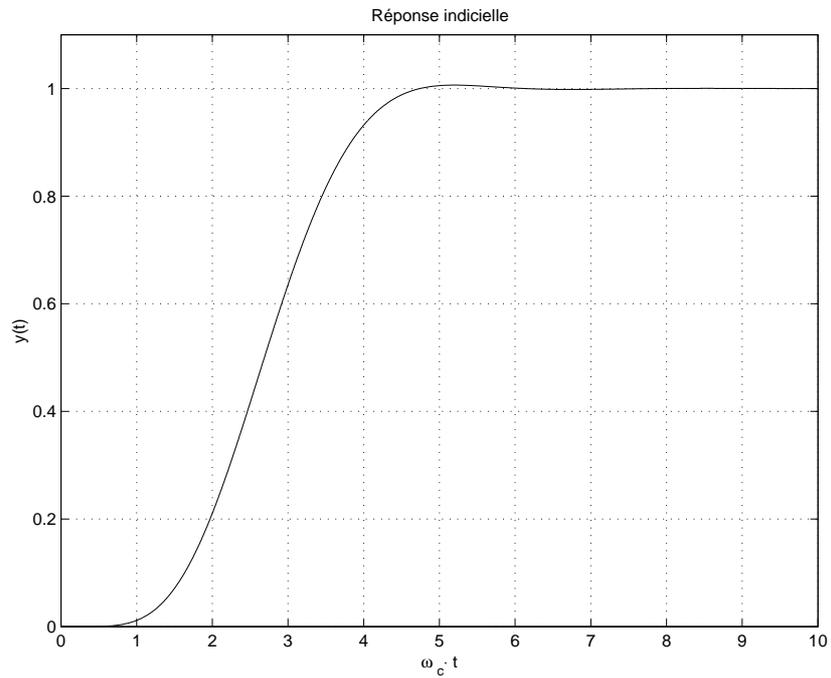


FIG. 1.21.: Réponse indicielle d'un filtre de Bessel d'ordre 6

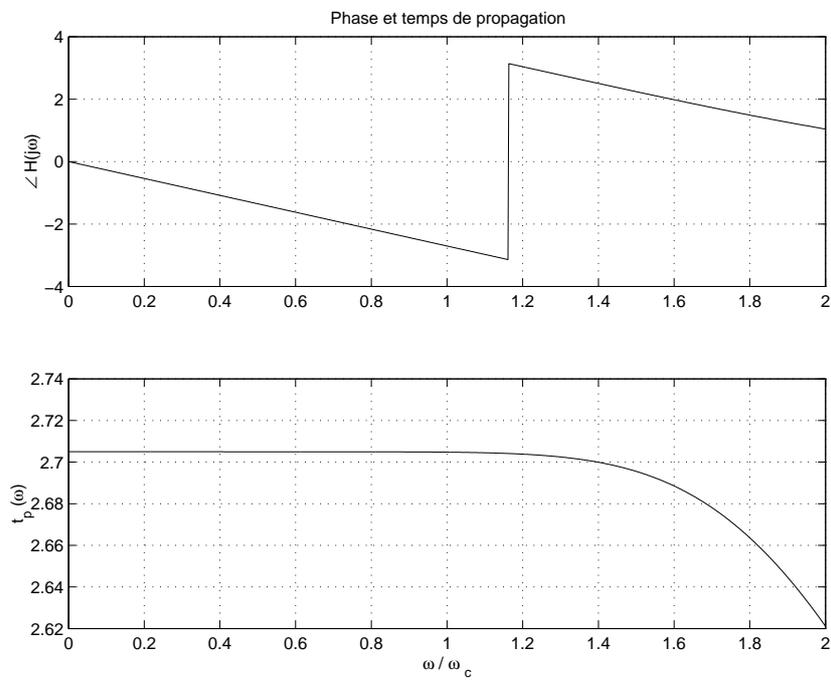


FIG. 1.22.: Phase et temps de propagation d'un filtre de Bessel d'ordre 6

### 1.6. Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

voir, considérons un filtre passe-bande dont la fonction de transfert est décrite par sa pulsation caractéristique  $\omega_0$  et son facteur de qualité  $Q_0$  :

$$H(s) = \frac{1/Q_0 (s/\omega_0)}{1 + 1/Q_0 (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (1.43)$$

Sachant que le facteur de qualité et la largeur de bande sont reliés entre eux par

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (1.44)$$

la fonction de transfert du filtre passe-bande peut également s'écrire sous la forme

$$H(s) = \frac{\Delta\omega s}{s^2 + \Delta\omega s + \omega_0^2} \quad (1.45)$$

Les pôles de cette fonction de transfert valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{\Delta\omega}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q_0^2}\right) \end{aligned}$$

Si le filtre passe-bande est sélectif, le facteur de qualité est élevé et l'expression des pôles se simplifient pour donner :

$$p_{1,2} \simeq -\frac{\Delta\omega}{2} \pm j\omega_0 \quad (1.46)$$

La réponse transitoire du filtre est alors décrite par :

$$y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A \exp\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.47)$$

Ceci est une réponse oscillante amortie dont la constante de temps  $\tau$  vaut  $2/\Delta\omega = 1/\pi\Delta f$ . Considérant que la durée du régime transitoire vaut environ 3 constantes de temps, on en tire la relation importante suivante :

$$\Delta t \simeq 3\tau = \frac{3}{\pi\Delta f} \simeq \frac{1}{\Delta f} \quad (1.48)$$

Cette relation montre que l'on ne peut pas avoir simultanément une grande sélectivité ( $\Delta f$  petit) et un régime transitoire court ( $\Delta t$  petit). Une conclusion similaire est vérifiée pour les filtres autres que passe-bande pour lesquels on ne peut pas avoir simultanément une bande de transition étroite et un temps d'établissement rapide.

## 1.7. Réalisations des filtres analogiques

### 1.7.1. Filtres normalisés

Comme on l'a déjà dit, les filtres sont représentés par des fonctions de transfert dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes  $P(s)$  décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2 :

$$P_1(s) = 1 + s/\omega_1 \quad (1.49)$$

$$P_2(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (1.50)$$

Aussi, pour caractériser un filtre d'ordre quelconque, suffit-il de donner les pulsations caractéristiques et les facteurs de qualité de chaque cellule. C'est ce qui est fait pour les filtres passe-bas dans le tableau 1.5.

On notera que pour les filtres de Butterworth et Bessel, la pulsation de normalisation est la pulsation de coupure  $\omega_c$  (3 dB d'atténuation). Alors que, pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation est celle correspondant à la bande dans laquelle on accepte une ondulation. L'amplitude  $r$  de l'ondulation admise s'exprime généralement en dB et les valeurs les plus souvent proposées sont 0.5 dB (5.9% d'ondulation) et 1.0 dB (12.2% d'ondulation).

### 1.7.2. Transformations d'un filtre normalisé

L'étude des filtres est basée sur la connaissance approfondie des filtres passe-bas. C'est donc à partir des caractéristiques des filtres passe-bas que l'on construit celles des filtres de type passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande.

On vérifie aisément que le passage d'une cellule passe-bas d'ordre 1 à une cellule de nature différente se fait par les changements de variable donnés dans le tableau 1.6.

La transformation passe-bas vers passe-haut est aisée alors que les deux autres sont fastidieuses et source d'erreurs. Aussi, dans le cas de filtres passe-bande et coupe-bande, vaut-il mieux utiliser un outil tel que Matlab qui permet d'obtenir directement les polynômes de réalisation.

Il est important de noter que, partant d'un passe-bas d'ordre  $n$ , le filtre équivalent passe-bande ou coupe-bande sera d'ordre  $2n$ . La démarche permettant de passer d'un filtre à un autre est présentée en détail dans [3].

### 1.7.3. Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Comme tout filtre peut être réalisé à partir de cellules d'ordre 1 ou 2 décrites par leur facteur de qualité et pulsation caractéristique, on voit qu'il suffit de connaître les circuits de base d'ordre 1 ou 2 pour réaliser n'importe quel filtre d'ordre  $n$ .

Ces circuits utilisent un amplificateur suiveur (à gain unité) et une réaction positive. Ils permettent ainsi de réaliser des filtres à gain fixe de type passe-bas, passe-haut et passe-bande. Leurs schémas sont présentés dans la figure 1.23.

1.7. Réalisations des filtres analogiques

Ordre	Cellules	Btw <sup>(1)</sup>	Bessel		Tchb. 0.5 dB		Tchb. 1 dB	
		$Q_k$	$\frac{\omega_k}{\omega_c}$	$Q_k$	$\frac{\omega_k}{\omega_{0.5dB}}$	$Q_k$	$\frac{\omega_k}{\omega_{1dB}}$	$Q_k$
1	1		1.000		2.8628		1.9652	
2	1	0.7071	1.2723	0.5774	1.2313	0.8637	1.0500	0.9565
3	1		1.3225		0.6265		0.4942	
	2	1.0000	1.4474	0.6910	1.0689	1.7062	0.9971	2.0177
4	1	0.5412	1.4310	0.5219	0.5970	0.7051	0.5286	0.7845
	2	1.3066	1.6043	0.8055	1.0313	2.9406	0.9932	3.5590
5	1		1.5015		0.3623		0.2895	
	2	0.6180	1.5555	0.5635	0.6905	1.1778	0.6552	1.3988
	3	1.6180	1.7545	0.9165	1.0177	4.5450	0.9941	5.5564
6	1	0.5176	1.6030	0.5103	0.3962	0.6836	0.3531	0.7609
	2	0.7071	1.6882	0.6112	0.7681	1.8104	0.7468	2.1980
	3	1.9319	1.9037	1.0233	1.0114	6.5128	0.9954	8.0037
7	1		1.6840		0.2562		0.2054	
	2	0.5550	1.7160	0.5324	0.5039	1.0916	0.4801	1.2969
	3	0.8019	1.8221	0.6608	0.8227	2.5755	0.8084	3.1559
	4	2.2470	2.0491	1.1263	1.0080	8.8418	0.9963	10.8987
8	1	0.5098	1.7772	0.5060	0.2967	0.6766	0.2651	0.7530
	2	0.6013	1.8308	0.5596	0.5989	1.6107	0.5828	1.9565
	3	0.8999	1.9518	0.7109	0.8610	3.4657	0.8506	4.2661
	4	2.5629	2.1872	1.2257	1.0059	11.5308	0.9971	14.2405
9	1		1.8570		0.1984		0.1593	
	2	0.5321	1.8788	0.5197	0.3954	1.0664	0.3773	1.2600
	3	0.6527	1.9483	0.5895	0.6727	2.2131	0.6622	2.7129
	4	1.000	2.0808	0.7606	0.8885	4.4780	0.8806	5.5266
	5	2.8794	2.3228	1.3219	1.0046	14.5793	0.9976	18.0286
10	1	0.5062	1.9412	0.5039	0.2372	0.6734	0.2121	0.7495
	2	0.5612	1.9790	0.5376	0.4878	1.5347	0.4761	1.8645
	3	0.7071	2.0606	0.6205	0.7293	2.8913	0.7215	3.5605
	4	1.1013	2.2021	0.8098	0.9087	5.6114	0.9025	6.9367
	5	3.1962	2.4487	1.4153	1.0037	17.9871	0.9980	22.2630
<sup>(1)</sup> Pour toutes les cellules des filtres de Butterworth, on a $\omega_k/\omega_c = 1$								

TAB. 1.5.: Pulsations et facteurs de qualité des filtres normalisés

# 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

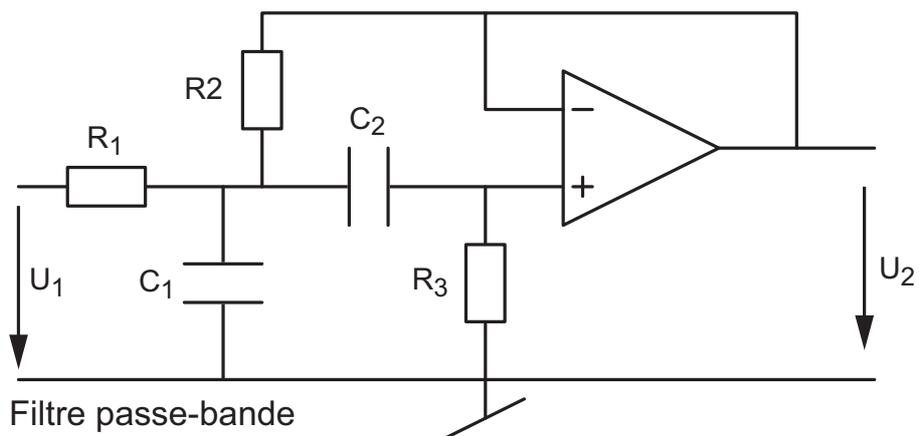
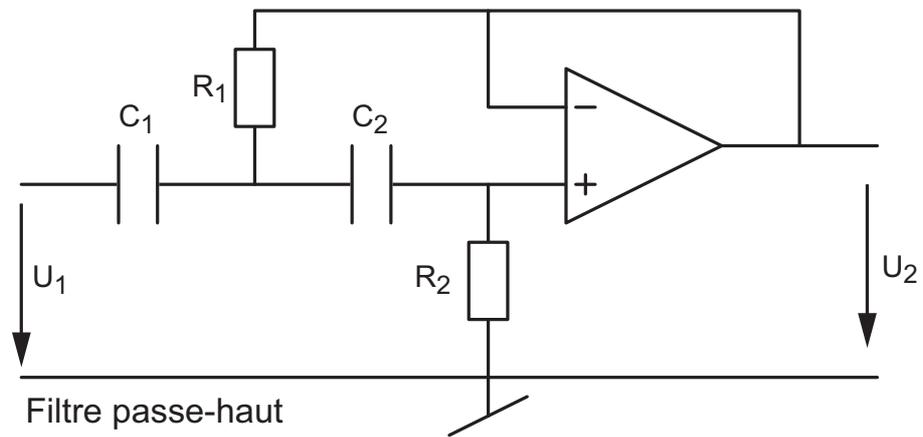
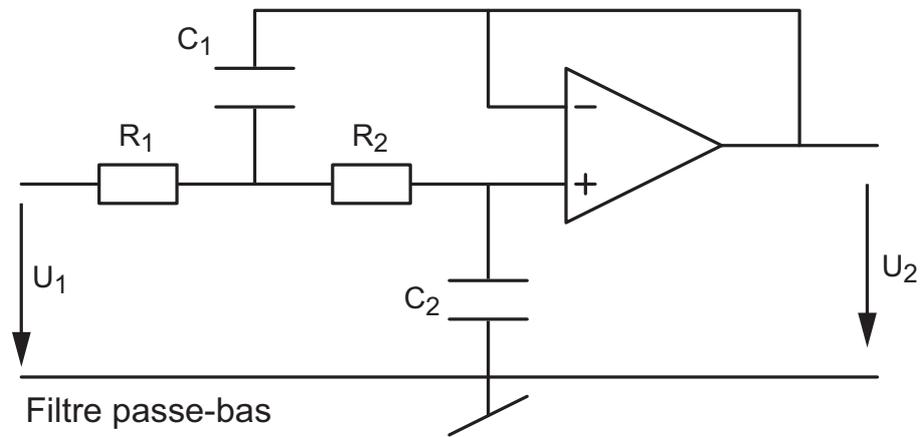


FIG. 1.23.: Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Filtre désiré	Caractéristiques	Variable
passé-bas	$\omega_k$	$s/\omega_k$
passé-haut	$\omega_k$	$\omega_k/s$
passé-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{s/\omega_0 + \omega_0/s}{B_0}$
coupe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i\omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{B_0}{s/\omega_0 + \omega_0/s}$

TAB. 1.6.: Transformations d'un filtre normalisé

### Filtres passe-bas et passe-haut

Les fonctions de transfert des filtres passe-bas et passe-haut sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + C_2(R_1 + R_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (1.51)$$

$$H_{PH}(s) = \frac{C_1C_2R_1R_2s^2}{1 + R_1(C_1 + C_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (1.52)$$

Par identification des termes de la forme canonique avec ceux des fonctions de transfert, on montre aisément les résultats suivants :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2} \quad (1.53)$$

$$Q_{0,PB} = \sqrt{\frac{C_1R_1R_2}{C_2(R_1 + R_2)^2}} \quad (1.54)$$

$$Q_{0,PH} = \sqrt{\frac{R_2C_1C_2}{R_1(C_1 + C_2)^2}} \quad (1.55)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Afin que le facteur de qualité puisse être supérieur à 0.5, on prendra :

1. pour le filtre passe-bas :

$$R_1 = R_2 = R \quad (1.56)$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (1.57)$$

$$C_2 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 R} \quad C_1 = 4Q_0^2 C_2 \quad (1.58)$$

2. pour le filtre passe-haut :

$$C_1 = C_2 = C \quad (1.59)$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (1.60)$$

$$R_1 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 C} \quad R_2 = 4Q_0^2 R_1 \quad (1.61)$$

### Filtre passe-bande

La fonction de transfert du filtre passe-bande de la figure 1.23 est décrite par :

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{C_2 R_3 s}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1(C_1 + C_2) + R_3 C_2) s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} C_1 C_2 R_1 R_3 s^2} \quad (1.62)$$

En choisissant  $C_1 = C_2 = C$  et  $R_1 = R_3 = R$ , on obtient

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R + R_2} \frac{CRs}{1 + 3 \frac{R_2}{R + R_2} CRs + \frac{R_2}{R + R_2} C^2 R^2 s^2} \quad (1.63)$$

En identifiant les termes de  $H_{P\Delta}(s)$  avec ceux de la forme canonique

$$H_{P\Delta}(s) = A_0 \frac{\frac{1}{Q_0\omega_0} s}{1 + \frac{1}{Q_0\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

on montre aisément les résultats suivants :

$$A_0 \equiv H_{P\Delta}(j\omega_0) = \frac{1}{3} \quad (1.64)$$

$$\omega_0^2 = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) \frac{1}{C^2 R^2} \quad (1.65)$$

$$Q_0 = \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \quad (1.66)$$

Après avoir librement choisi la valeur de  $R_2$ , on voit que les équations ci-dessus nous permettent de calculer la valeur des éléments nécessaires à la réalisation d'un filtre passe-bande :

$$R = R_2 (9Q_0^2 - 1) \quad (1.67)$$

$$C = \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \frac{1}{\omega_0 R} = \frac{3Q_0}{\omega_0 R} \quad (1.68)$$

On notera qu'à la pulsation caractéristique du filtre, le gain vaut  $1/3$  et que, si nécessaire, il faudra corriger le gain global.

**Remarque**

Les circuits à gain fixe offrent un moyen simple de réaliser des filtres d'ordre 2. Cependant, si l'on observe les équations donnant la pulsation caractéristique  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q_0$ , on voit que l'on ne peut pas varier l'un sans changer l'autre. De plus, le choix des valeurs normalisées pour les composants  $R$  ou  $C$  n'est pas possible. On préfère donc parfois, lorsqu'il s'agit de filtres passe-bas ou passe-haut, utiliser les circuits à gain variable.

**1.7.4. Circuits de Sallen et Key à gain variable**

Leurs schémas sont présentés dans la figure 1.24. On voit qu'ils ont la même structure que les circuits précédents sauf que l'amplificateur suiveur est remplacé par un amplificateur gain variable valant

$$K = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

On montre aisément que les fonctions de transfert de ces filtres sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = K \frac{1}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (1.69)$$

$$H_{PH}(s) = K \frac{(sRC)^2}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (1.70)$$

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{K}{3 - K} \frac{(3 - K) sRC}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (1.71)$$

L'identification des coefficients des dénominateurs avec ceux de la forme canonique

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (1.72)$$

permet de voir que l'on a les relations suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (1.73)$$

$$\frac{1}{Q_0} = 3 - K = 2 - \frac{R_4}{R_3} \quad (1.74)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Si, par exemple, on se donne  $C$  et  $R_3$ , on a alors

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (1.75)$$

$$R_4 = R_3 \left( 2 - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (1.76)$$

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

**Remarque** On notera que le gain en tension des cellules passe-bas et passe-haut vaut

$$A_{U,PB} = A_{U,PH} = K = 3 - \frac{1}{Q_0} \simeq 3 \quad (1.77)$$

alors que celui du filtre passe-bande

$$A_{U,P\Delta} = \frac{K}{3-K} = 3Q_0 - 1 \simeq 3Q_0 \quad (1.78)$$

est proportionnel au facteur de qualité ; il peut ainsi atteindre des valeurs très importantes. On préfère alors, pour ce type de filtre, utiliser la cellule à gain fixe.

### 1.7.5. Réalisation d'un filtre passe-bande

#### Donnée

On souhaite réaliser un filtre passe-bande d'ordre  $n = 6$  pour lequel on accepte une ondulation  $r = 1 \text{ dB}$  entre les pulsations  $\omega_1 = 500 \text{ [rad/sec]}$  et  $\omega_2 = 2000 \text{ [rad/sec]}$ .

#### Solution

Ce filtre sera réalisé par 3 cellules d'ordre 2 provenant chacune de la transformation d'une cellule passe-bas d'ordre 1 en une cellule passe-bande. Cette transformation se fait par le changement de variable suivant (tableau 1.6) :

$$s \longrightarrow \frac{s/\omega_{0k} + \omega_{0k}/s}{B_k} \quad (1.79)$$

avec

$$\omega_{0k} = \sqrt{\omega_i \omega_s} \quad B_k = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{0k}} \quad (1.80)$$

On comprend bien que le calcul de cette transformation à partir du tableau des polynômes normalisés n'est pas aisée et qu'il vaut mieux utiliser un programme permettant d'obtenir directement les paramètres de chaque cellule. Le logiciel Matlab se prête particulièrement bien à cela.

Le contenu du fichier permettant de calculer le filtre désiré est donné dans la section 1.7.5. On y trouve en particulier la fonction `zpk` (zero-pole-gain) de Matlab qui affiche les résultats dans la forme de Laplace :

$$\frac{1658160052.054 \text{ s}^3}{(s^2 + 151.6s + 2.57e005)(s^2 + 741.3s + 1e006)(s^2 + 589.7s + 3.891e006)}$$

Dans la forme de Bode, la fonction de transfert du filtre passe-bande à gain unité s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}} + \left(\frac{s}{\omega_{01}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}} + \left(\frac{s}{\omega_{02}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}} + \left(\frac{s}{\omega_{03}}\right)^2\right)}$$

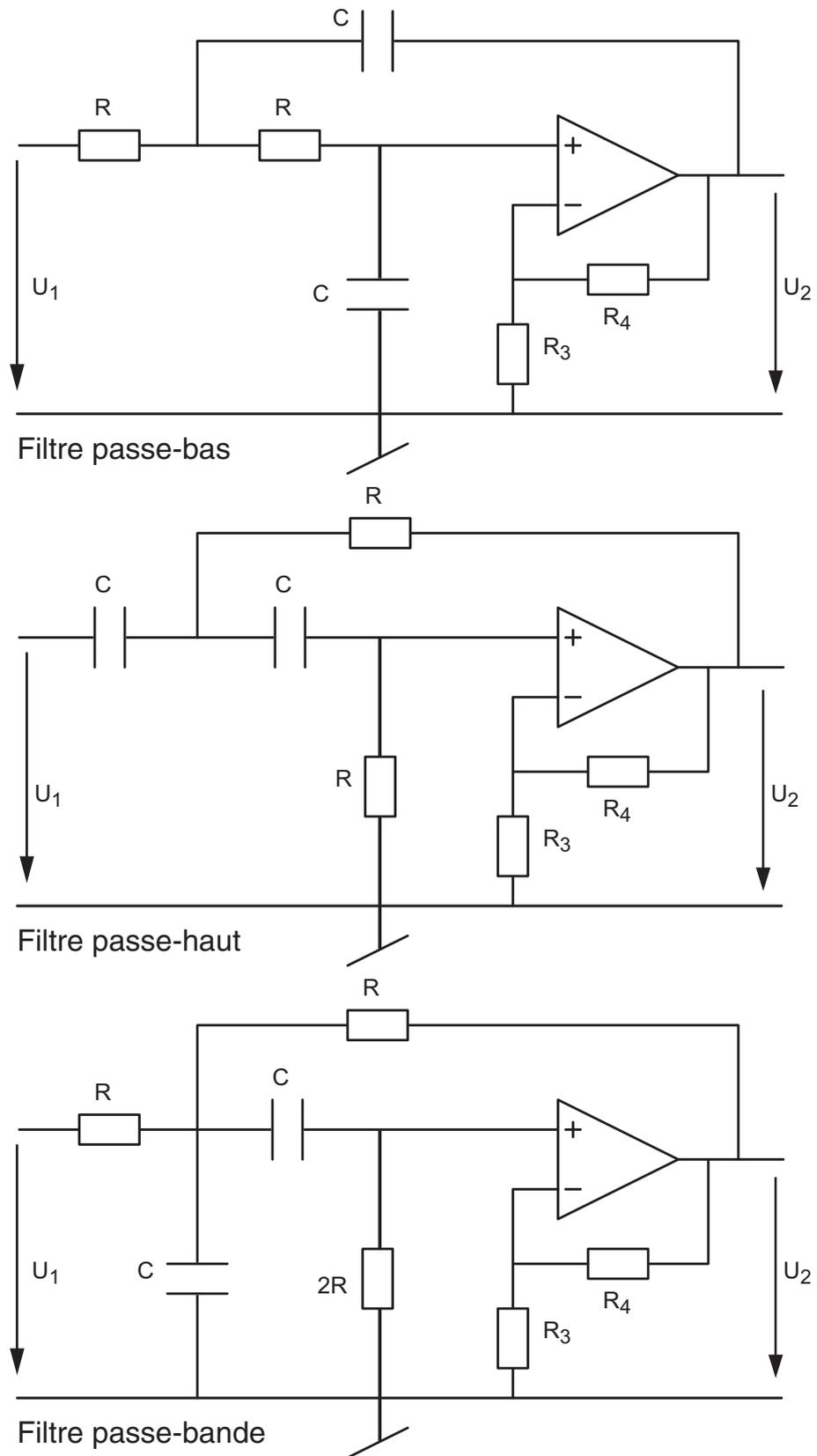


FIG. 1.24.: Cellules à gain variable

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

Les paramètres de chaque cellule se calculent aisément avec la fonction `damp` qui fournit les pulsations caractéristiques et facteur d'amortissement de chaque cellule (voir fichier Matlab). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= 507 \text{ [rad/sec]} & Q_{01} &= 3.35 \\ \omega_{02} &= 1000 \text{ [rad/sec]} & Q_{02} &= 1.35 \\ \omega_{03} &= 1972 \text{ [rad/sec]} & Q_{03} &= 3.35\end{aligned}$$

À partir de ces paramètres et du choix du schéma de réalisation, on calcule aisément les valeurs des composants. Adoptant le schéma de Sallen et Key à gain fixe (figure ??), et, après avoir choisi  $R_2 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$ , on peut calculer les valeurs des résistances et capacités de chaque cellule passe-bande (équ. (1.67) et (1.68)) :

$$R = R_2 (9 Q_0^2 - 1) = \begin{cases} 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 15.4 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \end{cases}$$

$$C = \frac{3 Q_0}{\omega_0 R} = \begin{cases} 198 \text{ [nF]} \\ 263 \text{ [nF]} \\ 51 \text{ [nF]} \end{cases}$$

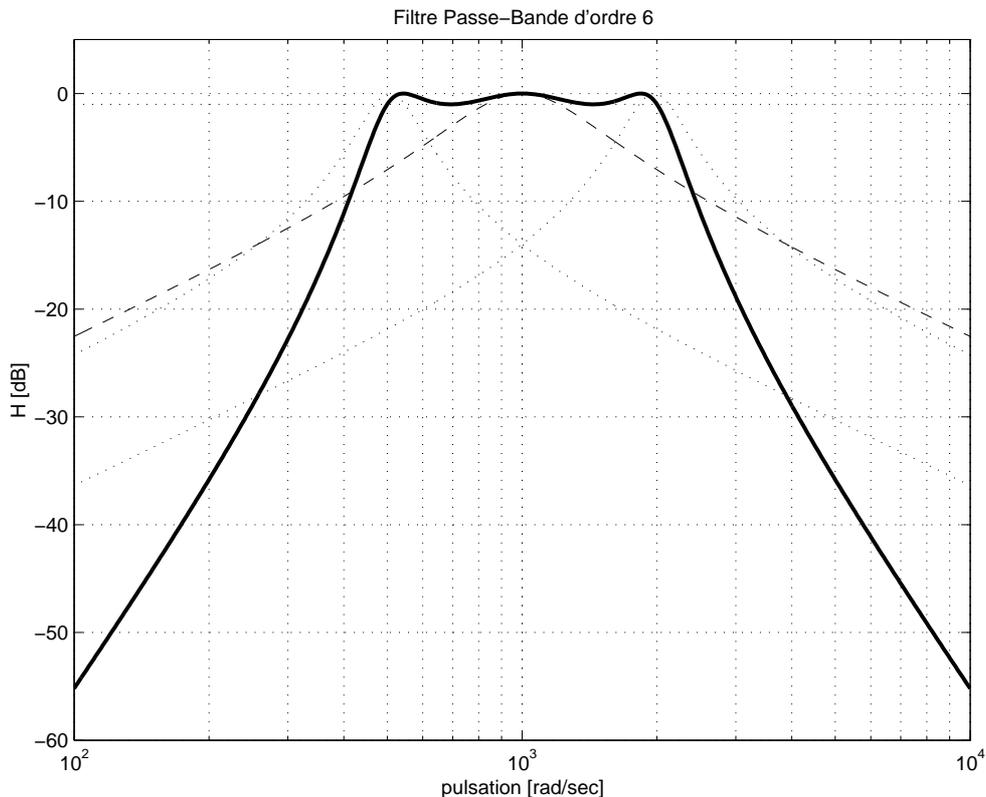


FIG. 1.25.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande de Tchebycheff

## Fichier Matlab

```

% calcul d'un filtre passe-bande
% fmy / novembre 2003
close all; clear all; format compact; format short g;

% initialisation
wdeb = 100; wfin = 10e3;
w = logspace(log10(wdeb),log10(wfin),500); % 500 points repartis logar.
wdf = [wdeb wfin];

% calcul du filtre passe-bande Tchb
w1 = 500; w2 = 2000; r = 1; n = 6;
[num den] = cheby1 (n/2, r, [w1 w2], 's');

% fonction de transfert du filtre
Gw = tf (num, den);

% calcul des facteurs de qualité et pulsation caractéristiques
zpk(Gw) % affichage de G(jw)
[wk zk] = damp(Gw); % pulsation caract. et coeff. d'amortissement
Qk = 1./(2*zk); % calcul des facteurs de qualite
Qk_wk = [Qk, wk]
Q0 = Qk(1:2:n);
w0 = wk(1:2:n);
Q0_w0 = [Q0, w0] % Q0 et w0 de chaque cellule

% affichage des resultats
% Zero/pole/gain:
%
% 1658160052.054 s^-3
% -----
% (s^2 + 151.6s + 2.57e005) (s^2 + 741.3s + 1e006) (s^2 + 589.7s + 3.891e006)
%
% Qk_wk =
% 3.3449 506.98
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4
% 3.3449 1972.4
% Q0_w0 =
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4

% fonctions de transfert à gain unité
G1 = tf([1/Q0(1)/w0(1) 0], [1/w0(1)^2 1/Q0(1)/w0(1) 1]);
G2 = tf([1/Q0(2)/w0(2) 0], [1/w0(2)^2 1/Q0(2)/w0(2) 1]);
G3 = tf([1/Q0(3)/w0(3) 0], [1/w0(3)^2 1/Q0(3)/w0(3) 1]);
Gw = G1 * G2 * G3;

% calcul des reponses frequentielles de chaque cellule
[ampl1 phi1] = bode(G1,w);
[ampl2 phi2] = bode(G2,w);
[ampl3 phi3] = bode(G3,w);
[ampl phi] = bode(Gw,w);

```

## 1. ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

```
% transformation de l'objet ampl en un vecteur
ampl1 = ampl1(:);    ampl2 = ampl2(:);
ampl3 = ampl3(:);    ampl  = ampl(:);

% normalisation pour avoir un gain unité du filtre global
ampl = ampl/max(ampl);

% tracage
figure;
h = semilogx(w,20*log10(ampl));           % tracage de G(jw)
set(h,'LineWidth',2);                    % ligne plus epaisse
hold on;                                  % maintien de la figure courante
semilogx(wdf,-[r, r],':');                % ligne en -r [dB]
semilogx(w,20*log10(ampl1),':');          % tracage de G1(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl2), '--');       % tracage de G2(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl3), ':');        % tracage de G3(jw)
axis([wdeb, wfin,-60, 5]); grid;         % definition des axes
title('Filtre Passe-Bande d''ordre 6'); % titre du graphe
xlabel('pulsation [rad/sec]');           % information pour l'abscisse
ylabel('H [dB]'); grid on;               % information pour l'ordonnee
hold off;                                 % liberation de la figure courante
print pbande_tch6.eps -deps              % sauvegarde dans un fichier .eps

% calcul des composants avec ampli à gain unité
% R1 = R3 = R et C1 = C2 = C, R2 libre
R2 = 1000
R = R2*(9*Q0.^2 - 1);
C = 3*Q0./R./w0;
Rk_Ck = [R, C]

% affichage des valeurs des composants
% R2 =
%    1000
% Rk_Ck =
%    99696  1.9853e-007
%    15380  2.6315e-007
%    99696  5.103e-008
```

# Bibliographie

- [1] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Maxwell MacMillan, 1992
- [2] M.E. van Valkenburg, *Analog Filter Design*, Saunders College Publishing, 1982
- [3] B.P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press, 1998
- [4] P. Bildstein, *Filtres actifs*, Editions Radio, 1976.

## 1.8. Exercices

**FA 1** On souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas de Butterworth satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned}0 \text{ dB} \geq H_p(3 \text{ kHz}) &\geq -0.2 \text{ dB} \\ H_a(10 \text{ kHz}) &\leq -40 \text{ dB}\end{aligned}$$

Pour ce faire :

1. calculez l'ordre du filtre et la fréquence de coupure du filtre ;
2. que valent le facteur de qualité et la fréquence de coupure de chaque cellule ;
3. calculez la fonction de transfert  $H(s)$  du filtre ;
4. pour chaque cellule, esquissez  $H_{dB}(f)$  puis, justifiez l'allure de  $H_{tot}$  ;
5. pourquoi recommande-t-on de placer les cellules dans l'ordre croissant des facteurs de qualité ?

**FA 2** Réalisez le filtre que vous venez de calculer. Pour ce faire :

1. choisissez le schéma de réalisation du filtre permettant d'utiliser des valeurs normalisées pour les capacités ;
2. calculez les éléments constitutifs du filtre ;
3. que faites-vous pour obtenir un gain global unité ?

**FA 3** Vérifiez que pour les filtres de Butterworth le produit des facteurs de qualité vaut 1 si l'ordre est impair et  $\sqrt{2}$  si l'ordre est pair. Comment justifiez-vous ce résultat ?

## Bibliographie

**FA 4** Calculez le temps de propagation d'un filtre de Bessel d'ordre 5 dont la fréquence de coupure vaut  $f_c = 1 [kHz]$ . Réponse :  $t_p = 386 \mu s$

**FA 5** On veut réaliser un filtre passe-bas de Tchebicheff satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned}H_r(1 kHz) &= 0.5 dB \\H_a(2 kHz) &\leq -50 dB\end{aligned}$$

1. calculez l'ordre du filtre et sa fréquence de coupure ;
2. calculez le facteur de qualité et la fréquence caractéristique de chaque cellule ;
3. l'ondulation de la réponse fréquentielle du filtre sera-t-elle au-dessus ou au-dessous du niveau 0 dB ?
4. pour chaque cellule, esquissez  $H_{dB}(f)$  ; justifiez l'allure de  $H_{tot}$ .

**FA 6** On vous remet le schéma d'un filtre passe-bas constitué de trois cellules de Sallen et Key à gain unité dans lequel toutes les résistances valent  $10 k\Omega$  alors que les capacités des 3 cellules valent respectivement

$$\begin{aligned}C_{11} &= 0.41 \mu F & C_{12} &= 0.38 \mu F \\C_{21} &= 0.56 \mu F & C_{22} &= 0.28 \mu F \\C_{31} &= 1.54 \mu F & C_{32} &= 0.10 \mu F\end{aligned}$$

Trouvez le type de filtre ainsi réalisé et sa fréquence de coupure.

## FA 7

1. Considérant un filtre passe-bas d'ordre 2

$$H_b(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta = 0.1 \\ \omega_0 = 10^3 [rad/sec] \end{cases}$$

- calculez son équivalent passe-haut ;
2. tracez les diagrammes de Bode asymptotiques des deux filtres ;
3. répétez les points 1) et 2) pour un filtre passe-bande ;
4. vérifiez vos résultats avec Matlab.

**FA 8** Partant d'un polynôme normalisé d'ordre 1, utilisez les transformations correspondantes pour trouver les fonctions de transfert

1. d'un filtre passe-haut de pulsation  $\omega_c = 10^3 [rad/sec]$  ;
2. d'un filtre passe-bande tel que  $Q_0 = 1$  et  $\omega_0 = 10^3 [rad/sec]$  ; que vaudra la largeur de bande d'un tel filtre ?
3. d'un filtre réjecteur de bande tel que  $Q_0 = 10$  et  $\omega_0 = 10^3 [rad/sec]$  ; que vaudront la largeur de bande d'un tel filtre et l'atténuation obtenue pour  $\omega = \omega_0$  ?

## 2. Synthèse des filtres récurrents

### 2.1. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

Avant de considérer la synthèse d'un filtre numérique, rappelons que celui-ci est décrit par sa fonction de transfert en  $z$  qui peut s'écrire sous deux formes équivalentes

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.1)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.2)$$

La première forme sert essentiellement à l'analyse des performances du filtre (recherche des pôles et zéros), alors que de la deuxième on tire immédiatement l'équation aux différences qui servira à réaliser le filtre :

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots$$

Si l'on souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre, il suffit de remplacer l'opérateur de retard  $z^{-1}$  par sa transformée de Fourier

$$z^{-1} \Leftrightarrow \exp(-j\omega T_e) \equiv \exp(-j\Omega) \quad (2.3)$$

où  $\Omega$  est la pulsation numérique ou normalisée qui se mesure en [rad/échantillon]. On obtient alors

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 \exp(-j\Omega) + \dots + b_n \exp(-jn\Omega)}{1 + a_1 \exp(-j\Omega) + \dots + a_n \exp(-jn\Omega)} \quad (2.4)$$

Comme l'exponentielle imaginaire est périodique, la réponse fréquentielle d'un filtre numérique est également périodique de période  $f_e$  et sa représentation se fait dans le domaine de fréquences allant de 0 à  $f_e/2$  (ou  $f_e$ ). Si l'on considère la pulsation numérique  $\Omega$ , la représentation se fait alors de 0 à  $\pi$  (ou  $2\pi$ ).

On notera que les valeurs particulières de  $H(0)$  (composante DC) ou  $H(\pi)$  (fréquence de Nyquist  $f_N = f_e/2$ ) se calculent aisément et qu'elles valent :

$$H(j0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} \\ H(j\pi) = \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots + b_n}{1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n}$$

**Exemple** Considérons un filtre passe-bas résonant d'ordre 2 décrit par

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.7 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - 1.7 z + 0.81}$$

On en tire immédiatement deux valeurs particulières de la réponse fréquentielle : la composante DC ( $z = 1$ ) et celle à la fréquence de Nyquist  $f_e/2$  ( $z = -1$ ) :

$$H(j0) = \frac{1}{1 - 1.7 + 0.81} = +9.091$$

$$H(j\pi) = \frac{-1}{1 + 1.7 + 0.81} = -0.285$$

En remplaçant l'opérateur de retard  $z^{-1}$  par son équivalent fréquentiel  $\exp(-j\Omega)$ , on peut calculer la réponse fréquentielle du filtre  $H(j\Omega)$  qui s'écrit

$$H(j\Omega) = \frac{\exp(-j\Omega)}{1 - 1.7 \exp(-j\Omega) + 0.81 \exp(-j2\Omega)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + j 1.7 \sin(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega) - j 0.81 \sin(2\Omega)}$$

De cette fonction complexe, on tire facilement le module et l'argument de  $H(j\Omega)$  :

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega))^2 + (1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega))^2}}$$

$$\angle H(j\Omega) = -\Omega - \arctan\left(\frac{1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega)}\right)$$

La figure 2.1 présente les réponses temporelles (impulsionnelle et indicielle) et fréquentielles (module et argument) de ce filtre.

## 2.2. Le problème de l'approximation

La synthèse des filtres numériques consiste à rechercher les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  de la fonction de transfert  $H(z)$  de manière à ce que la réponse harmonique du filtre satisfasse au cahier des charges fixé au préalable. Cette synthèse peut être basée sur les connaissances que l'on a de la réponse des filtres analogiques ou sur des méthodes spécifiques aux filtres numériques. Dans ce qui suit, on se contentera, partant des filtres analogiques, de rechercher des filtres numériques au comportement similaire.

Sachant que le comportement fréquentiel des filtres analogiques est complètement déterminé par la donnée de la fonction de transfert  $H(s)$ ,

$$H(s) = \frac{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_n s^n}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_n s^n} \quad (2.5)$$

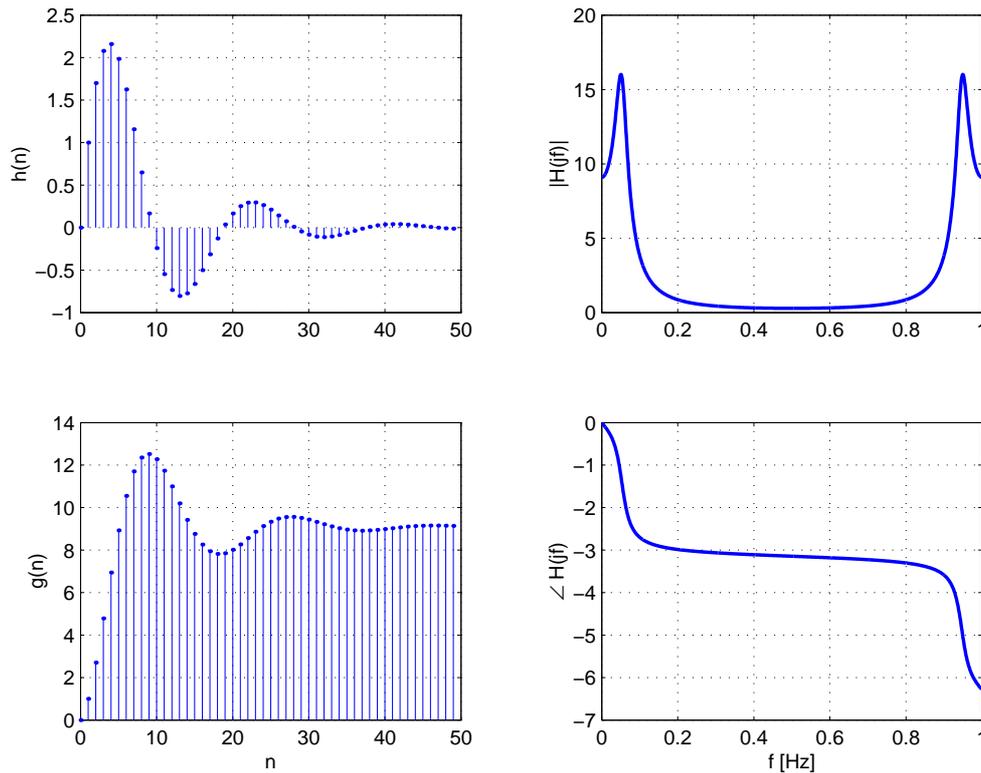


FIG. 2.1.: Réponses temporelles et fréquentielles d'un filtre numérique passe-bas

on cherche à obtenir le même type de réponse fréquentielle avec des filtres numériques décrits par

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.6)$$

Comme les correspondances que l'on établira entre  $s$  et  $z$  conduisent toutes à des approximations des réponses temporelle et fréquentielle analogiques, on peut imaginer un grand nombre de transformations possibles. Parmi celles-ci, il en est deux que l'on rencontre fréquemment et qui seules sont présentées ici : la *transformation associée* et la *transformation bilinéaire*.

## 2.3. La transformation associée

Cette transformation associe les pôles et zéros de  $H(z)$  à ceux de  $H(s)$ . Autrement dit, connaissant la position des pôles et zéros du filtre analogique situés dans le demi-plan complexe, on construit un filtre numérique ayant les pôles et zéros correspondants situés dans un cercle de rayon unité (figure 2.2).

Sachant que la variable  $z$  représente un décalage temporel d'une période d'échantillonnage  $T_e$ , on a

$$z = \exp(s T_e) \quad (2.7)$$

## 2. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

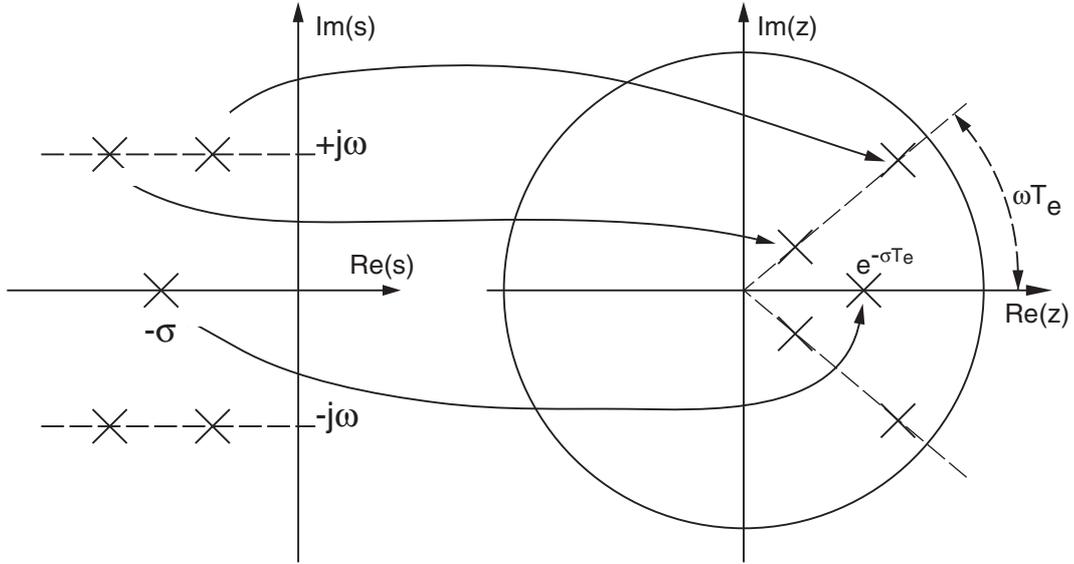


FIG. 2.2.: Position des pôles analogiques et des pôles numériques

On en déduit alors que la variable  $s$  peut simplement être remplacée par la fonction

$$s = \frac{1}{T_e} \ln(z) \quad (2.8)$$

qui, à une racine analogique  $r_a$ , fait correspondre une racine numérique  $r_n$  telle que

$$r_n = \exp(r_a T_e) \quad (2.9)$$

De manière équivalente, cette approche revient à relier les polynômes analogiques  $P_a(s)$  aux polynômes numériques  $P_n(z)$ .

Considérant que tout filtre est représenté fondamentalement par des polynômes d'ordre 1 et 2, on peut se contenter d'analyser les deux situations suivantes.

1. À un polynôme analogique d'ordre 1 et sa racine  $r_a$

$$P_{a1}(s) = 1 + s/\omega_c \quad \Rightarrow \quad r_a = -\omega_c \quad (2.10)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 1

$$P_{n1}(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec} \quad (2.11)$$

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) \quad (2.12)$$

2. À un polynôme analogique d'ordre 2 et ses racines  $r_{a1,2}$

$$P_{c2}(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 \quad \Rightarrow \quad r_{a1,2} = -\sigma \pm j\omega_0 \quad (2.13)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 2

$$P_{n2}(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0) z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec} \quad (2.14)$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e \quad (2.15)$$

Une fois les correspondances polynomiales obtenues, il reste à ajuster le gain de  $H(z)$  afin que, pour une fréquence donnée, on ait la même amplitude de la réponse fréquentielle en numérique qu'en analogique.

### 2.3.1. Exemple de transformation associée

Considérant un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 ayant sa fréquence de coupure en  $f_c = 1 \text{ kHz}$  (figure 2.3), on désire réaliser un filtre numérique au comportement similaire sachant que l'on a choisi une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T_e$  de 10 kHz.

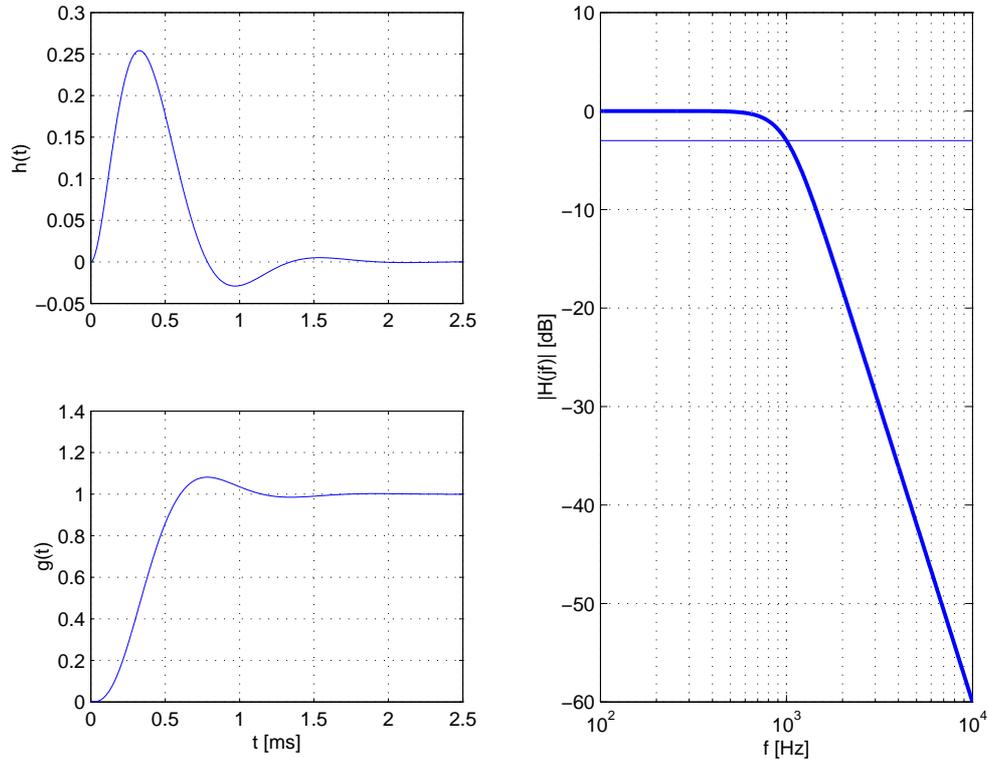


FIG. 2.3.: Réponses d'un filtre analogique passe-bas de Butterworth

**Solution** On sait qu'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3 est décrit par une cellule d'ordre 1 suivie d'une cellule d'ordre 2 telles que

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)} \quad (2.16)$$

On en déduit que les pôles de ce filtre analogique valent

$$p_{a1} = -\omega_c = -2000 \pi$$

$$p_{a2,3} = -\omega_c \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) / 2 = -1000 \pi \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) \equiv -\sigma \pm j\omega_0$$

Tenant compte des équations (2.12) et (2.15), il vient :

1. un polynôme numérique d'ordre 1 :

$$P_1(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec}$$

## 2. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) = -0.5335$$

d'où

$$P_1(z) = 1 - 0.5335 z^{-1} \quad (2.17)$$

2. un polynôme numérique d'ordre 2 :

$$P_2(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0) z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec}$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) = \exp(-\pi/10) = 0.730 \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e = \pi\sqrt{3}/10 = 0.544$$

d'où

$$P_2(z) = 1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2} \quad (2.18)$$

Ces deux polynômes décrivent la fonction de transfert du filtre passe-bas numérique dont les gains  $G_1$  et  $G_2$  sont inconnus :

$$H(z) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{G_2}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

Il reste donc à adapter les gains de chaque cellule du filtre de manière à ce que l'amplitude du filtre numérique soit la même que celle du filtre analogique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit ici d'un filtre passe-bas, c'est le comportement DC des filtres qui doit être identique. Sachant que les valeurs DC des réponses analogique et numérique sont obtenues pour  $s = 0$  et, respectivement,  $z = 1$ , il vient :

$$H(s \rightarrow 0) = 1$$

$$H(z \rightarrow 1) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335)} \frac{G_2}{(1 - 1.25 + 0.5335)} = \frac{G_1}{0.4665} \frac{G_2}{0.2835} = H(s \rightarrow 0) = 1$$

En choisissant  $G_1 = 0.4665$  et  $G_2 = 0.2835$ , on obtient la fonction de transfert recherchée qui s'écrit dans l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z^2}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)}$$

**Remarque** On notera que l'égalité des ordres du numérateur et dénominateur conduit le filtre à répondre instantanément à l'excitation. Cette situation peu réaliste, en particulier pour un filtre passe-bas, nous incite à ajouter un retard unitaire  $z^{-1}$  à  $H(z)$ . Les fonctions de transfert s'écrivent alors dans l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})} z^{-1} \quad (2.19)$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)} \quad (2.20)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 2.4 où on les compare avec celles du filtre analogique.

### 2.3. La transformation associée

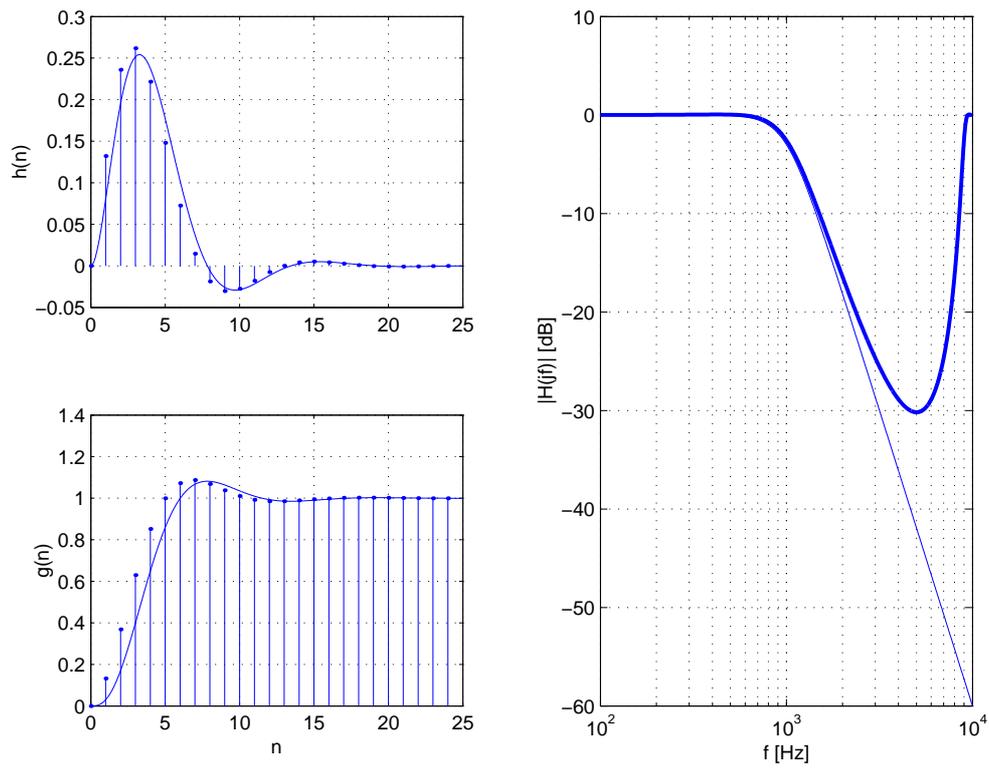


FIG. 2.4.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation associée

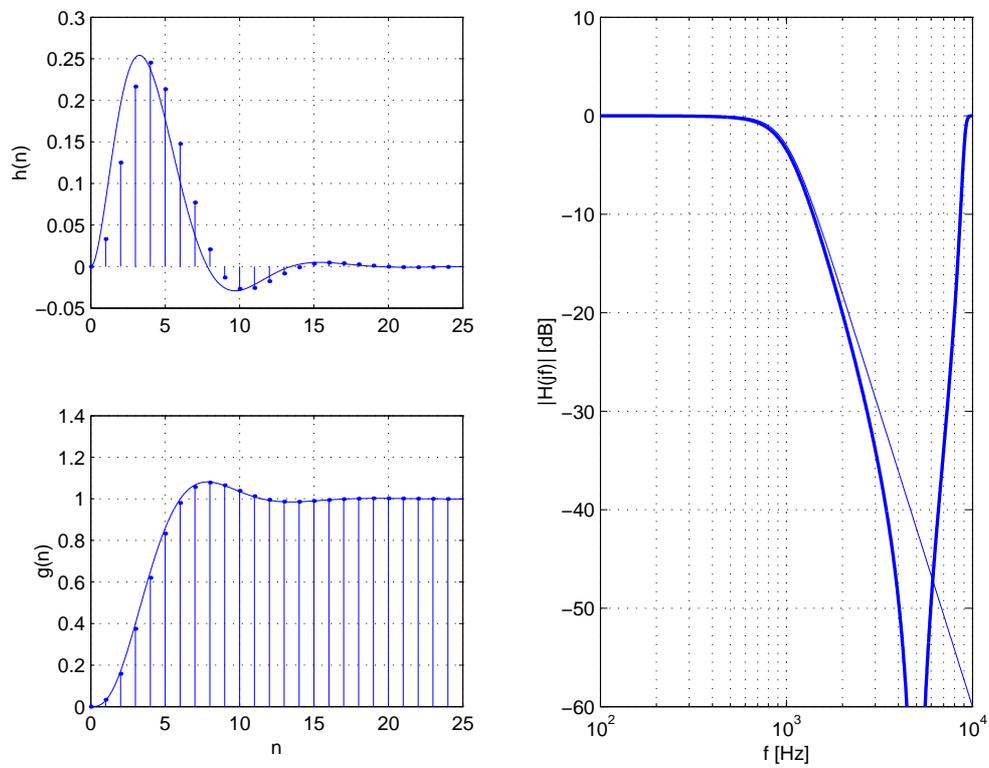


FIG. 2.5.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par modification de la transformation associée

### 2.3.2. Modification de la transformation associée

En observant la réponse fréquentielle du filtre numérique, on remarquera que son atténuation à la fréquence de Nyquist ne dépasse pas 30 dB environ. Ceci représente un des inconvénients majeurs de la méthode. On peut pallier ce défaut en remplaçant les zéros de la fonction de transfert qui se situent en  $z = 0$  par des zéros situés en  $z = -1$ . Comme le gain introduit par chaque nouveau zéro est égal à deux, il ne faut pas oublier de réduire d'autant le gain global. La nouvelle fonction de transfert s'écrit alors

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665(z+1)}{(z-0.5335)} \frac{0.2835(z+1)}{(z^2 - 1.25z + 0.5335)} \quad (2.21)$$

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665(1+z^{-1})}{(1-0.5335z^{-1})} \frac{0.2835(1+z^{-1})}{(1-1.25z^{-1}+0.5335z^{-2})} z^{-1} \quad (2.22)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle du filtre obtenu par la modification de la transformation associée sont représentées dans la figure 2.5 où on les compare avec celles du filtre analogique.

## 2.4. La transformation bilinéaire

### 2.4.1. Introduction

Le but de la transformation bilinéaire est de trouver une équation aux différences du filtre  $H(z)$  dont la solution est proche de celle de l'équation différentielle du filtre analogique  $H(s)$ , solution que l'on obtient par intégration. Parmi les différentes méthodes numériques d'intégration, il en est une qui offre un bon compromis entre la qualité des résultats et la facilité de mise en oeuvre; il s'agit de l'intégration trapézoïdale. Celle-ci revient à remplacer l'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x(t)dt = \int_0^{t-T_e} x(t)dt + \int_{t-T_e}^t x(t)dt$$

par l'opération suivante

$$y[n] = y[n-1] + \frac{(x[n] + x[n-1])}{2} T_e$$

On montre alors aisément que cela revient à remplacer la variable  $s$  par une fonction bilinéaire en  $z$

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \quad (2.23)$$

**Remarque** Si l'on se souvient que l'on a

$$z = e^{+sT_e} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{1}{T_e} \ln(z)$$

il est intéressant de relever que la transformation bilinéaire revient à ne conserver que le premier terme du développement en série de la fonction logarithme naturel

$$\ln(z) = 2 \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \dots$$

### 2.4.2. Transformation bilinéaire d'une fonction de transfert

Comme tout filtre est représenté par des produits de polynômes d'ordre 1 et 2, on se contente d'analyser les deux situations suivantes dans lesquelles on remplacera la variable  $s$  par la fonction

$$s \rightarrow \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2}{T_e} \quad (2.24)$$

**Polynôme d'ordre 1** Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a1}(s) = a_0 + a_1 s \quad (2.25)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 1

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_0 + a_1 \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \gamma) + (a_0 - a_1 \gamma) z^{-1}}{1+z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_1(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2.26)$$

$$\text{avec} \quad q_0 = a_0 + a_1 \gamma \quad (2.27)$$

$$q_1 = a_0 - a_1 \gamma \quad (2.28)$$

**Polynôme d'ordre 2** Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a2}(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad (2.29)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 2

$$\begin{aligned} F_2(z) &= a_0 + a_1 \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a_2 \left( \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2) + 2(a_0 - a_2 \gamma^2) z^{-1} + (a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2) z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_2(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (2.30)$$

$$\text{avec} \quad q_0 = a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 \quad (2.31)$$

$$q_1 = 2(a_0 - a_2 \gamma^2) \quad (2.32)$$

$$q_2 = a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 \quad (2.33)$$

### 2.4.3. Exemple de transformation bilinéaire

Reprenons l'exemple du filtre de Butterworth d'ordre 3 vu précédemment

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)}$$

avec  $\omega_c = 2\pi f_c = 2000\pi \text{ rad/sec}$  et  $f_e = 10 \text{ kHz}$ .

**Solution** Prenant en compte les valeurs numériques, on a  $\gamma = 2/T_e = 2 \cdot 10^4 [\text{sec}^{-1}]$ . La transformation des polynômes donne alors les résultats suivants :

1. Polynôme d'ordre 1 :  $P_{a1}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= +4.1831 \\ q_1 &= a_0 - a_1\gamma = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= -2.1831 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{F_1(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{q_0 + q_1 z^{-1}} = \frac{1 + z^{-1}}{4.1831 - 2.1831 z^{-1}} \\ &= \frac{0.239 (1 + z^{-1})}{1 - 0.5219 z^{-1}} \end{aligned}$$

2. Polynôme d'ordre 2 :  $P_{a2}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s + 2.533 \cdot 10^{-8} s^2$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +14.315 \\ q_1 &= 2(a_0 - a_2\gamma^2) = 2(1 - 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8) \\ &= -18.264 \\ q_2 &= a_0 - a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +7.949 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1}{F_{n2}(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{14.315 - 18.264 z^{-1} + 7.949 z^{-2}} \\ &= \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \end{aligned}$$

## 2.5. Compensation de la distorsion des fréquences

La fonction de transfert globale est ainsi égale au produit de ces deux fonctions de transfert partielles qui correspondent à deux cellules passe-bas à gain unité. La fonction de transfert globale s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.239 (1 + z^{-1})}{1 - 0.5219 z^{-1}} \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \quad (2.34)$$

$$H(z) = \frac{0.239 (z + 1)}{z - 0.5219} \frac{0.06986 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.2759 z + 0.5553} \quad (2.35)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 2.6 où elles sont comparées avec celles du filtre analogique.

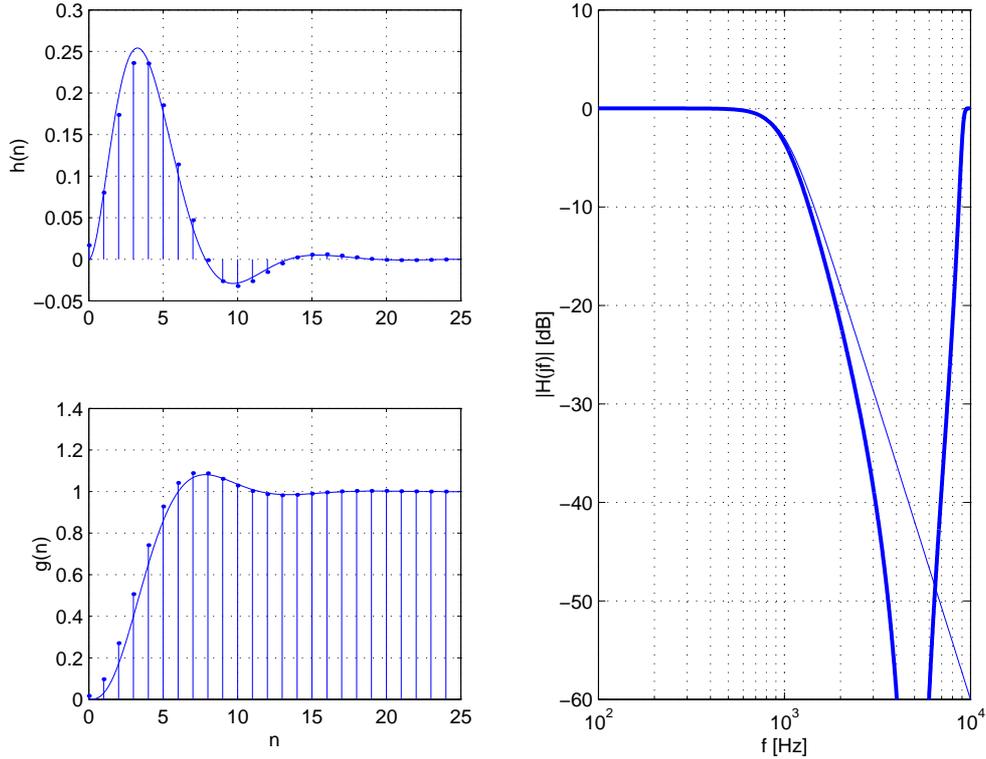


FIG. 2.6.: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation bilinéaire

## 2.5. Compensation de la distorsion des fréquences

Si l'on analyse plus en détail les effets de la transformation bilinéaire, on remarque que celle-ci entraîne une relation non-linéaire entre les pulsations analogique  $\omega$  et numérique  $\Omega$ . En effet, partant de la définition de la transformation bilinéaire

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.36)$$

on obtient dans le domaine fréquentiel

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\omega T_e)}{1 + \exp(-j\omega T_e)} \quad (2.37)$$

## 2. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

Sachant que  $\omega T_e$  représente la pulsation numérique  $\Omega$ , on a

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\Omega)}{1 + \exp(-j\Omega)}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par  $\exp(+j\Omega/2)$ , il vient

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{\exp(+j\Omega/2) - \exp(-j\Omega/2)}{\exp(+j\Omega/2) + \exp(-j\Omega/2)} = \frac{2}{T_e} \frac{2j \sin(\Omega/2)}{2 \cos(\Omega/2)}$$

On en déduit alors que les pulsations analogique  $\omega$  et numérique  $\Omega$  sont reliées entre elles par la relation

$$\omega = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2f_e \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (2.38)$$

On voit ainsi que le domaine des fréquences analogiques variant de 0 à  $+\infty$  est reporté sur un domaine de pulsation numérique allant de 0 à  $+\pi$  (figure 2.7). On notera que c'est seulement pour les basses fréquences ( $\Omega \ll 1$ ) que  $\tan(\Omega/2)$  peut être assimilé à  $\Omega/2$ . Ce qui fait que l'effet de la distorsion est particulièrement marqué lorsque la fréquence d'échantillonnage n'est pas beaucoup plus élevée que la fréquence caractéristique du filtre.

Cette distorsion des fréquences peut être corrigée en remplaçant la pulsation caractéristique  $\omega_c$  par une pulsation  $\omega_d$  prenant en compte l'effet de la distorsion avant d'entreprendre le calcul des coefficients du filtre numérique.

### 2.6. Synthèse d'un filtre numérique récursif

Considérons comme exemple la réalisation d'un filtre numérique de Tchebicheff d'ordre 2, d'ondulation  $r = 1 \text{ dB}$ , de bande passante  $f_r = 3 \text{ kHz}$  et de fréquence d'échantillonnage  $f_e = 10 \text{ kHz}$ .

On notera que, dans un but illustratif, on a choisi la fréquence de Nyquist  $f_N = f_e/2 = 5 \text{ kHz}$  très proche de la fréquence caractéristique du filtre  $f_r = 3 \text{ kHz}$  et que cela conduira à une forte distorsion fréquentielle si l'on n'effectue pas sa compensation.

La synthèse d'un filtre numérique récursif se fait en quatre étapes :

1. *Calcul de la pulsation caractéristique  $\Omega_r$  et celle de prédistorsion  $\omega_d$  :*

$$\Omega_r = 2\pi \frac{f_r}{f_e} = 2\pi \frac{3 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.6 \pi$$

$$\omega_d = 2 f_e \tan\left(\frac{\Omega_r}{2}\right) = 20 \cdot 10^3 \tan(0.3 \pi) = 27 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$$

On notera que l'on a toujours  $\omega_d > \omega_r = 2\pi f_r = 18.8 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$ .

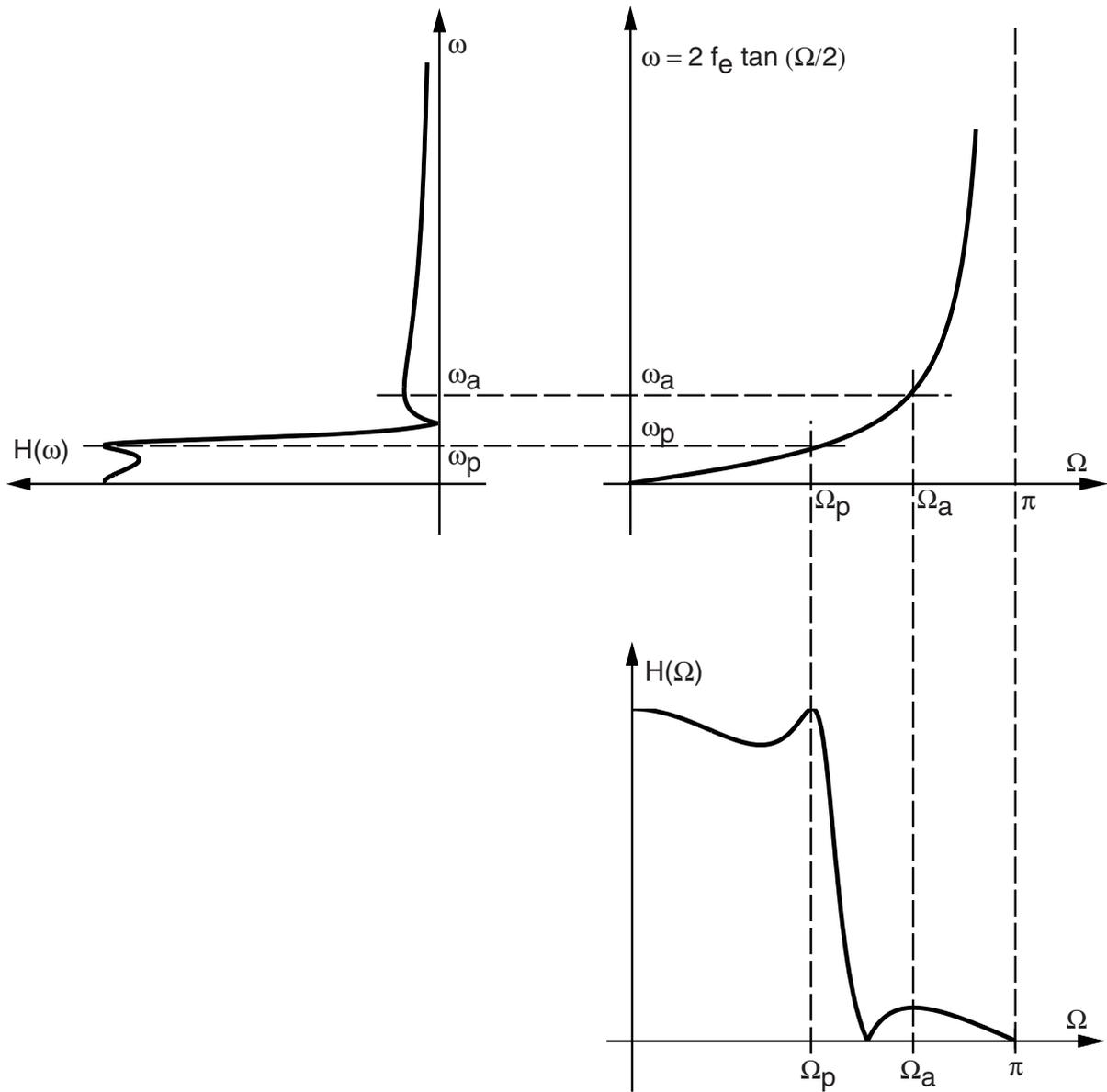


FIG. 2.7.: Relation entre pulsations analogique et numérique

## 2. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

### 2. Recherche du filtre analogique normalisé satisfaisant au gabarit :

Dans cet exemple, le filtre est un passe-bas de Tchebicheff d'ordre 2 et d'ondulation 1 dB. Les tables nous fournissent le polynôme normalisé qui vaut

$$P_{n,2}(s) = \frac{1}{H_n(s)} = 1 + 0.996 s + 0.907 s^2$$

### 3. Calcul du polynôme de réalisation avec prédistorsion :

On effectue le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_d} = 3.63 \cdot 10^{-5} s$$

et on obtient le polynôme de réalisation avec prédistorsion

$$P_{2,d}(s) = 1 + 3.617 \cdot 10^{-5} s + 1.197 \cdot 10^{-9} s^2$$

### 4. Calcul de la fonction de transfert du filtre numérique :

En appliquant la transformation bilinéaire au polynôme de réalisation  $P_{2,d}(s)$  avec  $\gamma = 2 f_e = 2 \cdot 10^4 [\text{sec}^{-1}]$ , on obtient les coefficients

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +2.202 \\ q_1 &= 2 (a_0 - a_2 \gamma^2) = +1.043 \\ q_2 &= a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +0.755 \end{aligned}$$

permettant d'écrire la fonction de transfert numérique suivante

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + 2 z^{-1} + z^{-2}}{2.202 + 1.043 z^{-1} + 0.755 z^{-2}} \\ &= 0.454 \frac{(1 + 2 z^{-1} + z^{-2})}{1 + 0.473 z^{-1} + 0.343 z^{-2}} \end{aligned}$$

Les réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique sont présentées dans la figure 2.8a. Dans un but de comparaison, on a également calculé la fonction de transfert sans prédistorsion en effectuant directement la transformation bilinéaire de  $H(s)$ . Ce qui a donné

$$H_{spd}(z) = 0.325 \frac{(1 + 2 z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0.0137 z^{-1} + 0.313 z^{-2}}$$

Sa réponse fréquentielle est présentée dans la figure 2.8b. On remarquera combien la correction de distorsion est nécessaire pour avoir, comme demandé, un gain unité à la fréquence caractéristique  $f_r = 3 \text{ kHz}$ .

**Remarque** Tout le travail effectué dans les points 1) à 4) ci-dessus pour obtenir la fonction de transfert  $H(z)$  se fait beaucoup plus simplement dans Matlab avec les commandes suivantes :

```
n = 2 ; r = 1 ; fr = 3e3 ;
fe = 10e3 ; fn = fe/2 ;
[num,den] = cheby1(n,r,fr/fn) ;
num = num/sum(num)*sum(den) ; % gain DC = 1
```

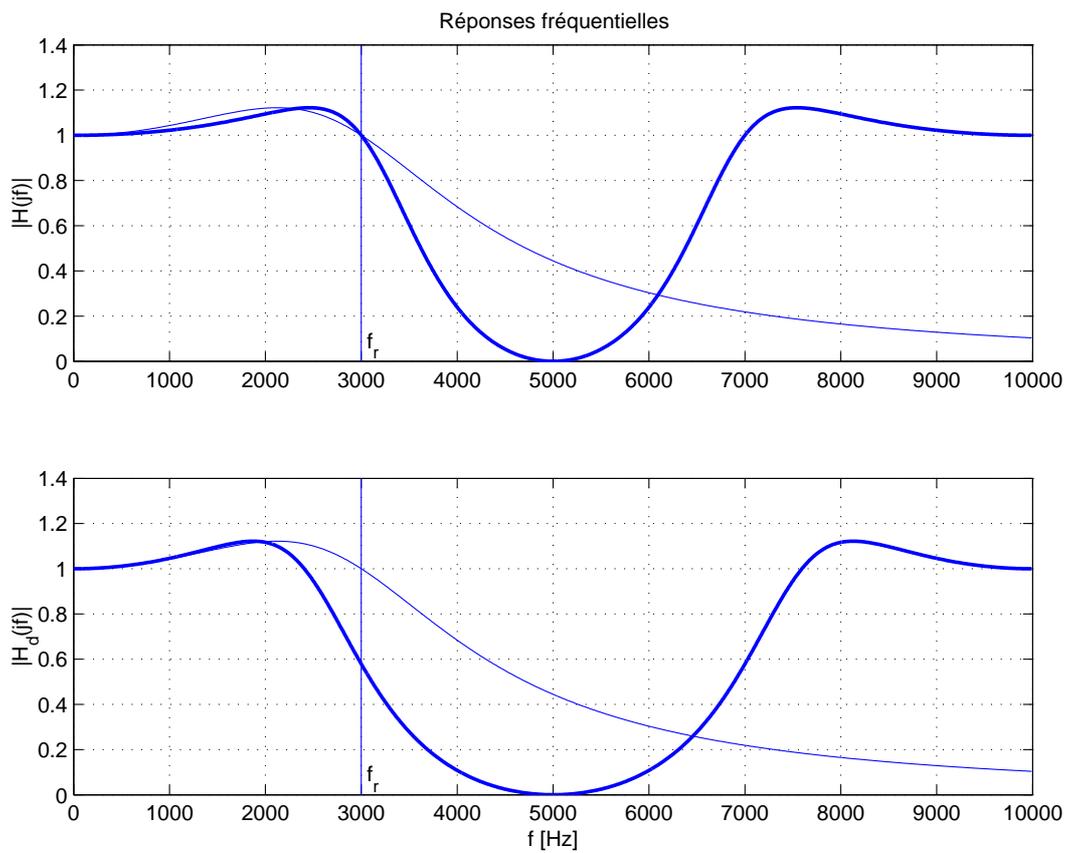


FIG. 2.8.: Réponses fréquentielles des filtres analogiques et numériques avec et sans prédistorsion

## 2.7. Exercices

**RII 1** Partant d'un filtre passe-bas RC, trouvez son équivalent numérique  $H(z)$ . Pour ce faire :

1. écrivez l'équation différentielle du circuit RC ;
2. discrétisez cette équation ;
3. écrivez l'équation aux différences du filtre et dessinez son schéma fonctionnel ;
4. calculez sa fonction de transfert  $H(z)$  ;

**RII 2** Dans l'exercice précédent, on choisit pour le filtre numérique une période d'échantillonnage égale au dixième de la constante de temps  $RC$  du filtre analogique.

1. calculez numériquement sa fonction de transfert  $H(z)$  ;
2. que vaut l'instant caractéristique  $K_c$  ? quelle sera la durée du régime transitoire ?
3. si  $x[n] = \epsilon[n]$ , calculez  $Y(z)$  ; que valent  $y[0]$  et  $y[\infty]$  ? esquissez  $y[n]$  ;
4. que vaut la réponse fréquentielle  $H(j\Omega)$  du filtre numérique ;
5. calculez  $H(j\Omega)$  lorsque la fréquence du signal d'entrée vaut  $f = 0, 1/(2\pi RC), f_e/2$  ? esquissez le module de  $H(j\Omega)$  ;
6. comparez à la réponse fréquentielle du filtre analogique.

**RII 3** Calculez les équivalents numériques  $H_a(z)$  et  $H_b(z)$  d'un filtre RC obtenus par les transformations associée et bilinéaire lorsque  $T_e = RC/10$ . Comparez ces deux résultats entre eux et avec celui de l'exercice précédent.

**RII 4** On souhaite réaliser l'équivalent numérique  $H(z)$  d'un filtre analogique passe-haut de type Butterworth devant travailler jusqu'à  $10 \text{ kHz}$  dont la fonction de transfert est décrite par

$$H(s) = \frac{(s/\omega_c)^2}{1 + 1.414 \cdot (s/\omega_c) + (s/\omega_c)^2} \quad \text{avec} \quad f_c = 1 \text{ kHz}$$

Pour ce faire :

1. esquissez le Bode d'amplitude du filtre analogique ;
2. choisissez la fréquence d'échantillonnage ;
3. calculez son équivalent  $H_a(z)$  à partir de la transformation associée ;
4. calculez son équivalent  $H_b(z)$  à partir de la transformation bilinéaire ;
5. écrivez les équations aux différences correspondantes permettant ces deux réalisations ;
6. dessinez leur schéma fonctionnel ;
7. que valent  $H(\Omega = 0)$  et  $H(\Omega = \pi)$  pour les 2 filtres ?

**RII 5** On désire réaliser un filtre numérique à partir du filtre analogique décrit par

$$H(s) = \frac{5 \cdot 10^{-3} s}{1 + 5 \cdot 10^{-3} s + s^2}$$

1. dessinez les pôles et zéros de  $H(s)$  dans le plan complexe ; esquissez son diagramme de Bode ; de quel type de filtre s'agit-il ?
2. après avoir choisi une fréquence d'échantillonnage qui vous paraît raisonnable, calculez son équivalent numérique  $H(z)$  à l'aide de la transformation bilinéaire ;
3. dessinez les pôles et zéros de  $H(z)$  dans le plan complexe ; où se situent-ils par rapport au cercle de rayon unité ?

**RII 6** Considérant une cellule analogique biquadratique décrite par

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

écrivez un programme (en pseudo-langage) permettant de passer du filtre analogique à sa réalisation numérique. Pour cela :

1. écrivez une procédure ou une fonction permettant de transformer  $H(s)$  en  $H(z)$  à l'aide de la transformation bilinéaire ; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
2. écrivez une procédure ou une fonction calculant  $y[n]$  à partir des paramètres de la cellule biquadratique et de son signal d'entrée  $x[n]$  ; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
3. tenant compte de ce qui vient d'être fait, écrivez un programme permettant de réaliser le filtre suivant

$$H(s) = \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{\omega_2}{s^2 + 2\zeta\omega_2 s + \omega_2^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

Pour relier votre filtre au monde extérieur, utilisez les procédures `AnalogIn` (`var Value : real`) et `AnalogOut` (`Value : real`) .

4. votre programme peut être testé de manière simple à partir des instants caractéristiques et des valeurs initiale et finale de la réponse indicielle du filtre ; calculez ces valeurs.

**N.B. :** Les entrées (`AnalogIn`) se font sur la base d'interruptions commandées par l'horloge interne ; les sorties (`AnalogOut`) sont restituées immédiatement après les calculs.

## 2. SYNTHÈSE DES FILTRES RÉCURSIFS

# 3. Synthèse des filtres non récursifs

## 3.1. Introduction

Les filtres non récursifs que l'on appelle également filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) se distinguent des filtres récursifs étudiés dans le chapitre précédent par les points suivants :

- ils sont toujours stables ;
- ils peuvent être conçus pour avoir une phase linéaire exacte ;
- ils nécessitent généralement plus de matériel et de temps de calcul.

Un filtre non récursif d'ordre  $N$  comporte  $N + 1$  coefficients et peut être décrit de manière équivalente par :

1. sa réponse impulsionnelle de longueur  $L = N + 1$

$$h[n] = \{h[0], h[1], h[2], \dots, h[N]\} = \sum_{k=0}^N h[k] \delta[n - k] \quad (3.1)$$

2. son équation aux différences

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k] x[n - k] \quad (3.2)$$

3. sa fonction de transfert d'ordre  $N$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \quad (3.3)$$

4. sa réponse fréquentielle que l'on évalue en remplaçant  $z^{-1}$  par  $e^{-j\Omega}$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-jn\Omega} \quad (3.4)$$

## 3.2. Spécifications

Les spécifications d'un filtre se donnent sous la forme d'un gabarit en valeurs réelles ou relatives (dB). Un exemple de gabarit pour un filtre passe-bas est illustré dans la figure 3.1. On y trouve :

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

1. la bande passante  $[0, \Omega_p]$  ;
2. les bandes de transition  $(\Omega_p, \Omega_a)$  et d'arrêt  $[\Omega_a, \pi]$  ;
3. l'ondulation acceptée dans la bande passante, exprimée par  $\delta_1$  ou  $R_p$  [dB] ;
4. l'atténuation souhaitée dans la bande d'arrêt, exprimée par  $\delta_2$  ou  $A_a$  [dB].

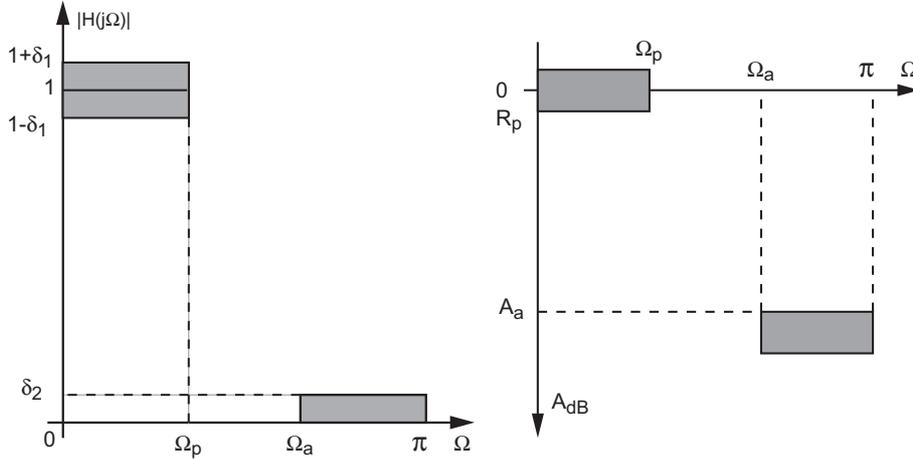


FIG. 3.1.: Gabarit d'un filtre

Le gain du filtre passe-bas valant 1 lorsque  $\Omega \rightarrow 0$ , les relations entre les valeurs réelles ou relatives du gabarit sont alors définies comme suit :

$$R_p = |20 \log(1 \pm \delta_1)| > 0 \quad (3.5)$$

$$A_a = -20 \log(\delta_2) > 0 \quad (3.6)$$

ou inversement :

$$\delta_1 = \pm (10^{+R_p/20} - 1) \quad (3.7)$$

$$\delta_2 = 10^{-A_a/20} \quad (3.8)$$

## 3.3. Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

De manière générale, un filtre RIF ne possède aucune propriété particulière concernant le module ou la phase de la réponse fréquentielle mis à part que c'est le seul type de filtres pouvant offrir une phase linéaire exacte (qui est une des propriétés du filtre idéal). C'est donc essentiellement pour cette propriété que l'on utilise les filtres à réponse impulsionnelle finie.

### 3.3.1. Réponses impulsionnelle et fréquentielle

Dans le cas où on désire avoir une phase linéaire, la réponse impulsionnelle doit posséder une symétrie paire ou une symétrie impaire ou, de manière équivalente, une symétrie axiale ou ponctuelle. La justification en est donnée ci-dessous.

### Symétrie paire

Considérons un filtre RIF d'ordre  $N = 6$  représenté par une séquence  $h[n]$  à symétrie paire par rapport à  $N_s = 3$  (figure 3.2a). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle paire  $h_p[n]$  non causale dont la réponse fréquentielle est réelle.

Le décalage temporel (ici, un retard) nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_p(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_p| \\ \angle H = \{0, \pm\pi\} - N_s\Omega \end{cases} \quad (3.9)$$

Le module de  $H(j\Omega)$  est égal à celui du filtre non causal  $H_p(j\Omega)$  et la phase varie linéairement avec la pulsation. Le cas échéant, on devra, ajouter  $\pm\pi$  à cette phase linéaire pour tenir compte de la valeur négative éventuelle de  $H_p(j\Omega)$ .

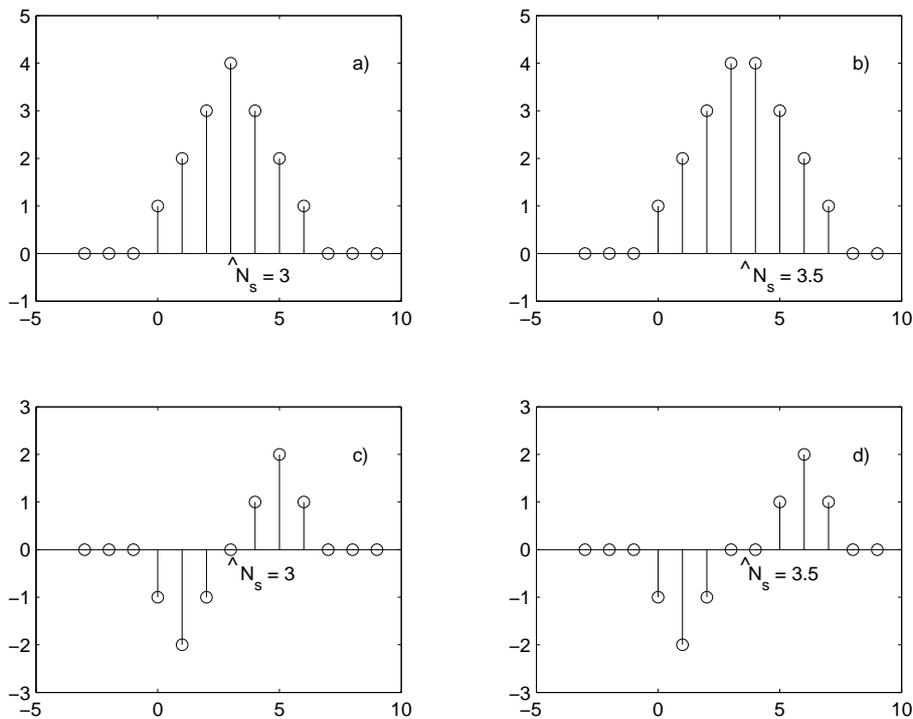


FIG. 3.2.: Réponses impulsionnelles à symétrie paire ou impaire

### Symétrie impaire

Considérons un filtre RIF d'ordre  $N = 6$  représenté par une séquence  $h[n]$  à symétrie impaire par rapport à  $N_s = 3$  (figure 3.2b). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle impaire  $h_i[n]$  non causale dont la réponse fréquentielle est purement imaginaire.

Le décalage temporel nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_i(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_i| \\ \angle H = \pm\pi/2 - N_s\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Le module de  $H(j\Omega)$  est égal à celui du filtre non causal  $H_i(j\Omega)$  et sa phase varie linéairement avec la pulsation à partir de  $\pm\pi/2$  suivant le signe de la valeur imaginaire.

#### Remarque

On peut bien sûr considérer des filtres d'ordre  $N$  impair (figures 3.2c et 3.2d). Dans ce cas, l'axe ou le point de symétrie se situe entre 2 valeurs de la réponse impulsionnelle  $h[n]$  et le déphasage linéaire s'écrira  $-(N_s + \frac{1}{2})\Omega$ . Dans le cadre de ce cours, on n'analysera que des filtres d'ordre  $N$  pair (c'est-à-dire de longueur  $L = N + 1$  impaire) dont le point ou axe de symétrie se situe obligatoirement sur une valeur entière de l'axe  $n$ .

#### Exemple

Considérons comme exemple un filtre causal dont la réponse impulsionnelle finie (figure 3.3a) est décrite par une séquence non-nulle de longueur  $L = 9$  à symétrie paire

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, +5, +4, +3, +2, +1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Par transformation en  $z$  de cette réponse impulsionnelle, on obtient la fonction de transfert du filtre RIF :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7} + 1z^{-8} \\ &= z^{-8} (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 1z^8) \end{aligned}$$

On en conclut que ce filtre RIF, décrit par un polynôme d'ordre  $N = 8$ , possède 8 pôles situés en  $z = 0$  et 8 zéros dont les positions dans le plan complexe sont présentées dans la figure 3.3b.

En remplaçant l'opérateur de retard  $z^{-1}$  par sa transformée de Fourier  $e^{-j\Omega}$ , on obtient la réponse fréquentielle du filtre

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{k=0}^N h[k] e^{-j\Omega k} \\ &= 1 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 4e^{-j3\Omega} + 5e^{-j4\Omega} + 4e^{-j5\Omega} + 3e^{-j6\Omega} + 2e^{-j7\Omega} + 1e^{-j8\Omega} \end{aligned}$$

En mettant en évidence le phaseur central  $e^{-j4\Omega}$ , on obtient une forme illustrant clairement la symétrie paire du filtre

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 5 + 4e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 2e^{-j3\Omega} + 1e^{-j4\Omega})$$

### 3.3. Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

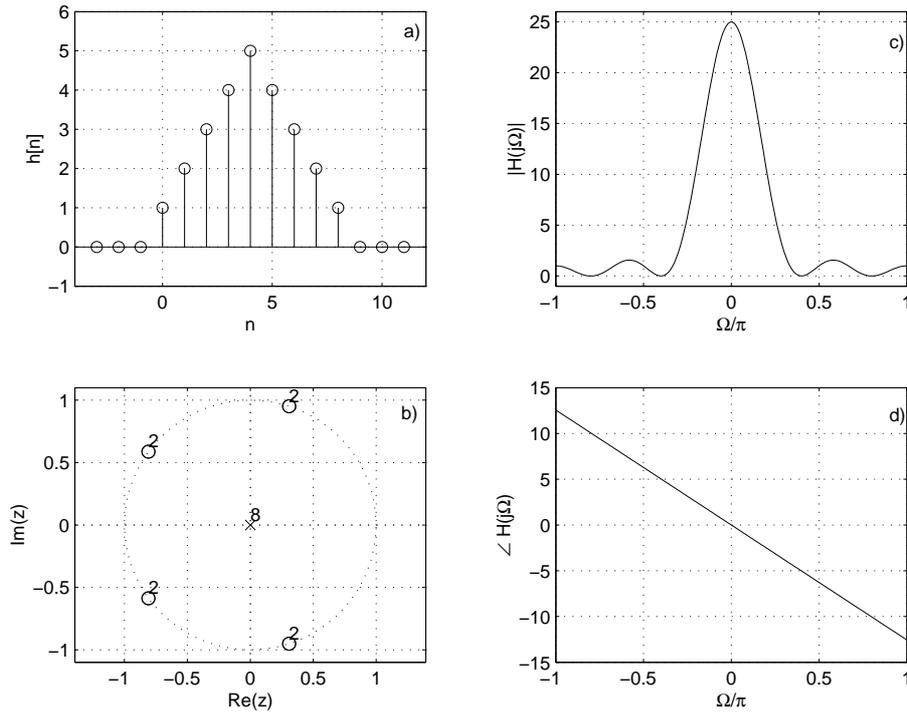


FIG. 3.3.: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie paire

Utilisant la formule d'Euler  $2 \cos \varphi = \exp(+j\varphi) + \exp(-j\varphi)$ , on obtient finalement

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega))$$

Ce résultat montre à l'évidence que l'on a affaire à un filtre à phase linéaire puisque le seul terme complexe de l'expression est le phaseur  $e^{-j4\Omega}$ . Ce filtre RIF possède donc une réponse fréquentielle en amplitude (figure 3.3c) qui vaut

$$|H(j\Omega)| = |5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega)|$$

et une phase (figure 3.3d) décrite par

$$\angle H(j\Omega) = -4\Omega$$

À titre de comparaison, il est intéressant de tracer les mêmes graphes (figure 3.4) pour un filtre réalisé avec une réponse impulsionnelle similaire à la précédente mais avec une symétrie impaire cette fois-ci :

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 0 - 4e^{-j\Omega} - 3e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega} - 1e^{-j4\Omega}) \\ &= 2j e^{-j4\Omega} (4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega)) \\ &= 2 | (4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega)) | \angle + \pi/2 - 4\Omega \end{aligned}$$

On peut relever que la symétrie paire conduit à un filtre passe-bas alors que la symétrie impaire fournit un filtre passe-haut ou passe-bande.

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

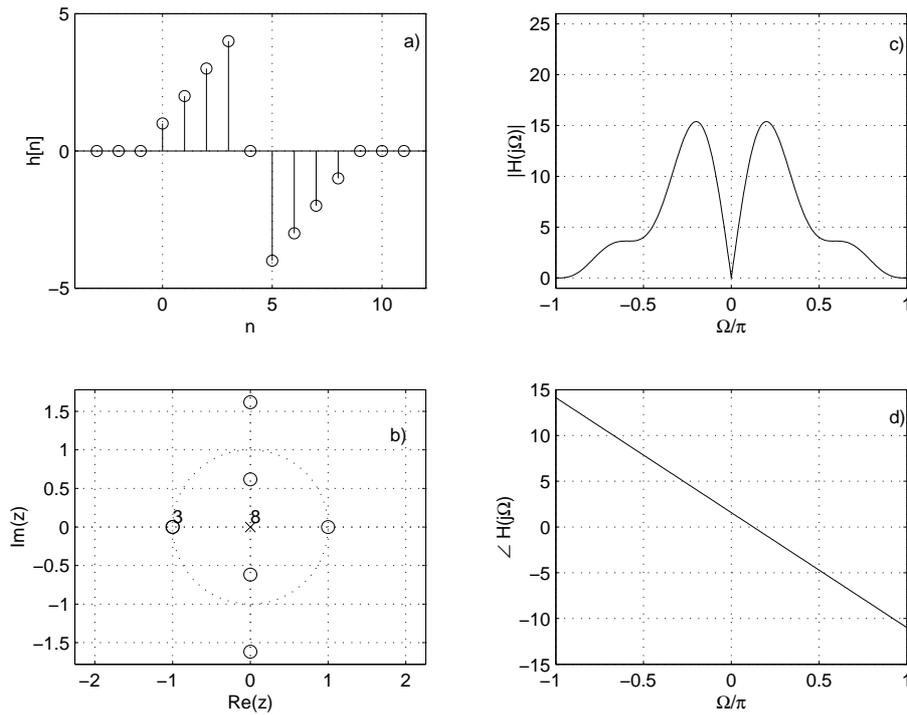


FIG. 3.4.: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie impaire

## 3.4. Synthèse par fenêtrage

### 3.4.1. Principe du fenêtrage

Le point de départ de la synthèse des filtres RIF est donné par la considération des réponses impulsionnelles des filtres idéaux. Comme celles-ci sont infiniment longues et non causales, on voit immédiatement que les filtres idéaux ne sont pas réalisables. On doit donc manifestement se contenter d'une approximation de leurs réponses en les tronquant avant de les rendre causales.

Pour voir plus précisément comment cela se passe, considérons la réponse fréquentielle  $H_d(j\omega)$  d'un filtre analogique passe-bas idéal (figure 3.5a). Sa réponse impulsionnelle  $h_d(t)$  se calcule par transformation de Fourier inverse. On obtient ainsi une réponse temporelle en forme de sinus cardinal et de longueur infinie (figure 3.5b).

De manière à ce que ce filtre soit réalisable, il faut tronquer cette réponse en respectant sa symétrie paire (figure 3.5d). On obtient alors un filtre à réponse impulsionnelle de durée finie, mais non causale puisque  $h(t)$  n'est pas nulle pour  $t < 0$ . Un décalage de cette réponse à symétrie paire suffit à rendre le filtre causal (figure 3.5f), donc à phase linéaire (figure 3.5e). Bien entendu, le module de sa réponse fréquentielle ne sera plus qu'une approximation de l'idéal (figure 3.5c).

D'un point de vue mathématique, le fait de tronquer la réponse impulsionnelle  $h_d(t)$  revient à multiplier celle-ci par une fenêtre rectangulaire  $w_r(t)$  et la réponse impul-

sionnelle s'écrit alors :

$$h(t) = h_d(t) \cdot w_r(t) \quad (3.11)$$

Pour un filtre numérique, on aura de manière équivalente :

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_r[n] \quad (3.12)$$

### 3.4.2. Effet de la troncation

L'opération de troncation qui, dans une première approche peut sembler anodine, modifie sensiblement la réponse fréquentielle et entraîne des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt. Ceci provient de la convolution entre la réponse fréquentielle du filtre idéal et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre rectangulaire :

$$H(j\Omega) = H_d(j\Omega) \otimes W(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(j\theta) W(j\Omega - j\theta) d\theta \quad (3.13)$$

La figure 3.6 montre à l'évidence que l'ondulation caractérisant la réponse obtenue  $H(j\Omega)$  provient du spectre  $W(j\Omega)$  de la fenêtre choisie, ici rectangulaire.

Afin d'obtenir le meilleur compromis possible entre une faible ondulation et une bande de transition étroite, on sera donc amené par la suite à choisir une fenêtre  $w[n]$  dont le comportement fréquentiel est satisfaisant du point de vue du filtre à réaliser. C'est-à-dire que l'on cherchera un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur des bandes de transition.

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

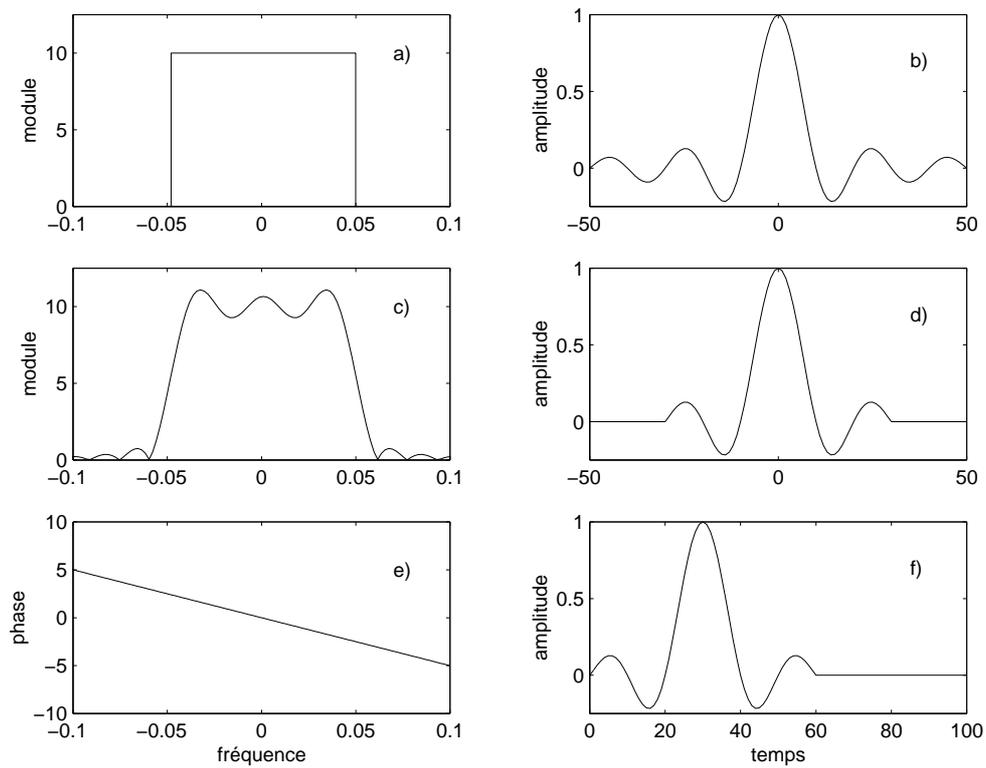


FIG. 3.5.: Passage du filtre idéal au filtre réalisable

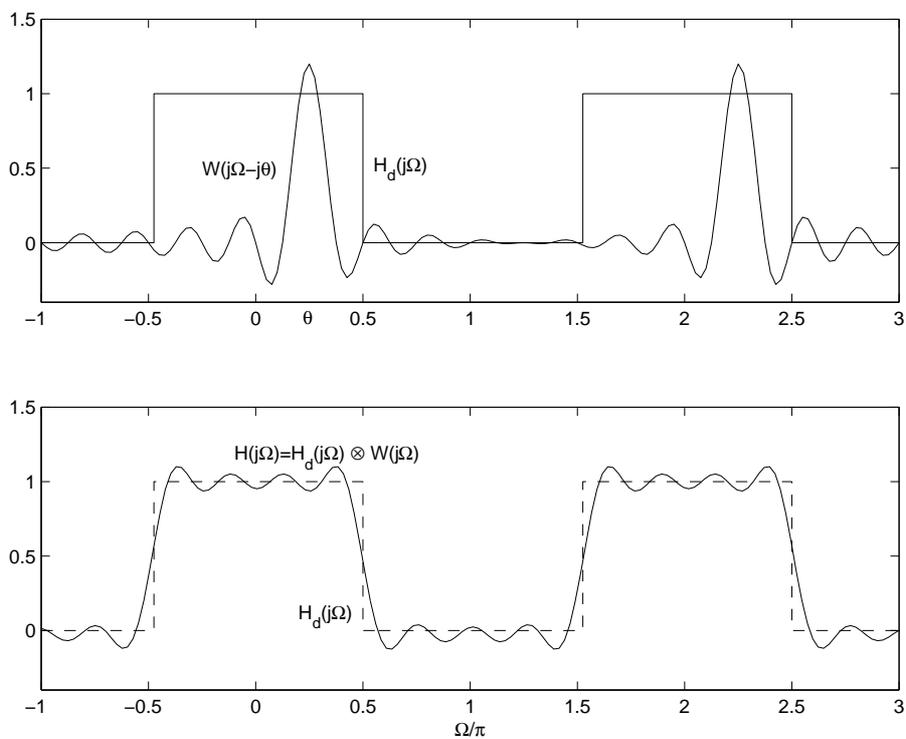


FIG. 3.6.: Convolution circulaire dans le domaine des fréquences

## 3.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

Comme la synthèse par fenêtrage utilise les réponses impulsionnelles des filtres idéaux, il est nécessaire de les connaître. Ces réponses impulsionnelles sont calculées en partant des réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande (figure 3.7).

### 3.5.1. Filtre passe-bas

Avec  $\Omega_c$  comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_b(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{si } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (3.14)$$

Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

$$h_b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_b(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (3.15)$$

Tenant compte de la réponse fréquentielle idéale du filtre passe-bas, il vient :

$$\begin{aligned} h_b[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} \exp(+jn\Omega) d\Omega \\ &= \frac{\exp(+jn\Omega_c) - \exp(-jn\Omega_c)}{j2\pi n} \end{aligned}$$

Utilisant les relations d'Euler, on obtient finalement :

$$h_b[n] = \frac{\Omega_c \sin(n\Omega_c)}{\pi n\Omega_c} \quad -\infty < n < +\infty \quad (3.16)$$

Cette réponse temporelle est infiniment longue et non causale. Afin de la rendre causale, il faut tout d'abord la tronquer pour avoir une réponse impulsionnelle de d'ordre  $N$  puis la décaler de la moitié de sa longueur.

En choisissant de travailler avec une réponse impulsionnelle d'ordre  $N$  pair centrée en  $N_s = N/2$ , il vient :

$$h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c \sin((n-N_s)\Omega_c)}{\pi (n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

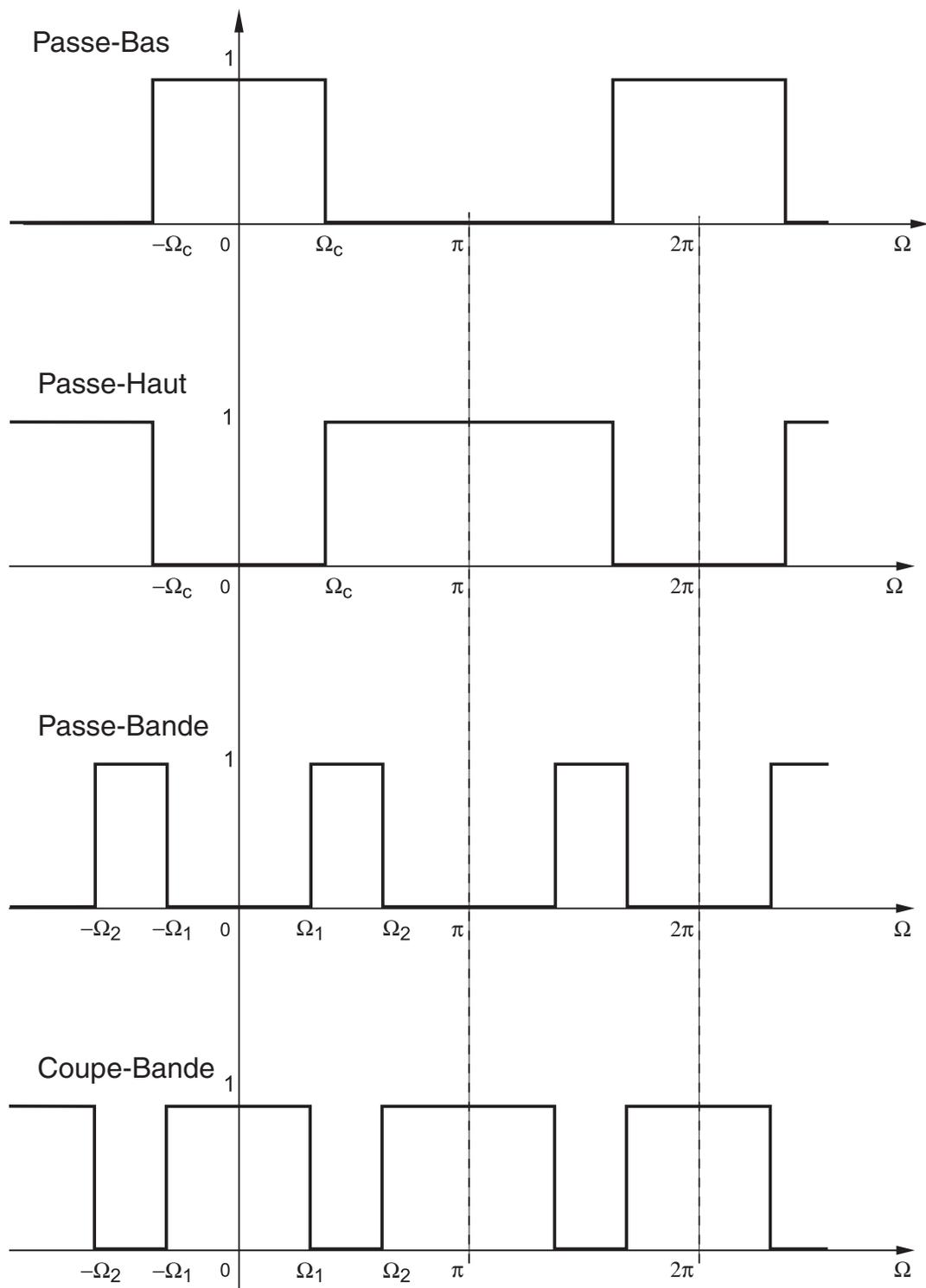


FIG. 3.7.: Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres standard

### 3.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

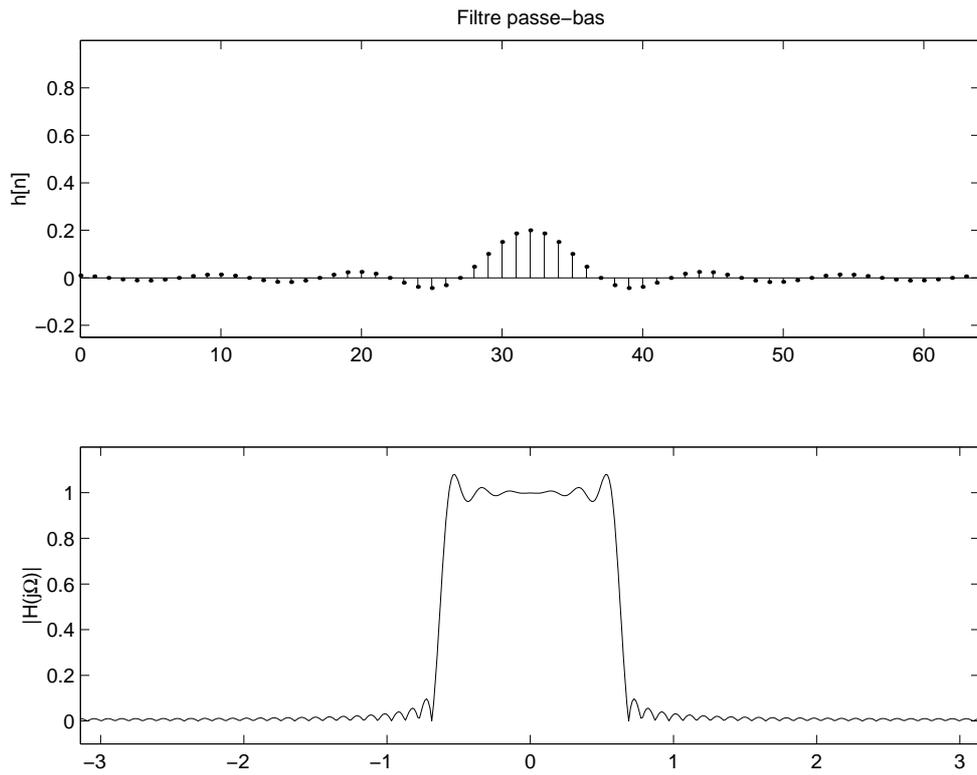


FIG. 3.8.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bas

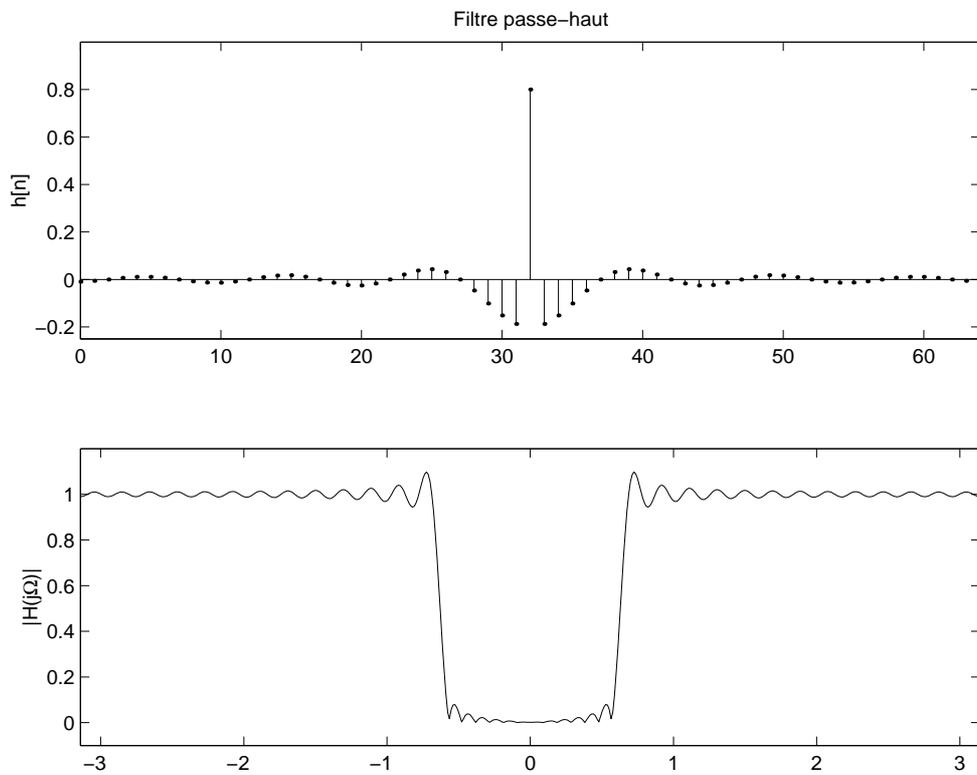


FIG. 3.9.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-haut

### 3.5.2. Filtre passe-haut

Dans ce cas, avec  $\Omega_c$  comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_h(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 1 & \text{si } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (3.18)$$

On peut remarquer que les réponses fréquentielles d'un passe-bas et d'un passe-haut sont reliées entre elles par :

$$H_h(j\Omega) = 1 - H_b(j\Omega) \quad (3.19)$$

Ce qui, dans l'espace temps, correspond à :

$$h_h[n] = \delta[n] - h_b[n] \quad (3.20)$$

On en déduit donc immédiatement que :

$$h_h[n] = \begin{cases} -\frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.21)$$

### 3.5.3. Filtre passe-bande et réjecteur de bande

Les filtres passe-bande et réjecteur de bande possèdent 2 pulsations caractéristiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  limitant les bandes passante et d'arrêt. On montre aisément les deux résultats suivants :

1. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande

$$h_\Delta[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} - \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.22)$$

2. Réponse impulsionnelle d'un filtre réjecteur de bande

$$h_r[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} - \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.23)$$

Le calcul de ces réponses impulsionnelles est laissé comme exercice.

### 3.5. Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

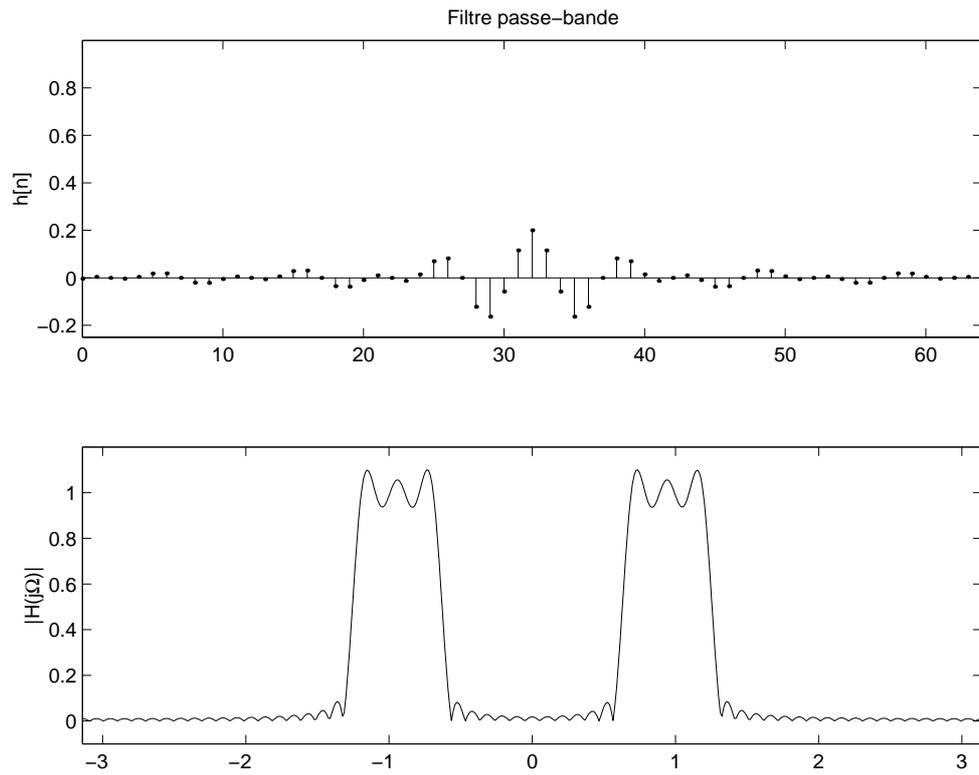


FIG. 3.10.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande

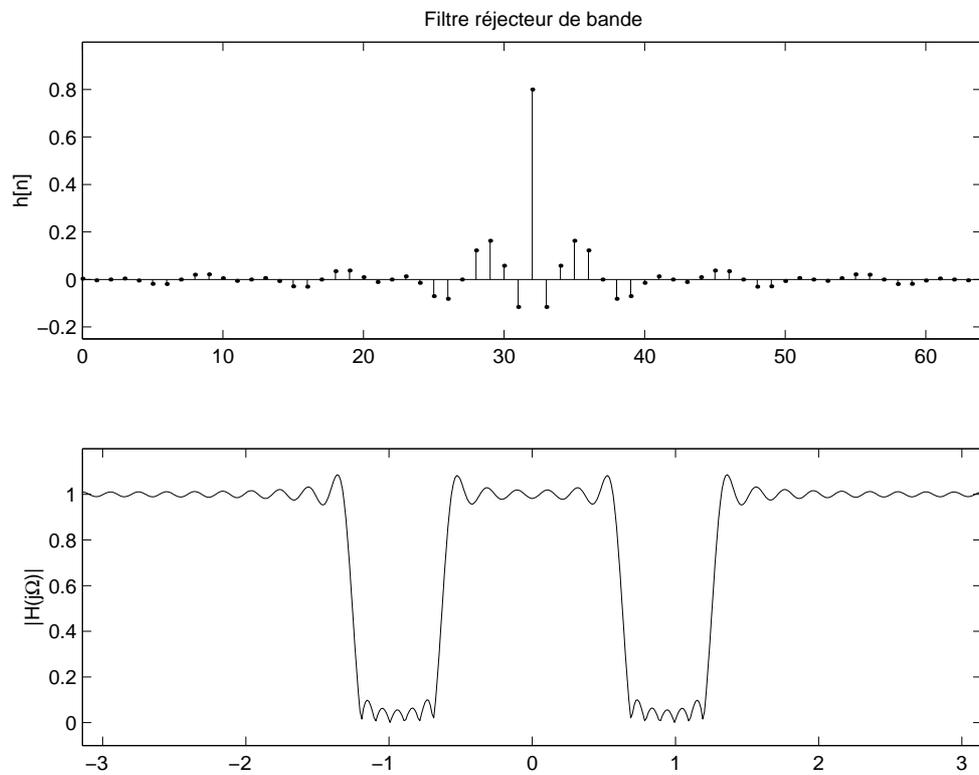


FIG. 3.11.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre réjecteur de bande

**Exemple** Réalisation d'un filtre non récursif élémentaire basé sur la réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas ayant une bande passante de 1 kHz alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

## 3.6. Caractéristiques de quelques fenêtres

Du choix de la fenêtre, dépendra la qualité de l'approximation ; il est donc nécessaire de passer en revue les caractéristiques de celles-ci. On rappellera tout d'abord que si on désire conserver la phase linéaire du filtre, il faut que les fenêtres possèdent une symétrie paire ou impaire.

Comme on l'a vu plus haut, la troncation simple de la réponse impulsionnelle de longueur infinie conduit à une réponse fréquentielle avec des ondulations importantes. Celles-ci sont dues au phénomène de Gibbs et ne peuvent être diminuées que si la fenêtre possède des transitions douces, contrairement à la troncation simple.

Les fenêtres susceptibles de satisfaire les besoins de synthèse des filtres et d'analyse spectrale ont fait l'objet d'études extensives [3]. Parmi les nombreuses fenêtres proposées, seules celles qui sont le plus souvent citées sont présentées ci-après.

### 3.6.1. Fenêtres analytiques

Pour chacune des fenêtres étudiées, on présentera son équation  $w[n]$  et une figure comportant 4 graphes :

1. son graphe temporel  $w[n]$
2. son spectre d'amplitudes  $W(j\Omega) = TF \{w[n]\}$
3. son spectre d'amplitudes en dB  $W_{dB} = 20 \log (|W(j\Omega)|)$
4. son spectre cumulé défini comme suit [1] :

$$W_{cum}(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\Omega} W(j\theta) d\theta \quad (3.24)$$

Cette représentation peu commune est importante car grâce à elle, on peut mesurer le niveau d'atténuation possible ainsi que la largeur de la bande de transition pour un filtre RIF. Sa définition découle de la convolution entre une réponse fréquentielle constante et le spectre de la fenêtre  $w[n]$ .

#### Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

**Fenêtre triangulaire (ou de Bartlett)**

$$w_t[n] = \begin{cases} 2\frac{n}{N} & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 \\ 2 - 2\frac{n}{N} & \text{si } N/2 < n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.26)$$

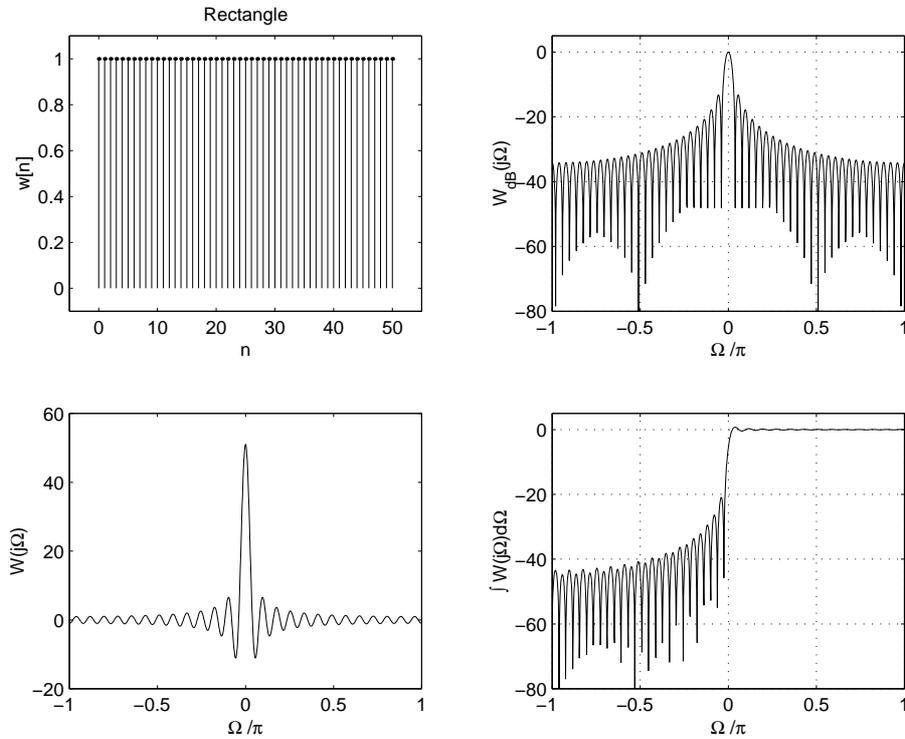


FIG. 3.12.: Fenêtre rectangulaire

**Fenêtre cosinoïdale (ou de Hann)**

$$w_c[n] = \begin{cases} 0.5(1 - \cos(2\pi\frac{n}{N})) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

**Fenêtre de Hamming**

$$w_h[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi\frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

**Fenêtre de Blackman**

$$w_b[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi\frac{n}{N}) + 0.08 \cos(4\pi\frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

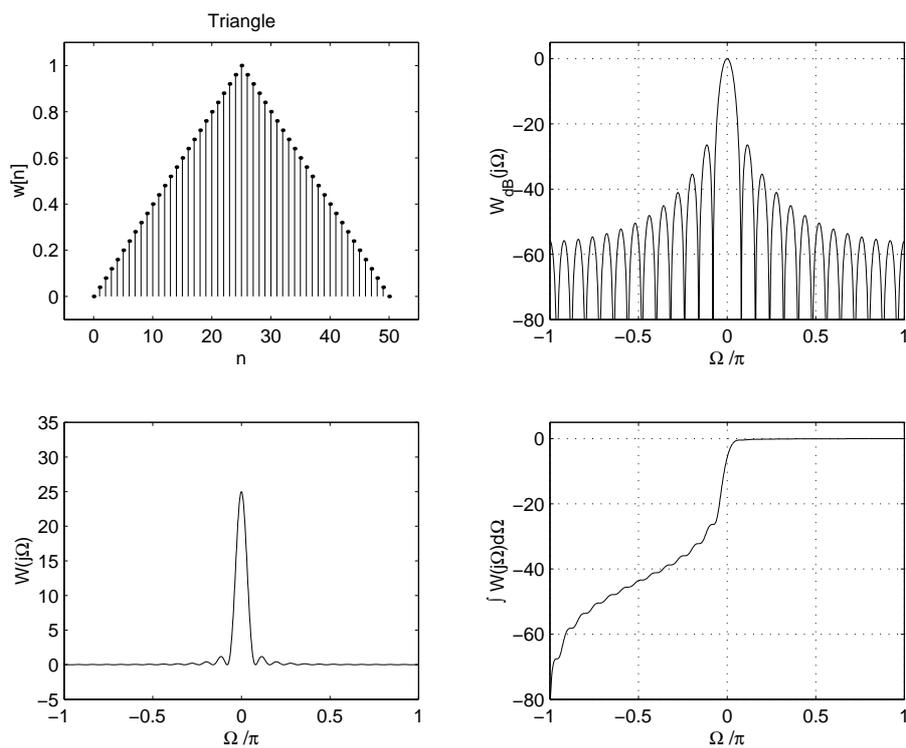


FIG. 3.13.: Fenêtre triangulaire

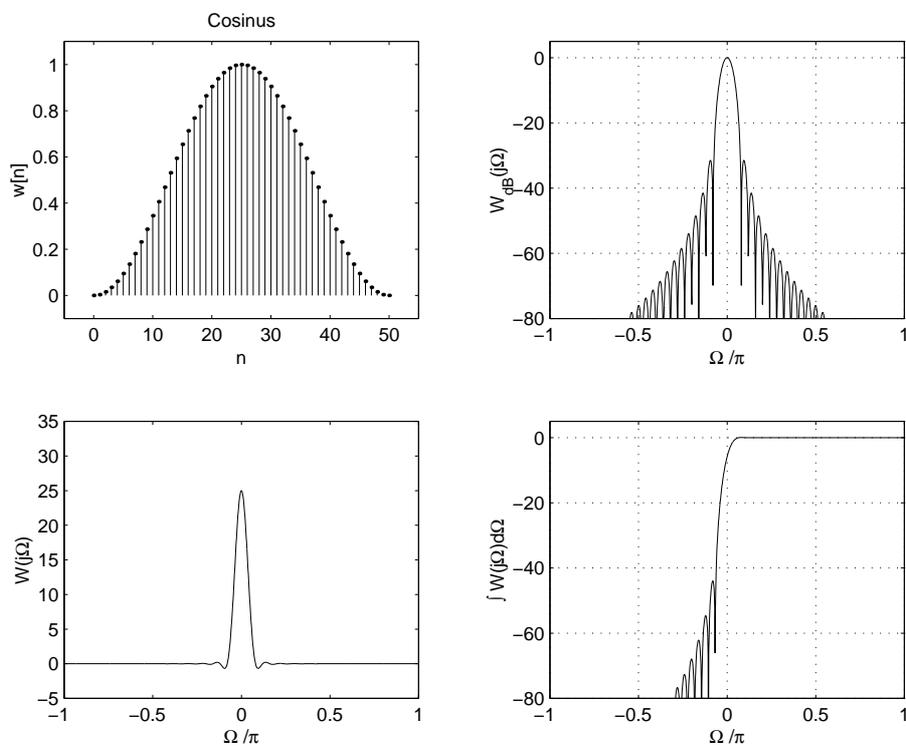


FIG. 3.14.: Fenêtre cosinusoidale (ou de Hann)

### 3.6. Caractéristiques de quelques fenêtres

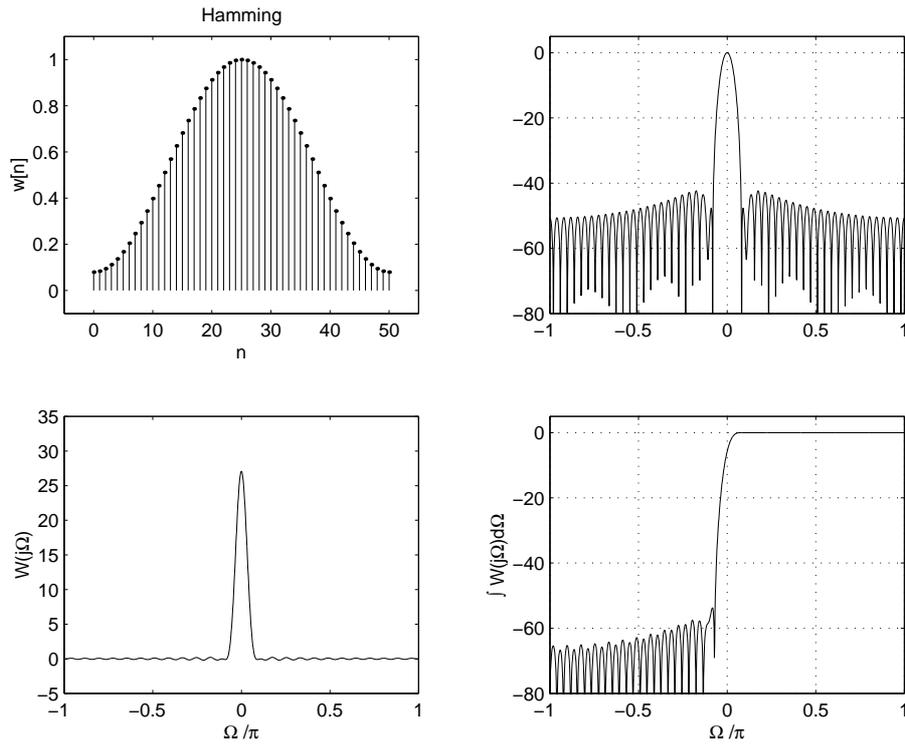


FIG. 3.15.: Fenêtre de Hamming

#### 3.6.2. Fenêtre de Kaiser-Bessel

Les fenêtres présentées ci-dessus ont des formes et des atténuations fixes apportant chacune sa largeur du lobe principal et son atténuation des lobes latéraux. La contribution de Kaiser fut de proposer une fenêtre s'adaptant à l'atténuation désirée. Cette fenêtre est définie par une fonction de Bessel :

$$w_k[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-(1-n/N_s)^2})}{I_0(\beta)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.30)$$

avec :

- $I_0$  = fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro
- $\beta$  = paramètre de forme de la fenêtre
- $N_s = N/2$  = point de symétrie de la fenêtre

#### Calcul de la fonction de Bessel

L'usage fréquent des fenêtres de Hann ou de Hamming est dû à ce que ces fonctions sont familières et faciles à calculer. Cependant, bien que la fonction de Bessel soit en général peu connue, il est aisé de la calculer en utilisant son développement en

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

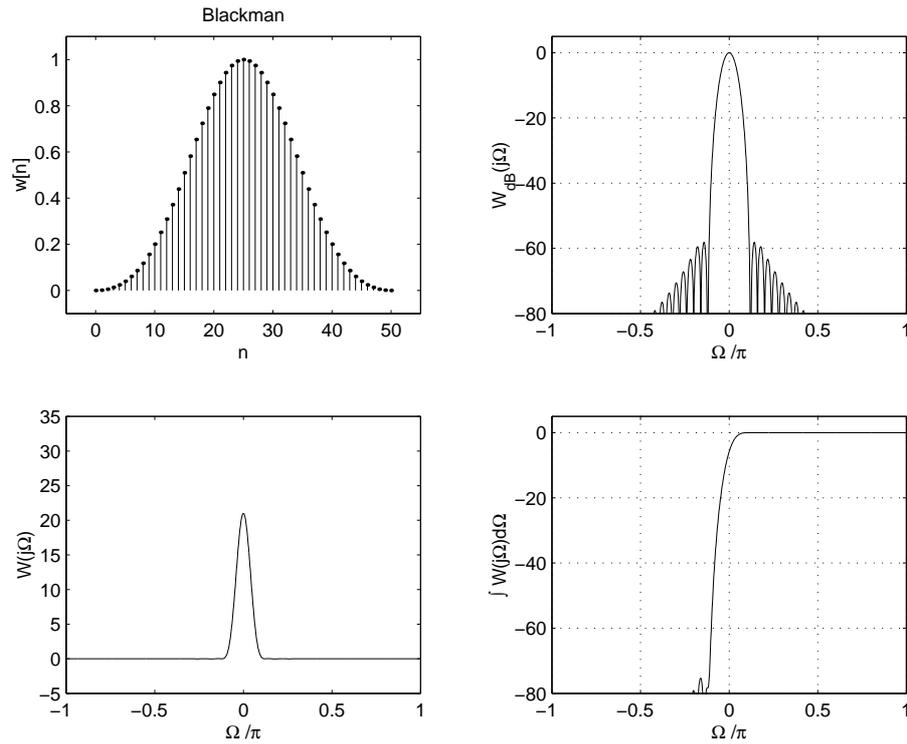


FIG. 3.16.: Fenêtre de Blackman

série :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \right]^2 \quad (3.31)$$

Cette série converge rapidement et la procédure de calcul proposée par Kaiser est très simple à mettre en oeuvre :

```

function Bessel0 (x :real) :real;
  const eps = 1.0e-6;
  var d, ds, s : real;
begin
  d := 0.0;  ds := 1.0;  s := 1;
  repeat
    d := d + 2.0;
    ds := ds * (x / d) * (x / d);
    s := s + ds;
  until abs (ds/(s+eps)) < eps;
  Bessel0 := s;
end;
```

#### Calcul des paramètres des fenêtres de Kaiser

La figure 3.18 montre les caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser. On en tire les conclusions suivantes :

### 3.6. Caractéristiques de quelques fenêtres

- en augmentant la longueur du filtre  $N$ , on diminue la largeur du lobe principal
- en augmentant le paramètre de forme  $\beta$ , on diminue l'amplitude des lobes latéraux.

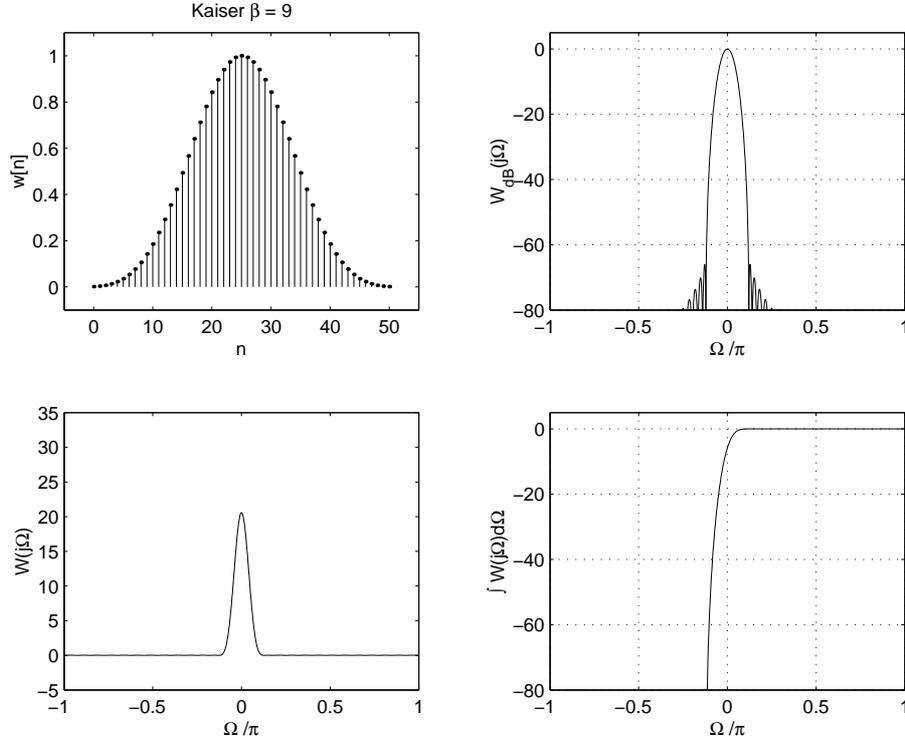


FIG. 3.17.: Fenêtre de Kaiser avec  $\beta = 9$

Après une simulation numérique extensive, Kaiser a obtenu une paire de formules qui permettent de trouver  $\beta$  et  $N$  à partir des spécifications demandées. Ces spécifications sont l'atténuation  $A_{dB}$  et la largeur de la bande de transition  $\Delta\Omega$  exprimée en radians.

Le facteur de forme  $\beta$  dépend uniquement de l'atténuation  $A_{dB}$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (A_{dB} - 8.7) & \text{si } A_{dB} > 50 \\ 0.5842 (A_{dB} - 21)^{0.4} + 0.078862 (A_{dB} - 21) & \text{si } 21 \leq A_{dB} \leq 50 \\ 0 & \text{si } A_{dB} < 21 \end{cases} \quad (3.32)$$

La longueur du filtre est déterminée par l'atténuation  $A_{dB}$  et la bande de transition  $\Delta\Omega$  souhaitée

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} \quad (3.33)$$

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

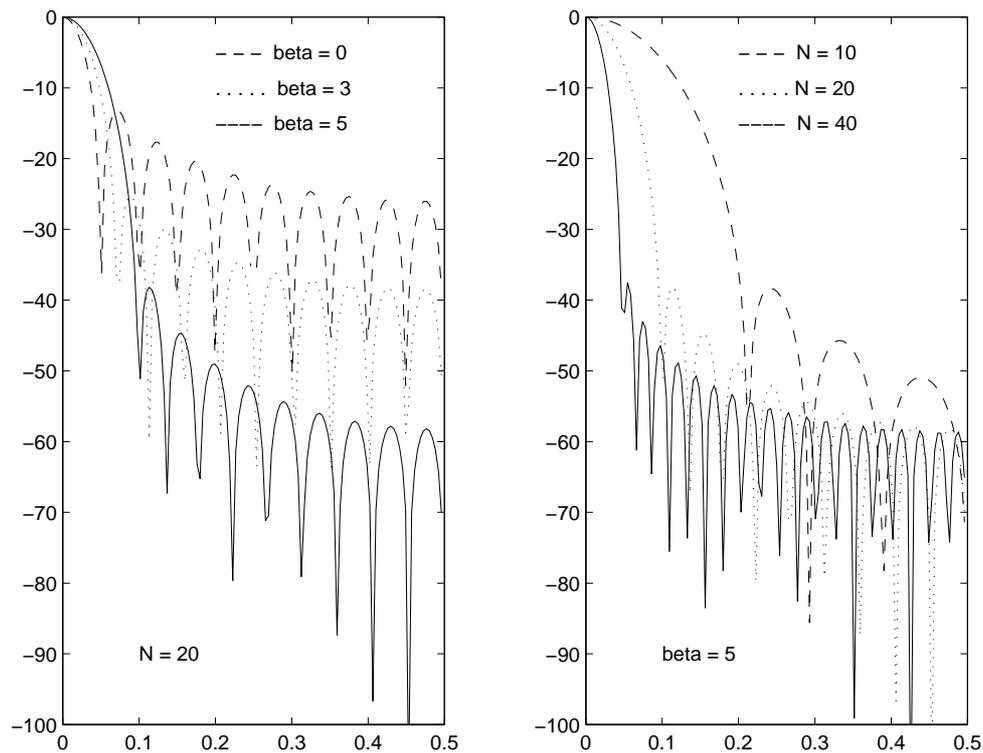


FIG. 3.18.: Caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser

## 3.7. Conclusions sur l'usage des fenêtres

### 3.7.1. Propriétés et utilisation des fenêtres

L'ensemble des propriétés concernant les fenêtres et les filtres étudiés ci-dessus sont réunies dans les tableaux 3.1 à 3.3. On y trouve les caractéristiques spectrales de quelques fenêtres usuelles, les caractéristiques des filtres RIF en fonction des fenêtres utilisées, les avantages et inconvénients de ces fenêtres.

Fenêtres	Largeur du 1er lobe	Atténuation du 1er lobe [dB]	Décroissance des lobes suivants
Rectangle	$4\pi/N$	-13	20 dB/déc
Triangle (Bartlett)	$8\pi/N$	-27	40 dB/déc
Cosinus (Hann)	$8\pi/N$	-32	60 dB/déc
Hamming	$8\pi/N$	-43	20 dB/déc
Blackman	$12\pi/N$	-58	60 dB/déc
Kaiser $\beta = 4.54$	$7.2\pi/N$	-30	20 dB/déc
Kaiser $\beta = 5.66$	$8.4\pi/N$	-42	20 dB/déc

TAB. 3.1.: Caractéristiques spectrales des fenêtres usuelles

### 3.7. Conclusions sur l'usage des fenêtres

Fenêtres	Ondulation $R_p$ [dB]	Atténuation max. $A_{max}$ [dB]	Bande de transition $\Delta\Omega$
Rectangle	0.74	21	$1.8 \pi/N$
Triangle (Bartlett)	0	25	$6.1 \pi/N$
Cosinus (Hann)	0.055	44	$6.2 \pi/N$
Hamming	0.014	53	$6.6 \pi/N$
Blackman	0.0017	74	$11 \pi/N$
Kaiser $\beta = 4.54$	0.025	50	$5.8 \pi/N$
Kaiser $\beta = 5.66$	0.009	60	$7.2 \pi/N$

TAB. 3.2.: Caractéristiques des réponses fréquentielles des filtres RIF

Fenêtres	+/-	Remarques
Triangle (Bartlett)	+	simple à calculer ; pas de sinus ou cosinus
	+	bande spectrale étroite
	-	faible réjection (25 dB)
	=	décroissance spectrale moyenne (-40 dB/déc)
Cosinus (Hann)	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	=	réjection raisonnable (44 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Hamming	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	+	bonne réjection (53 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
Blackman	+	simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	très bonne réjection (74 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Kaiser	-	moins simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	excellente réjection (100 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
	++	meilleur compromis atténuation / bande de transition

TAB. 3.3.: Avantages et inconvénients des fenêtres utilisées dans la réalisation de filtres RIF

### 3.7.2. Démarche pour calculer un filtre

La démarche à suivre pour obtenir les coefficients du filtre souhaité est la suivante :

1. connaissant le gabarit du filtre désiré, choisir le filtre idéal correspondant ;
2. calculer les pulsations caractéristiques  $\Omega_k$  se situant au centre des bandes de transition ;
3. rechercher la réponse impulsionnelle  $h_d[n]$  du filtre idéal ; si celle-ci n'est pas connue, on peut la calculer par transformation de Fourier inverse ;
4. choisir une fenêtre  $w[n]$  satisfaisante du point de vue de l'atténuation (table 3.2) ;
5. connaissant la largeur de la bande de transition  $\Delta\Omega$ , calculer l'ordre du filtre  $N$  ;
6. calculer les coefficients du filtre en multipliant la réponse impulsionnelle par la fenêtre choisie

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

## 3.8. Réalisation d'un filtre passe-bas

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bas satisfaisant au cahier des charges suivant :

$$f_p = 1 \text{ kHz}, \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.4 \text{ kHz}, \quad A_a = 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

### 3.8.1. Préliminaires

La réponse du filtre sera construite à partir de celle d'un filtre passe-bas idéal tel que :

1. la fréquence de coupure se situe au centre de la bande de transition

$$f_c = \frac{f_p + f_a}{2} = 1.2 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_e} = 2\pi \frac{1.2 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.24 \pi$$

2. la largeur de la bande de transition requise vaut

$$\Delta f = f_a - f_p = 0.4 \text{ kHz}$$

on a donc :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.4 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.08 \pi$$

3. la réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bas (équ. 3.17)

$$h_d[n] = h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. le tableau 3.2 montre que pour cet exemple, on peut utiliser la fenêtre de Hamming ou la fenêtre universelle de Kaiser. Considérons ces deux cas.

### 3.8.2. Fenêtrage de Hamming

La fenêtre de Hamming apporte une atténuation de 53 dB et une bande de transition de largeur

$$\Delta\Omega = \frac{6.6 \pi}{N}$$

On en déduit immédiatement la longueur  $N$  du filtre :

$$N = \frac{6.6 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.6 \pi}{0.08 \pi} = 82.5 \simeq 84$$

que l'on a arrondi à la première valeur paire supérieure. Le point de symétrie se situe donc en  $N_s = 42$ . Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 3.17), on obtient :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} \\ &= \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Hamming  $w_h[n]$ , on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \cdot (0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{84})) & \text{si } 0 \leq n \leq 84 \\ 0.24 & \text{si } n = 42 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 3.19. Il est intéressant de relever que, en plus de la phase linéaire offerte par le filtre RIF, sa bande de transition est remarquablement étroite.

À titre comparatif, on y a ajouté en pointillé la réponse d'un filtre de Butterworth d'ordre 12 (filtre RII). Ce filtre d'ordre 12 réalisé avec 6 cellules biquadratiques requiert environ 36 multiplications-additions contre 84 pour le filtre RIF. Théoriquement, le gabarit aurait pu être respecté avec un filtre RII d'ordre 24.

La figure 3.20 illustre la différence de comportement des réponses indicielles des filtres RIF ou RII.

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

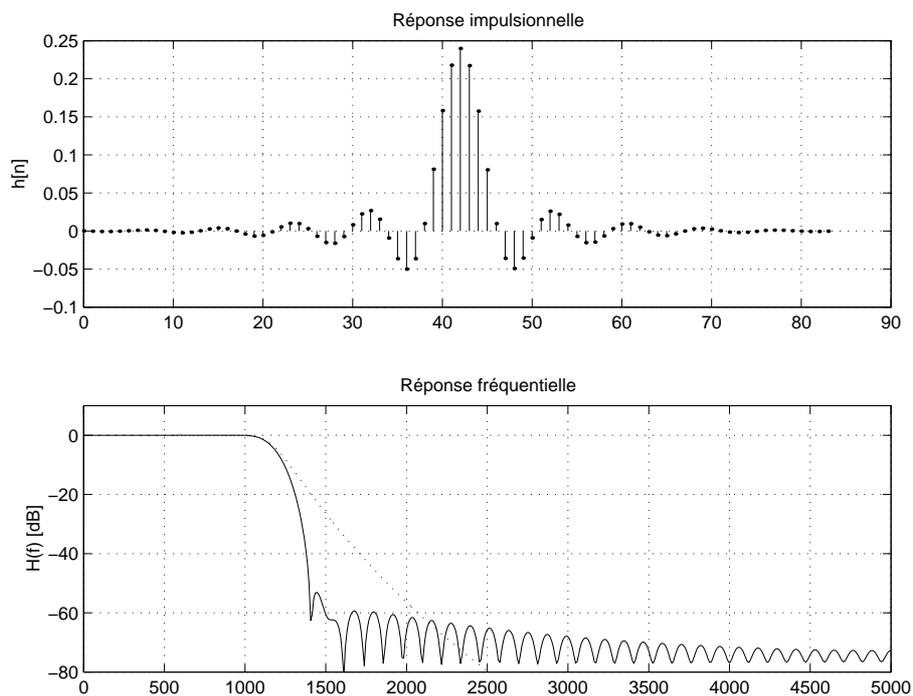


FIG. 3.19.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Hamming)

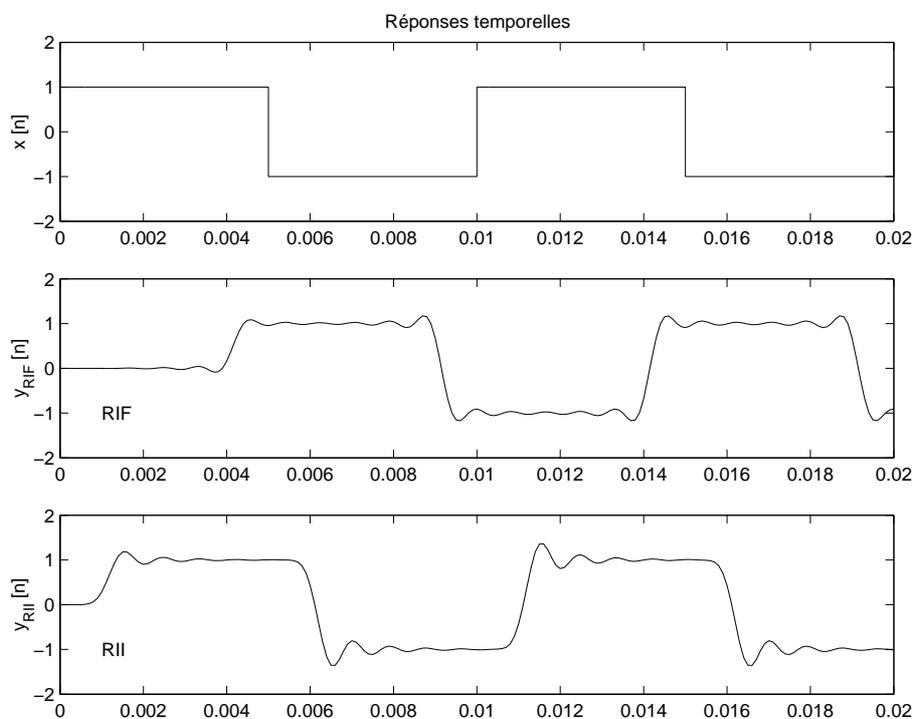


FIG. 3.20.: Comparaison des réponses temporelles

### 3.8.3. Fenêtrage de Kaiser

Dans ce cas, l'atténuation  $A_{dB}$  détermine le facteur de forme  $\beta$ . Comme  $A_{db} = 50$ , il vient (équ. 3.32)

$$\beta = 0.1102 (A_{dB} - 8.7) = 0.1102 (50 - 8.7) = 4.55$$

L'ordre du filtre est fixé par la bande de transition  $\Delta\Omega$  et l'atténuation  $A_{db}$  (équ. 3.33)

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} = \frac{50 - 8}{2.285 \cdot 0.08 \pi} = 73.1 \simeq 74$$

La valeur trouvée (73.1) est augmentée à 74 de manière à obtenir un ordre pair ; le point de symétrie se situe donc en  $N_s = 37$ . Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 3.17), on obtient

$$h_d[n] = \frac{\Omega_c \sin((n - N_s)\Omega_c)}{\pi (n - N_s)\Omega_c} = \frac{\sin(0.24 \pi (n - 37))}{\pi (n - 37)}$$

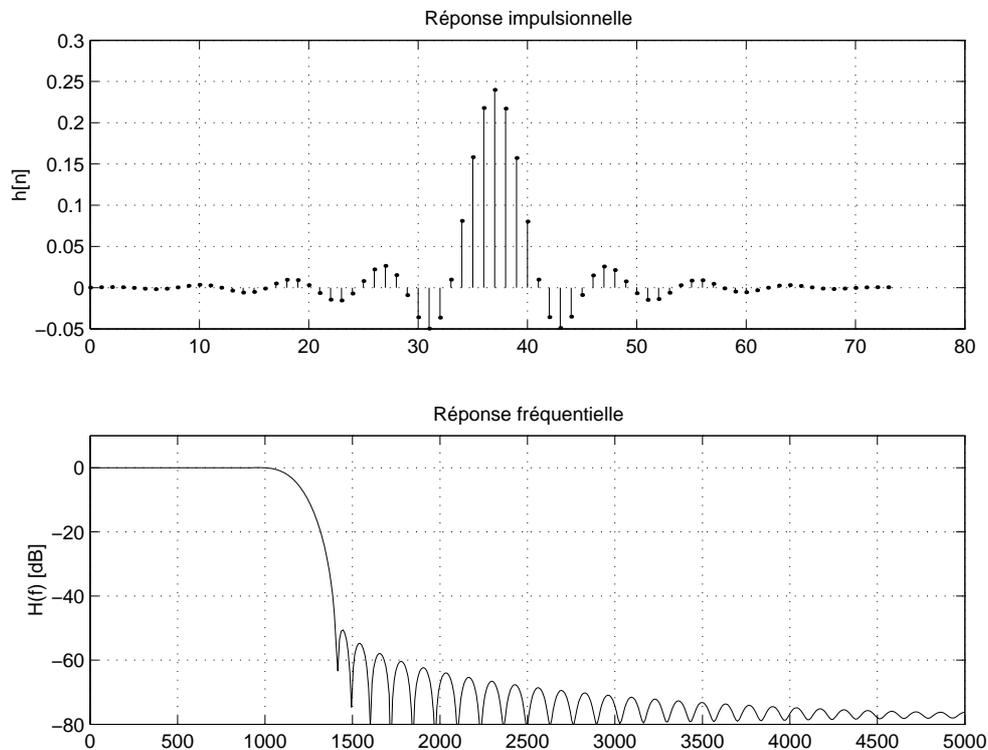


FIG. 3.21.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Kaiser)

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Kaiser  $w_k[n]$ , on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] == h_d[n] \cdot w_k[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-37))}{\pi (n-37)} \cdot \frac{I_0(4.55 \sqrt{1-(1-n/37)^2})}{I_0(4.55)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 3.21.

### 3.9. Réalisation d'un filtre passe-bande

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bande satisfaisant au gabarit suivant :

fréq. d'échant.	10 kHz	Atténuation
1 <sup>ere</sup> bande d'arrêt	0... 1.8 kHz	30 dB
bande passante	1.9...2.1 kHz	0 dB
2 <sup>eme</sup> bande d'arrêt	2.4... 5 kHz	40 dB

Dans le cas, où deux atténuations différentes sont proposées pour les bandes d'arrêt, les calculs doivent se faire avec la plus forte atténuation (ici 40 dB). De même, lorsque les largeurs des bandes de transition diffèrent, on prendra la plus faible des deux.

Dans le tableau 3.2, nous voyons que la fenêtre en cosinus offre l'atténuation souhaitée. Comme la plus petite bande de transition a une largeur de 0.1 kHz, on en déduit que les fréquences définissant les bandes de transition sont les suivantes :

$f_{a1}$	$f_{p1}$	$f_{p2}$	$f_{a2}$
1.8 kHz	1.9 kHz	2.1 kHz	2.2 kHz

Ce qui donne pour les deux bandes de transition la largeur suivante :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.02 \pi$$

L'ordre du filtre est fixé par la largeur de la bande de transition  $\Delta\Omega$  :

$$N \geq \frac{6.2 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.2}{0.02} = 310$$

Comme cette valeur est entière et paire, il n'est pas nécessaire de l'augmenter ; le point de symétrie se situe donc en  $N_s = 155$ .

La réponse du filtre est construite à partir de celle d'un filtre passe-bande idéal dont les fréquences caractéristiques se situent au centre des 2 transitions

$$f_{c1} = \frac{f_{a1} + f_{p1}}{2} = 1.85 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = \frac{f_{p2} + f_{a2}}{2} = 2.15 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_{c1} = 2\pi \frac{f_{c1}}{f_e} = 2\pi \frac{1.85 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.37 \pi$$

$$\Omega_{c2} = 2\pi \frac{f_{c2}}{f_e} = 2\pi \frac{2.15 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.43 \pi$$

### 3.9. Réalisation d'un filtre passe-bande

La réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bande (équ. 3.22) :

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{(n-N_s)\Omega_{c2}} - \frac{\Omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{(n-N_s)\Omega_{c1}} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, plus simplement :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{\pi(n-N_s)} - \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{\pi(n-N_s)} \\ &= \frac{\sin(0.43\pi(n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n-155))}{\pi(n-155)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre en cosinus  $w_c[n]$ , on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \left( \frac{\sin(0.43\pi(n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n-155))}{\pi(n-155)} \right) \cdot \frac{1 - \cos(2\pi n/310)}{2}$$

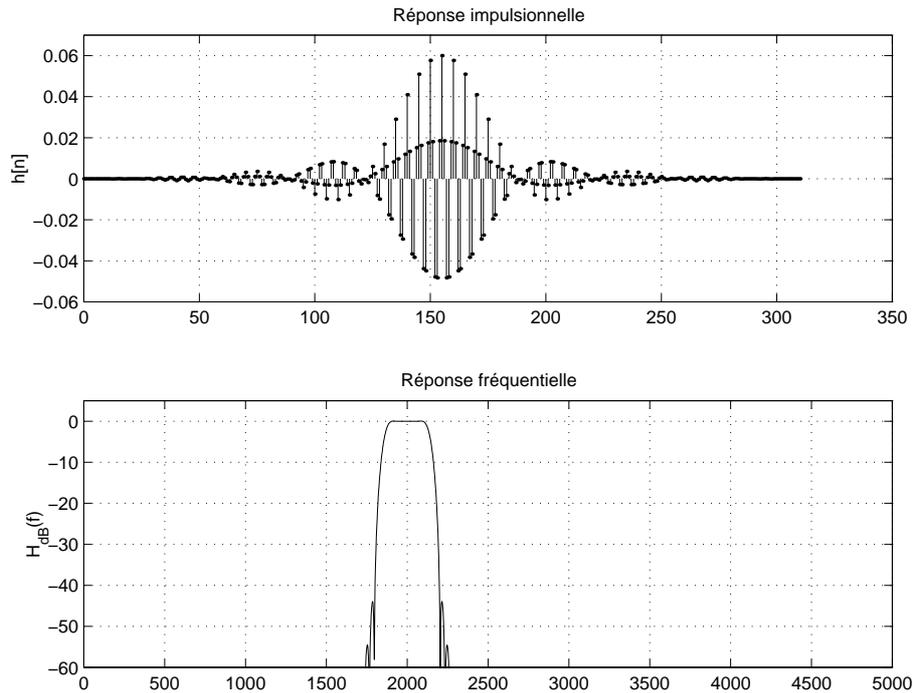


FIG. 3.22.: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande (cosinus)

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle sont présentées dans la figure 3.22. Un tracé plus détaillé de la réponse fréquentielle permet de relever une ondulation maximum de 0.05 dB aux 2 extrémités de la bande passante et des pulsations de coupure (-3 dB) situées en 1864 Hz et 2136 Hz.

### 3.10. Exercices

**RIF 1 :** Réalisez un filtre passe-bas non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.2 \text{ kHz} \quad A_a \geq 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz. Pour cela :

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre  $N$  du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude  $A = 1$  :
  - a) carré de période  $K_p = 100$  ;
  - b) sinus de fréquence  $f_1 = 1.0 \text{ kHz}$  ;
  - c) sinus de fréquence  $f_2 = 1.2 \text{ kHz}$  ;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

**RIF 2 :** Réalisez un filtre passe-haut non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_a = 0.8 \text{ kHz} \quad A_a \geq 40 \text{ dB}; \quad f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre  $N$  du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude  $A = 1$  :
  - a) carré de période  $K_p = 100$  ;
  - b) sinus de fréquence  $f_1 = 0.8 \text{ kHz}$  ;
  - c) sinus de fréquence  $f_2 = 1.0 \text{ kHz}$  ;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

**RIF 3 :** Réalisez un filtre passe-bande non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_{p1} = 1.0 \text{ kHz} \quad f_{p2} = 2.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$
$$f_{a1} = 0.9 \text{ kHz} \quad A_{a1} \geq 50 \text{ dB} \quad f_{a2} = 2.3 \text{ kHz} \quad A_{a2} \geq 40 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre  $N$  du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;

4. générez les signaux suivants d'amplitude  $A = 1$  :
  - a) carré de période  $K_p = 200$  ;
  - b) sinus de fréquence  $f_1 = 1.5 \text{ kHz}$  ;
  - c) sinus de fréquence  $f_2 = 0.6 \text{ kHz}$  ;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

**RIF 4 :** On veut réaliser un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie tel que sa bande passante soit de  $1 \text{ kHz}$  alors que  $f_e = 20 \text{ kHz}$ .

1. Analyse temporelle
  - a) calculez  $h_b[n]$  ;
  - b) tronquez  $h_b$  à  $N = 128$  et rendez-la causale ;
  - c) que vaut  $h_b[n]$  à ses extrémités ?
  - d) est-ce raisonnable de l'accepter tel quel ? sinon que pouvez-vous faire ?
2. Analyse fréquentielle
 

Afin d'augmenter la résolution spectrale, on ajoute des 0 à la réponse impulsionnelle ; comme l'usage de la FFT nécessite que la longueur du signal analysé soit une puissance de 2, essayez 512 et/ou 1024.

  - a) calculez  $H(jf)$  (`fft`) ;
  - b) tracez le module et la phase de  $H(jf)$  ;
  - c) est-ce que cela correspond à votre attente ?
  - d) que valent les extrema de la bande passante et celle d'arrêt (`zoom`) ?
  - e) mesurez la fréquence de coupure et la largeur de la bande de transition.
3. Amélioration de la réponse fréquentielle
  - a) reprenez  $h_b[n]$  et multipliez-la par une fenêtre en cosinus ou de Hamming ;
  - b) répétez les points 2.a), ..., 2.d).
  - c) concluez.

**RIF 5 :**

1. Générez un signal  $x[n]$  de 64 échantillons à partir d'un cosinus discret tel que  $A = 10$ ,  $\Omega_0 = \pi/16$ ,  $\alpha = \pi/3$ .
2. Le système dans lequel passe ce signal  $x[n]$  est décrit par les 2 équations suivantes :

$$w[n] = (x[n])^2$$

$$y[n] = w[n] - w[n - 1]$$

3. Dessinez le schéma fonctionnel de ce système et décrivez ce que réalise chaque fonction ; en quoi ces 2 opérateurs sont-ils à réponse impulsionnelle finie ?

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

- Tracez sur une même figure les 3 signaux (`subplot`); observez-les.
- Esquissez à la main le spectre de chacun des 3 signaux ;
  - remarquez que le premier opérateur est non linéaire et qu'il génère des fréquences non présentes dans  $x[n]$ ; lesquelles ?
  - d'un point de vue temporel et fréquentiel, quel est l'effet du deuxième opérateur ?
- Observez le signal  $w[n]$ ; quelles sont les fréquences présentes ?
- Transformez de Fourier les 3 signaux; tracez sur une nouvelle figure les 3 spectres d'amplitudes.
- Observez ces spectres et justifiez votre analyse précédente.

Réf. : McClellan, Schaffer, Yoder : *DSP FIRST*, Prentice Hall, 1998, p. 461

#### RIF 6 :

- Générez un signal  $x[n]$  de 128 échantillons tel que

$$x[n] = 10 \cos(2\pi n/T_0 + \pi/6) + 2 \cos(6\pi n/T_0 + \pi/2)$$

avec  $T_0 = 32$ ; que valent les pulsations normalisées de  $x[n]$  ?

- Ce signal est appliqué à un filtre RIF d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n-1] + x[n-2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel.

- Quel est le gain DC de ce filtre ?
- Quelle est sa réponse impulsionnelle  $h[n]$  ?
- Avec Matlab, calculez et tracez les signaux  $x[n]$ ,  $h[n]$  et  $y[n]$ .
- Observez les résultats; quel est l'effet du filtre ?
- Justifiez l'allure de  $y[n]$  en calculant et traçant le module de la réponse fréquentielle  $H(j\Omega) = \text{TF}(h[n])$  avec  $N_{FFT} = 128$  ainsi que les spectres d'amplitude de  $x[n]$  et  $y[n]$ .

#### RIF 7 : Poursuivant l'exercice précédent et partant de son équation

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n-1] + x[n-2]$$

- Calculez sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

puis

- calculez ses pôles et zéros ;
- tracez-les dans le plan complexe ;

- c) justifiez l'effet réjecteur de ce filtre.
2. Pour quelle fréquence normalisée a-t-on  $H(jf/f_e) = 0$  ?
3. Tenant compte de ce qui vient d'être vu, quelle est l'équation d'un filtre réjecteur capable de supprimer
  - a) le 50 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz ;
  - b) le 50 Hz et 150 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz.
4. Générez ces signaux et vérifiez vos algorithmes.

### 3. SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

# Bibliographie

- [1] V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS Publishing Company, 1997
- [2] B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley, 1997
- [3] J.F. Harris : *On the Use of Windows for Harmonic Analysis*, Proc. IEEE, vol 66, No.1, Jan.1978
- [4] J.F.Kaiser, F.F. Kuo : *System Analysis by Digital Computer*, John Wiley, 1966

## *Bibliographie*