

Deuxième partie .
Analyse des signaux

4. Analyse et comparaison des signaux

Ce chapitre présente quelques outils fréquemment utilisés en analyse des signaux. On y trouvera des aspects pratiques de la transformation de Fourier, son extension aux signaux bidimensionnels (les images), les fonctions d'auto- et d'intercorrélation servant à caractériser et comparer des signaux entre eux et enfin une présentation succincte des signaux aléatoires.

4.1. Transformation de Fourier

4.1.1. Définition de la transformation de Fourier

Les transformations de Fourier directe et inverse sont définies comme suit

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \quad (4.1)$$

$$X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (4.2)$$

On constate que les descriptions temporelle et spectrale sont parfaitement symétriques et que les unités de $X(jf)$ ne sont pas les mêmes que celles du signal original $x(t)$. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique, sa transformée $X(jf)$ s'exprime en [V/Hz] et elle est définie comme la **densité spectrale d'amplitude** du signal temporel $x(t)$.

En notation abrégée, on décrira ces deux transformations par les opérateurs $TF\{\}$ et $TFI\{\}$. La correspondance réciproque s'écrit alors :

$$x(t) = TFI\{X(jf)\} \longleftrightarrow TF\{x(t)\} = X(jf)$$

Si la fonction $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude $X(jf)$ est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(jf) = X_r(f) + jX_i(f) \quad (4.3)$$

Le module et la phase de la densité spectrale d'amplitude valent alors :

$$|X(jf)| \equiv X(f) = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \quad (4.4)$$

$$\angle X(jf) \equiv \alpha(f) = \arctan \frac{X_i(f)}{X_r(f)} \quad (4.5)$$

4.1.2. Puissance et énergie d'un signal

Les signaux permanents, périodiques ou non, sont caractérisés par leur puissance moyenne (leur énergie est infiniment grande). On a vu dans le cours Signaux et Systèmes que les signaux périodiques ont une puissance que l'on peut calculer aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.6)$$

$$P = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad [\text{V}^2] \quad (4.7)$$

où $X(jk)$ est l'amplitude complexe de la composante spectrale d'ordre k .

Dans le cas des signaux non permanents, on prendra garde à parler de leur énergie et non pas de leur puissance, car celle-ci est nulle si l'on considère une durée infiniment longue. De même que pour les signaux périodiques, on peut calculer l'énergie d'un signal a périodique dans les domaines temporel et fréquentiel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (4.8)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.9)$$

L'expression de l'énergie d'un signal $x(t)$ dans le domaine des fréquences entraîne la définition de la **densité spectrale d'énergie** $S_x(f)$:

$$S_x(f) \equiv |X(jf)|^2 = X(jf) \cdot X(jf)^* \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.10)$$

On notera que ses unités s'expriment en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$ lorsque le signal est une tension.

4.1.3. Propriétés de la transformation de Fourier

Parmi le grand nombre de propriétés associées à la transformation de Fourier, on retiendra particulièrement celles qui ont le plus d'intérêt en traitement du signal. Elles sont présentées dans le tableau 4.1. De plus, une table illustrée des transformées de Fourier tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2] est présentée en fin de chapitre.

4.2. Exemples de spectres continus

Pour illustrer l'utilisation de la transformée de Fourier, calculons les densités spectrales de quelques signaux particuliers.

4.2. Exemples de spectres continus

a) linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(jf) + bY(jf)$
b) décalage	$x(t + t_d)$	$X(jf) \exp(+j2\pi f t_d)$
c) amortissement	$x(t) \exp(-at)$, $x(t)$ causal	$X(j2\pi f + a)$
d) modulation	$x(t) \exp(+j2\pi f_0 t)$	$X(j(f - f_0))$
e) dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(jf)$
f) intégration	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(jf) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
g) convolution	$h(t) \otimes x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(jf) \cdot X(jf)$ $H(jf) \otimes X(jf)$
h) énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) ^2 df$
j) valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
k) rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(jf) = X(-jf) = X^*(jf)$
l) fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(jf) \in \Re$
m) fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(jf) \in \Im$

TAB. 4.1.: Quelques propriétés de la transformation de Fourier

4.2.1. Spectre d'une impulsion rectangulaire

Considérons une impulsion $x(t)$ de largeur Δt et d'amplitude A centrée en $t = 0$ (figure 4.1). Par définition de la transformation de Fourier, on a :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

En tenant compte de la définition de l'impulsion rectangulaire centrée :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (4.11)$$

il vient :

$$\begin{aligned} X(jf) &= \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} A \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \left[\exp(-j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) \right] \\ &= \frac{A \exp(+j\pi f \Delta t) - \exp(-j\pi f \Delta t)}{\pi f 2j} \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Euler :

$$\sin u = \frac{\exp(+ju) - \exp(-ju)}{2j}$$

on obtient finalement :

$$X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t) \in \mathfrak{R} \quad (4.12)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la densité spectrale d'amplitude d'une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$ est bien décrite par un sinus cardinal. De plus, comme l'impulsion rectangulaire $x(t)$ est paire, sa densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction réelle. Enfin, on remarquera (figure 4.1) que le spectre passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $1/\Delta t$.

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion est d'autant plus large et de faible amplitude que l'impulsion est étroite (figure 4.2b). Cette remarque est vraie pour l'ensemble des signaux de durée limitée et elle peut s'énoncer ainsi

Un signal de **courte durée** possède un spectre **large bande**.

À un spectre **étroit** correspond un signal de **longue durée**.

4.2. Exemples de spectres continus

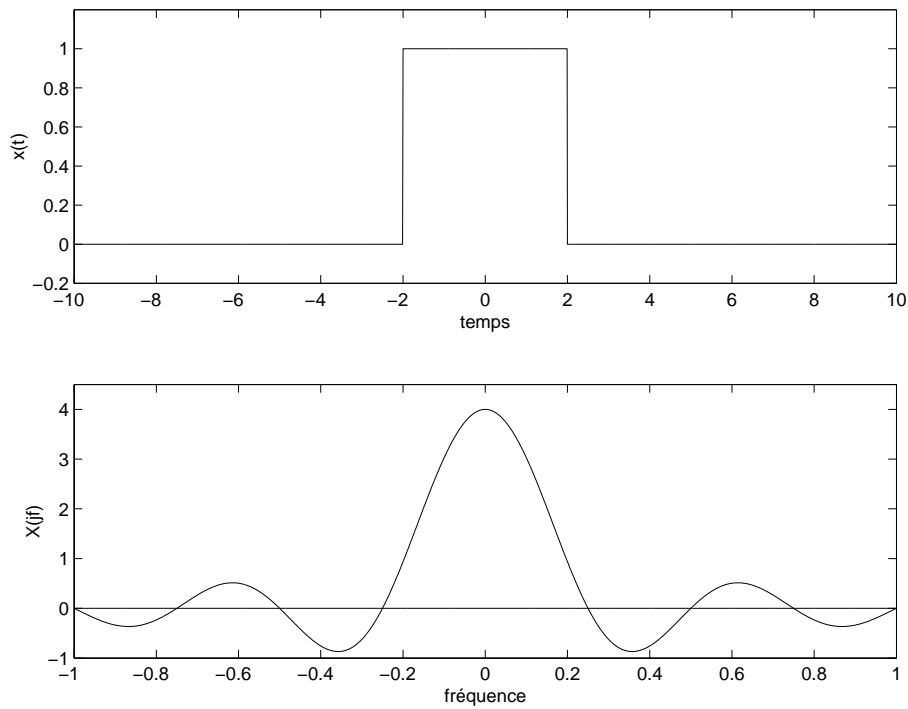


FIG. 4.1.: Impulsion rectangulaire et sa densité spectrale d'amplitude

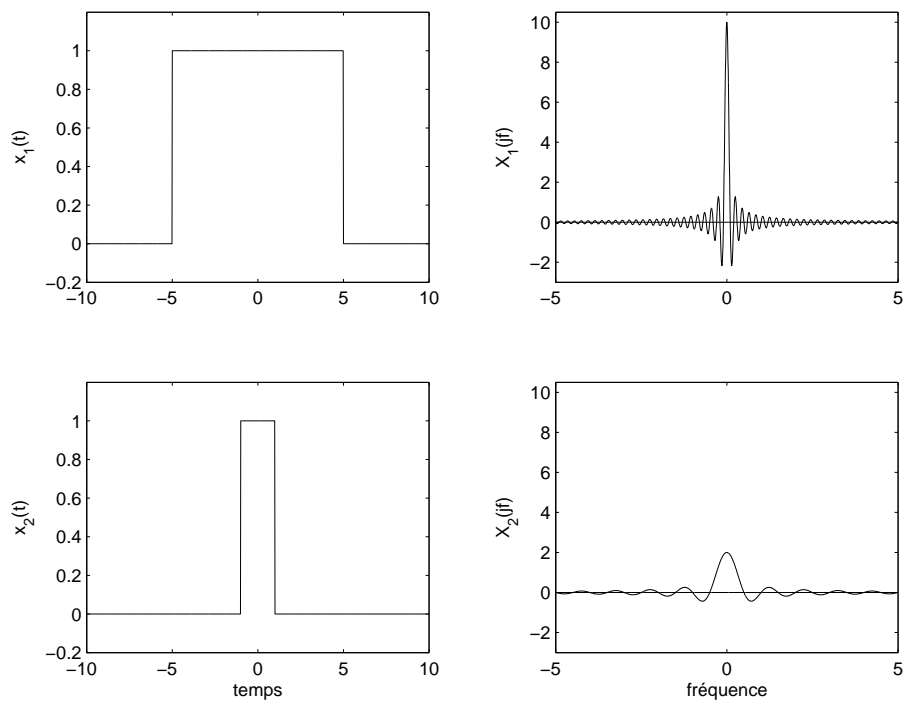


FIG. 4.2.: Le contenu spectral d'une impulsion dépend fortement de sa durée

4.2.2. Spectre d'un sinus amorti

Étudions, comme deuxième exemple, la transformée de Fourier d'une sinusoïde de fréquence f_p décroissant exponentiellement au cours du temps (figure 4.3). Son équation s'écrit :

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t), & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Partant de la définition de la transformée de Fourier, on calcule sa densité spectrale d'amplitude :

$$\begin{aligned} Y(jf) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \frac{\exp(+j2\pi f_p t) - \exp(-j2\pi f_p t)}{2j} \exp(-j2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles; elle est très simple à calculer. Après réduction des deux primitives à un même dénominateur, on obtient :

$$Y(jf) = A \frac{2\pi f_p}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_p)^2} \in \mathcal{C} \quad (4.14)$$

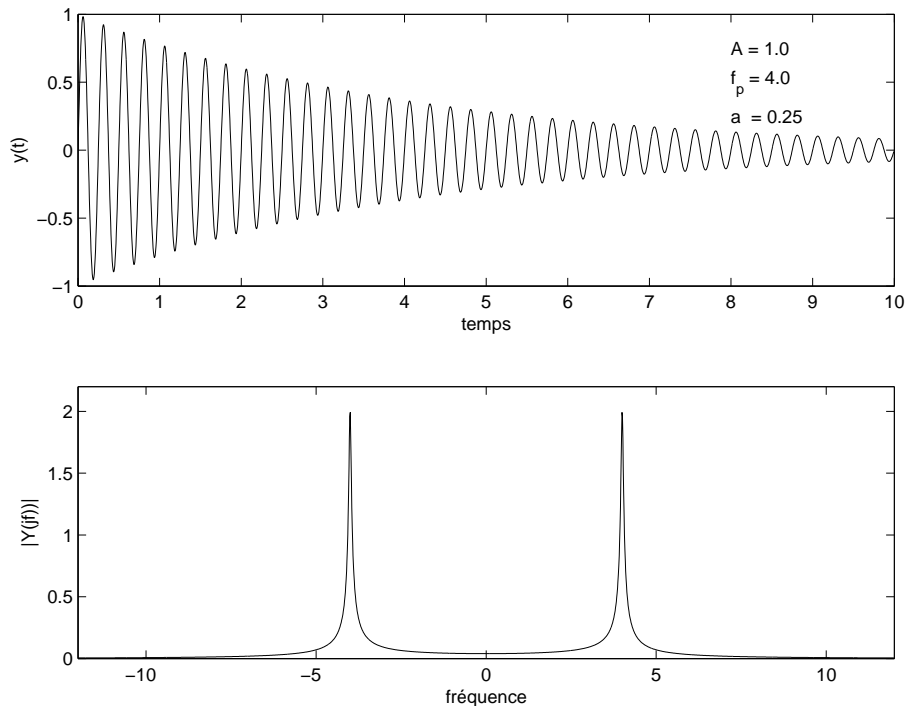


FIG. 4.3.: Sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude

On remarquera que la densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction complexe car la sinusoïde décroissante $y(t)$ ne possède pas de symétrie particulière. La figure 4.3 présente le sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude.

On peut également noter les deux valeurs particulières suivantes

$$f = 0 : \quad Y(0) = A \frac{2\pi f_p}{a^2 + (2\pi f_p)^2} \simeq \frac{A}{2\pi f_p} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p$$

$$f = f_p : \quad Y(jf_p) = \frac{A}{a} \frac{2\pi f_p}{a + j4\pi f_p} \simeq \frac{A}{j2a} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p$$

4.2.3. Spectre d'une impulsion sinusoïdale

On sait qu'à un produit de convolution dans le domaine temporel correspond un produit simple dans le domaine complexe :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (4.15)$$

L'inverse de cette proposition est également vraie et elle est très pratique pour calculer le spectre de signaux modulés en amplitude. Elle s'exprime comme suit. À un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine complexe :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) \quad (4.16)$$

Considérons comme exemple une impulsion sinusoïdale de durée Δt

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Voyant que ce signal est équivalent à la multiplication d'un sinusoïde permanente par une impulsion de largeur Δt , on a :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Sachant que les spectres des signaux $x(t)$ et $m(t)$ valent respectivement

$$X(jf) = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$M(jf) = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t)$$

et que la convolution entre une fonction et une impulsion de Dirac reproduit la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion, on voit que le spectre de l'impulsion sinusoïdale vaut

$$Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) = \frac{A \Delta t}{2} (\operatorname{sinc}((f + f_0) \Delta t) + \operatorname{sinc}((f - f_0) \Delta t))$$

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion sinusoïdale de durée Δt est constitué de deux sinus cardinaux situés en $+f_0$ et $-f_0$ (figure 4.4).

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

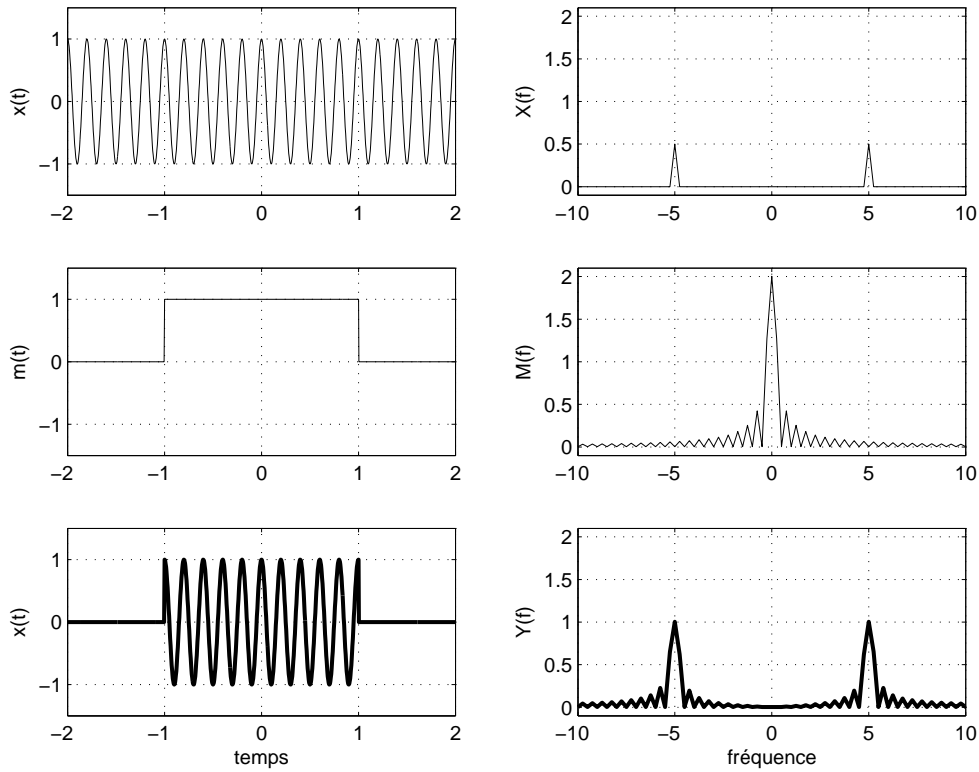


FIG. 4.4.: Impulsion sinusoïdale et son spectre

4.2.4. Spectres de deux impulsions

Considérons un signal constitué de deux impulsions d'amplitude A placées symétriquement en $\pm t_0/2$ (figure 4.5). Ce signal possède un spectre qui se calcule facilement à partir de celui d'une impulsion centrée en $t = 0$ et à l'aide du théorème du décalage.

Comme le signal $z(t)$ est la somme de 2 impulsions décalées de $\pm t_0/2$,

$$z(t) = x(t + t_0/2) + x(t - t_0/2) \quad (4.17)$$

on a :

$$Z(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \left[\exp(+j2\pi f \frac{t_0}{2}) + \exp(-j2\pi f \frac{t_0}{2}) \right]$$

donc

$$Z(jf) = 2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \quad (4.18)$$

De plus, par rapport à ce qui va suivre, il est intéressant de considérer également la densité spectrale d'énergie :

$$S_z(f) \equiv |Z(jf)|^2 = \left[2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \right]^2 \quad (4.19)$$

Les densités spectrales d'amplitude et d'énergie sont représentées à la figure 4.5.

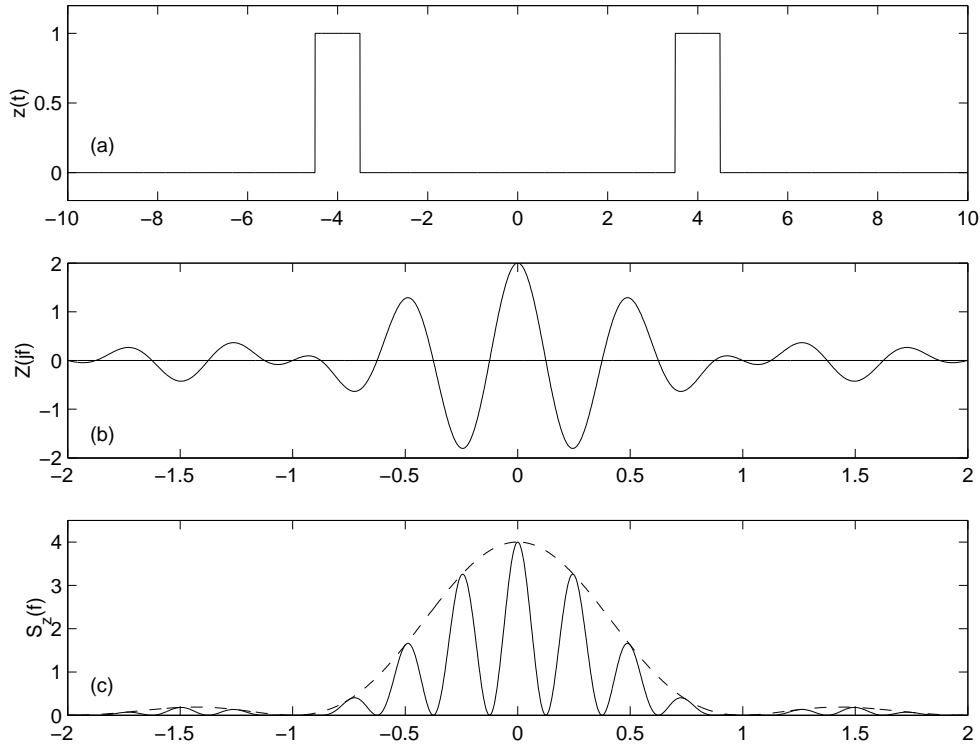


FIG. 4.5.: Deux impulsions rectangulaires symétriques $z(t)$ avec ses densités spectrales d'amplitude $Z(jf)$ et d'énergie $S_z(f)$.

4.3. Extension de la transformation de Fourier

Le spectre d'énergie des deux impulsions étudiées ci-dessus montre une grande similitude avec la figure de diffraction de Fraunhofer due à deux fentes étroites (figure 4.6). En réalité, il s'agit plus que d'une similitude car on montre en physique que toute figure de diffraction est la transformée de Fourier de l'objet qui en est la cause.

De cette analogie, on déduit que la notion de transformation de Fourier peut être étendue à des espaces à plusieurs dimensions. Cette transformation de Fourier multidimensionnelle est définie de manière similaire à celle que nous avons étudiée jusqu'à présent

$$x(t) \rightarrow X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (4.20)$$

avec f représentant la fréquence des oscillations, c'est-à-dire le nombre de périodes par unité de temps. Cette fréquence est mesurée en [Hz] ou, de manière plus fondamentale, en [1/sec].

Dans le cas particulier d'une image (espace à deux dimensions), on a affaire à une intensité lumineuse i fonction des coordonnées x et y

$$i = i(x, y) \quad (4.21)$$

Sa transformée de Fourier est alors définie comme suit

$$I(jf_x, jf_y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, y) \exp(-j2\pi f_x x) \exp(-j2\pi f_y y) dx dy \quad (4.22)$$

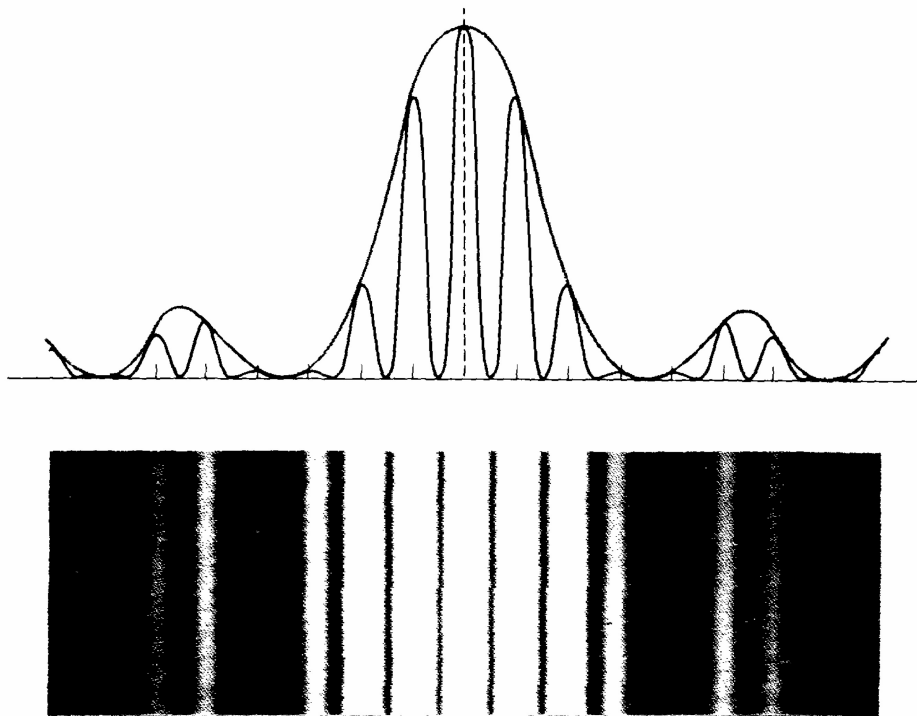


FIG. 4.6.: Figure de diffraction [3] causée par deux ouvertures étroites correspondant aux deux impulsions rectangulaires de la figure 4.5

Ici, les fréquences spatiales f_x et f_y représentent le nombre de périodes par unité de longueur mesurées en $[1/m]$. Une illustration des spectres spatiaux (ou des figures de diffraction) d'ouvertures circulaire et carrée est donnée à la figure 4.7 ; on y reconnaît la fonction sinus cardinal distribuée dans l'espace des fréquences spatiales f_x et f_y .

Comme nous venons de le voir, la notion de transformation de Fourier s'applique à des fonctions bidimensionnelles. On imagine donc aisément que les principes de filtrage bien connus en électronique peuvent s'étendre de la même manière à des signaux multidimensionnels. Une illustration en est donnée à la figure 4.7 où l'on voit comment l'application de masques dans le domaine fréquentiel permet d'extraire les bords de l'image (filtrage passe-haut) ou de défocaliser l'image (filtrage passe-bas). On notera qu'un filtrage réalisé avec un masque constitué simplement de 0 ou 1 n'est pas optimum car il entraîne les effets de franges bien visibles sur les images.

4.4. Classification et types de signaux

Sans entrer dans les détails de la classification des signaux, il faut mentionner que plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, on en citera deux :

- la classification phénoménologique qui met l'accent sur le comportement temporel du signal ;
- la classification énergétique où l'on classe les signaux suivant qu'ils sont à énergie finie ou à puissance finie.

4.4. Classification et types de signaux

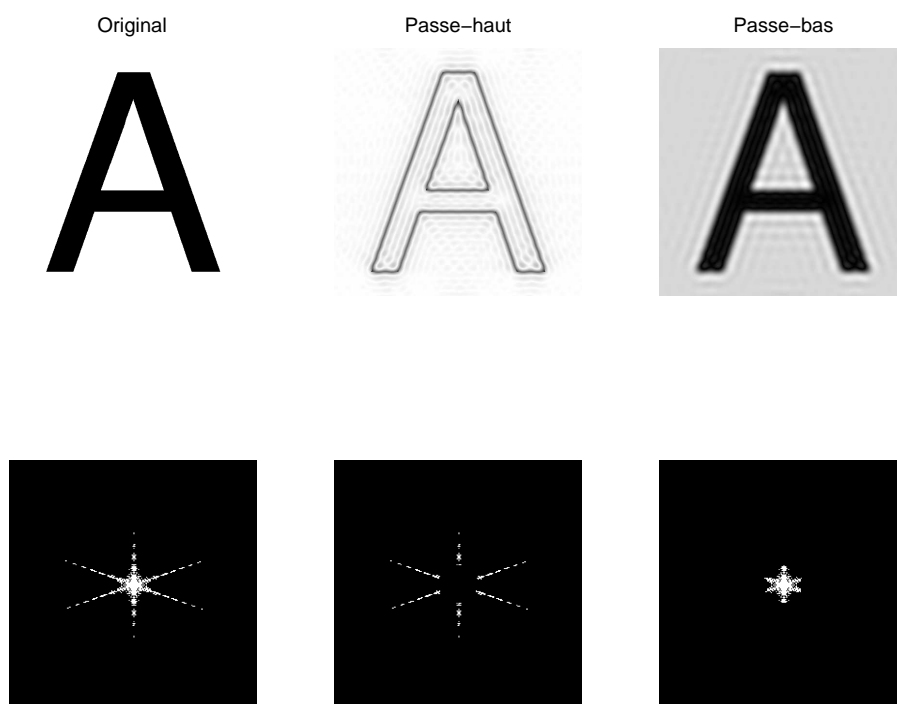
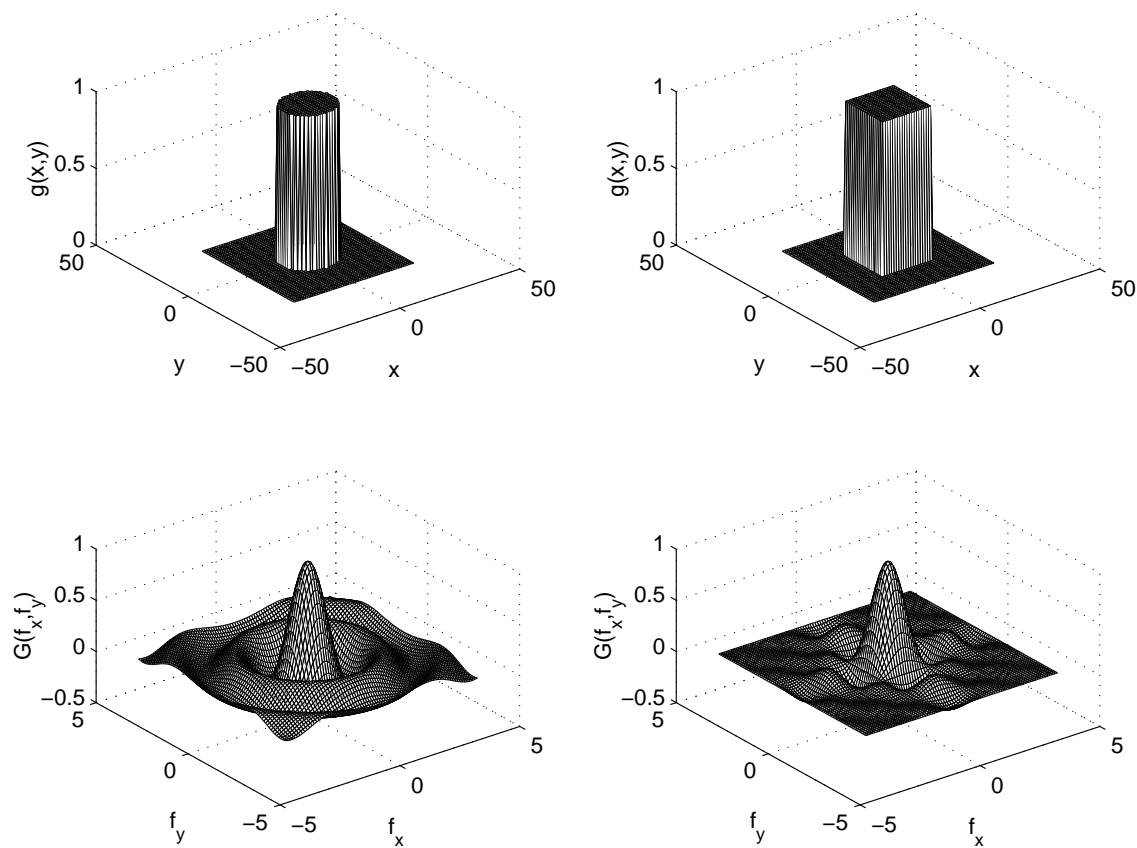


FIG. 4.7.: a) Transformées de Fourier spatiales d'un rond et d'un carré
 b) Filtrage spatial de la lettre A avec un masque qui ne laisse passer que les hautes ou les basses fréquences

4.4.1. Classification phénoménologique

Dans cette classification, on répartit généralement les signaux en deux classes principales et quatre sous-classes illustrées par la figure 4.8.

Dans les deux classes principales, on trouve :

- les signaux déterministes dont l'évolution temporelle parfaitement définie peut être prédite par un modèle mathématique approprié ;
- les signaux aléatoires qui ont un comportement temporel imprévisible et dont la description ne peut se faire qu'au travers d'observations statistiques.

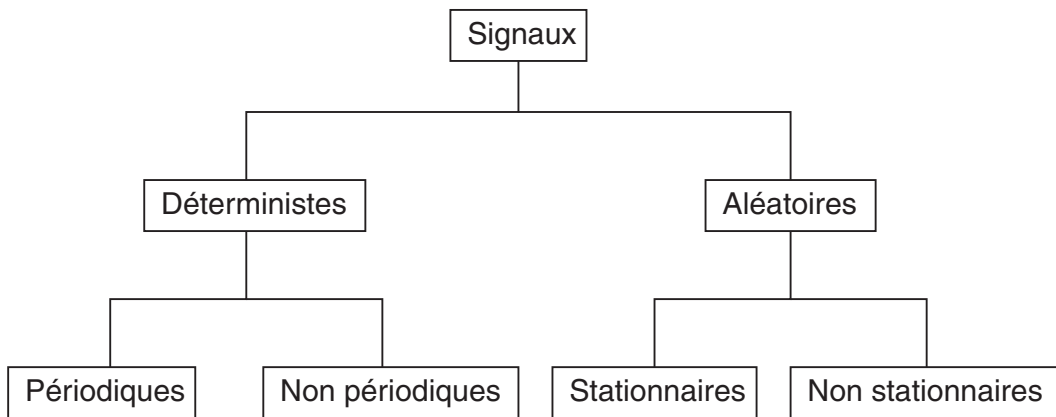


FIG. 4.8.: Classification phénoménologique des signaux

Parmi les *signaux déterministes* (figure 4.9), on distingue :

- les signaux périodiques dont la forme se répète régulièrement ;
- les signaux pseudo-aléatoires qui sont des signaux périodiques mais avec, à l'intérieur de la période, un comportement aléatoire ;
- les signaux quasi-périodiques qui résultent d'une somme de sinusoides dont le rapport des périodes n'est pas rationnel ;
- les signaux non-périodiques ; ils sont essentiellement représentés par des signaux transitoires dont l'existence est éphémère.

Parmi les *signaux aléatoires* (figure 4.10), on distingue :

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (p.ex : le bruit électronique) ;
- les signaux non-stationnaires dont le comportement statistique évolue au cours du temps (p.ex. : la parole).

4.4.2. Classification énergétique

L'énergie W_x d'un signal $x(t)$ est définie comme suit

$$W_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (4.23)$$

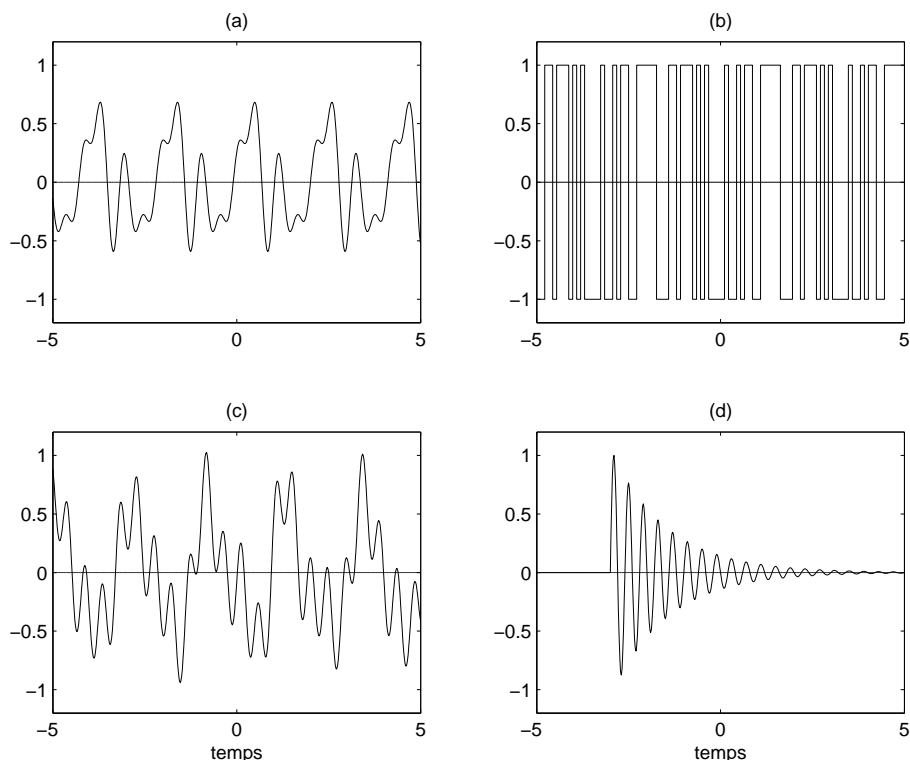


FIG. 4.9.: Exemples de signaux déterministes : (a) périodique, (b) pseudo-aléatoire, (c) quasi-périodique, (d) non-permanent

On dira que ce signal est à *énergie finie* si $W_x < \infty$. Dans cette catégorie, on rencontre tous les signaux temporellement éphémères qu'ils soient déterministes ou aléatoires.

La puissance moyenne P_x d'un signal $x(t)$ est définie par

$$P_x \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \equiv X_{eff}^2 \quad (4.24)$$

On notera que cette définition coïncide avec celle du carré de la valeur efficace du signal $x(t)$. On dira que celui-ci est à *puissance finie* si $P_x < \infty$. Cette catégorie englobe les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux permanents aléatoires ou non. Dans le cas où le signal est périodique, la durée d'intégration T est prise égale à une période du signal.

Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces catégories ; c'est le cas, par exemple, de l'exponentielle $x(t) = e^{-at} \quad -\infty < t < \infty$.

4.4.3. Signaux types

Afin de clarifier les choses, considérons comme exemple de signaux-types les signaux représentés à la figure 4.11. Le premier $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ n'est ni périodique ni permanent ; dans la même catégorie, on peut placer les signaux temporaires tels

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

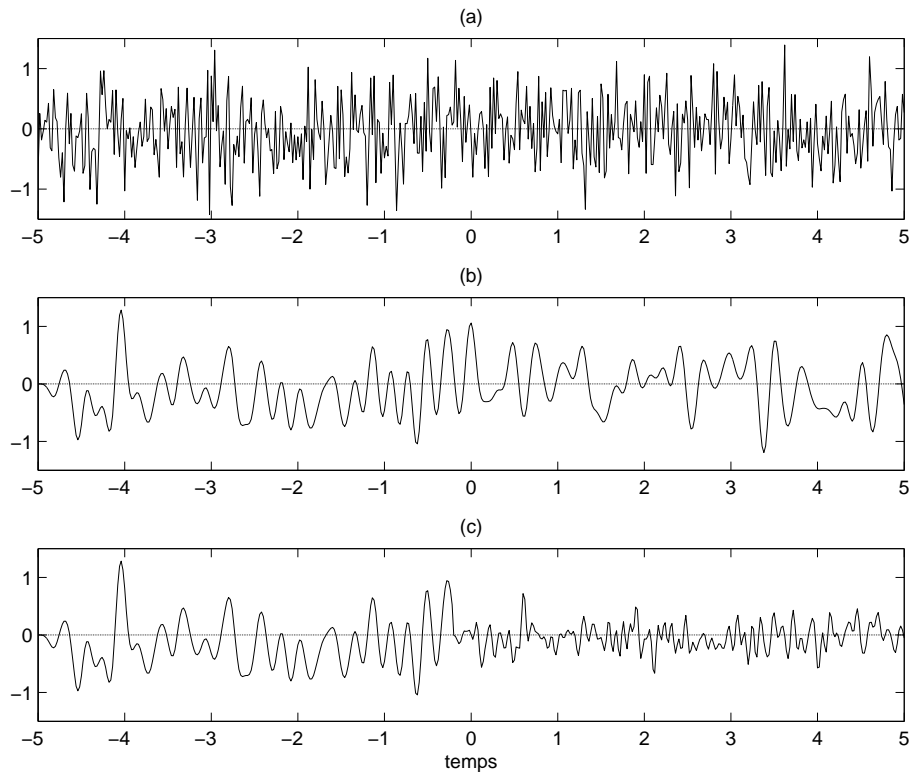


FIG. 4.10.: Trois exemples de signaux aléatoires : (a) bruit blanc, (b) bruit large bande, (c) bruit non-stationnaire

que les signaux périodiques de durée finie par exemple. Le deuxième, un signal carré, est périodique et permanent. Le troisième est un signal permanent quasi-périodique. Le quatrième $x_4(t)$ est un signal aléatoire permanent pour lequel il n'existe pas de description temporelle.

Signaux déterministes temporaires

Les signaux déterministes temporaires tels que $x_1(t)$ sont des signaux à puissance moyenne nulle mais énergie finie. Ils possèdent un spectre continu défini par leur densité spectrale d'amplitude. Celle-ci n'est autre que la transformée de Fourier du signal :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] = [\text{V/Hz}] \quad (4.25)$$

Leur énergie se calcule soit au niveau temporel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}]$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.26)$$

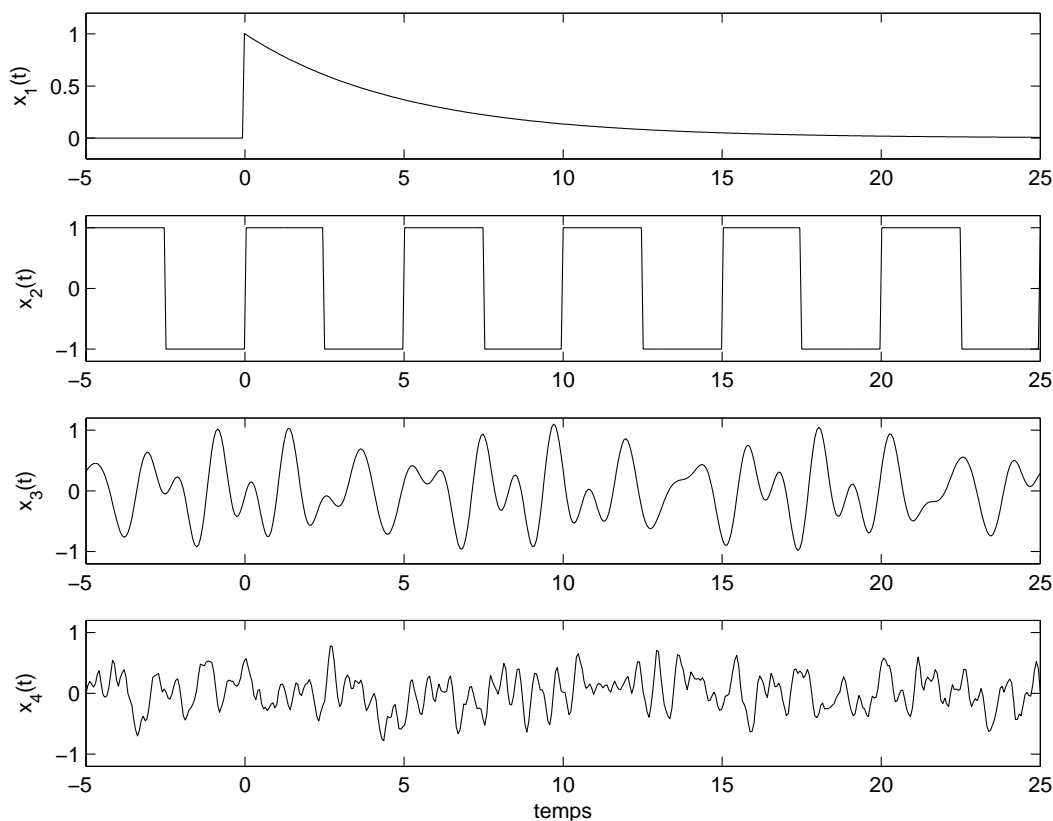


FIG. 4.11.: Quatre signaux types

à partir de la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ exprimée en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$

$$S_x(f) = X(jf) \cdot X(jf)^* = |X(jf)|^2 \quad (4.27)$$

Signaux permanents périodiques

Un signal déterministe permanent, par exemple $x_2(t)$, est un signal périodique dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] \quad (4.28)$$

Pour tous signaux périodiques, on obtient alors une densité spectrale d'amplitude constituée d'impulsions de Dirac. Ces impulsions correspondent aux raies spectrales du signal périodique qui, comme on le sait, possède un spectre discret.

Plutôt que de travailler avec les impulsions de Dirac, il est alors plus simple et plus pratique d'en rester à la description bien connue des séries de Fourier

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad [\text{V}] \quad (4.29)$$

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

La puissance des signaux périodiques se calcule soit au niveau temporel

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [V^2] \quad (4.30)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad [V^2] \quad (4.31)$$

Signaux permanents non périodiques

Un signal déterministe permanent est un signal dont la puissance est finie et l'énergie infinie. L'exemple illustré par le signal quasi-périodique $x_3(t)$ est constitué de quatre sinusïdes dont les fréquences ne sont pas dans un rapport rationnel. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(jf) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [V] \quad (4.32)$$

et la puissance se calcule aux niveaux temporel ou fréquentiel

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 \quad [V^2] \quad (4.33)$$

Signaux aléatoires

Les signaux aléatoires sont des signaux permanents qui ne peuvent pas être décrits analytiquement. Les définitions ci-dessus sont donc inutilisables. Cependant, dans le cas où l'on est en possession d'une suite de valeurs enregistrées de durée $T = N \Delta t$, on peut calculer le spectre et la puissance de cette séquence de valeurs $x[n] = x(t = n \Delta t)$:

$$X(jf) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n \Delta t) \quad [V] \quad (4.34)$$

$$P_x \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad [V^2] \quad (4.35)$$

Comme les signaux aléatoires ne sont par définition pas descriptibles, on doit tenter de trouver des modèles les représentant aussi bien que possible. Cela nous conduit à les classer dans une des trois catégories types qui sont :

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (à la limite du bruit blanc) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles ;
- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes variables.

Une illustration temporelle de ces trois bruits est donnée dans la figure 4.23. La description et analyse de ces signaux sera faite dans la section 4.8.

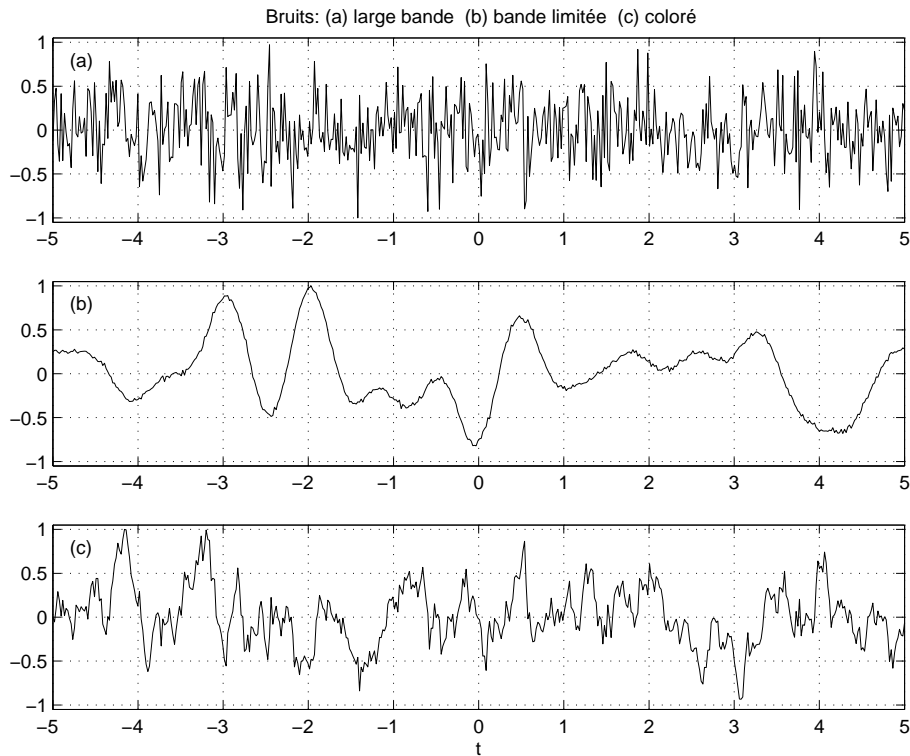


FIG. 4.12.: Trois signaux aléatoires

4.5. Comparaison des signaux

Une opération mathématique qui, de par sa forme, est très proche de la convolution est la fonction de corrélation de deux signaux. Cependant, contrairement à la convolution, le but de la corrélation est de mesurer le degré de ressemblance de ces signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée.

La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission, le GPS (Global Positioning System), etc.

Dans chaque cas, on dispose de deux fonctions : le signal de référence $x(t)$ et le signal reçu $y(t)$. Il faut alors trouver une opération mathématique permettant de comparer ces signaux et d'en mesurer la ressemblance ou corrélation. Ceci se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre.

Deux illustrations en sont données dans les figures 4.13 et 4.14. Dans la première, on compare deux signaux dont la superposition (maximum de ressemblance) apparaît après un décalage temporel égal à 0.8. Dans la deuxième, on compare un signal chirp (signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement avec le temps) avec sa version décalée. On y voit que la corrélation d'un tel signal avec sa version décalée possède un maximum très bien défini à l'endroit correspondant au décalage des deux signaux.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

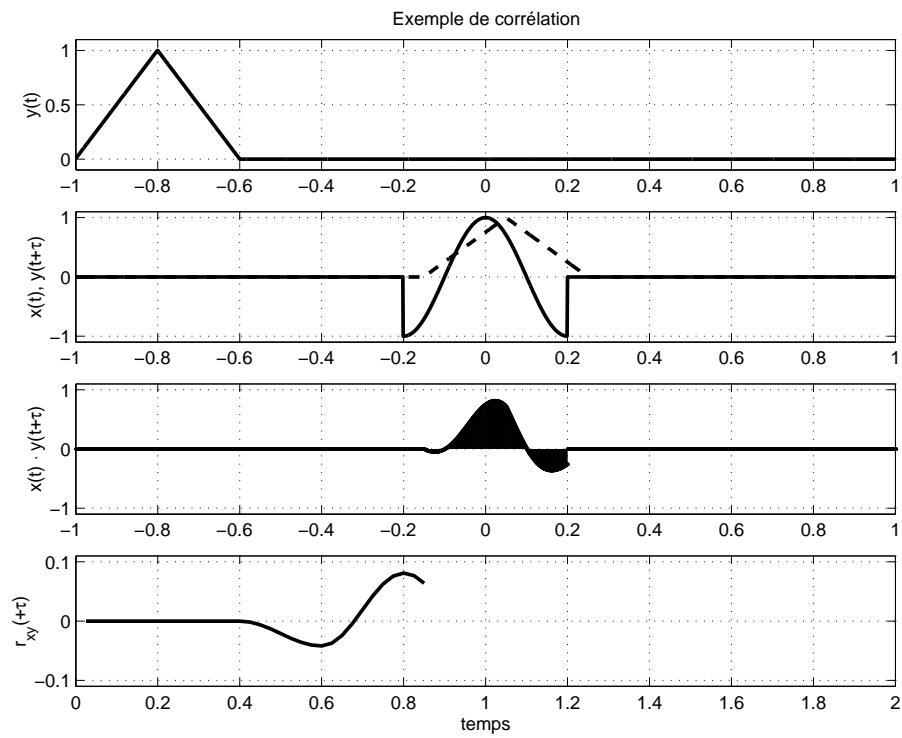


FIG. 4.13.: Intercorrélation de deux signaux

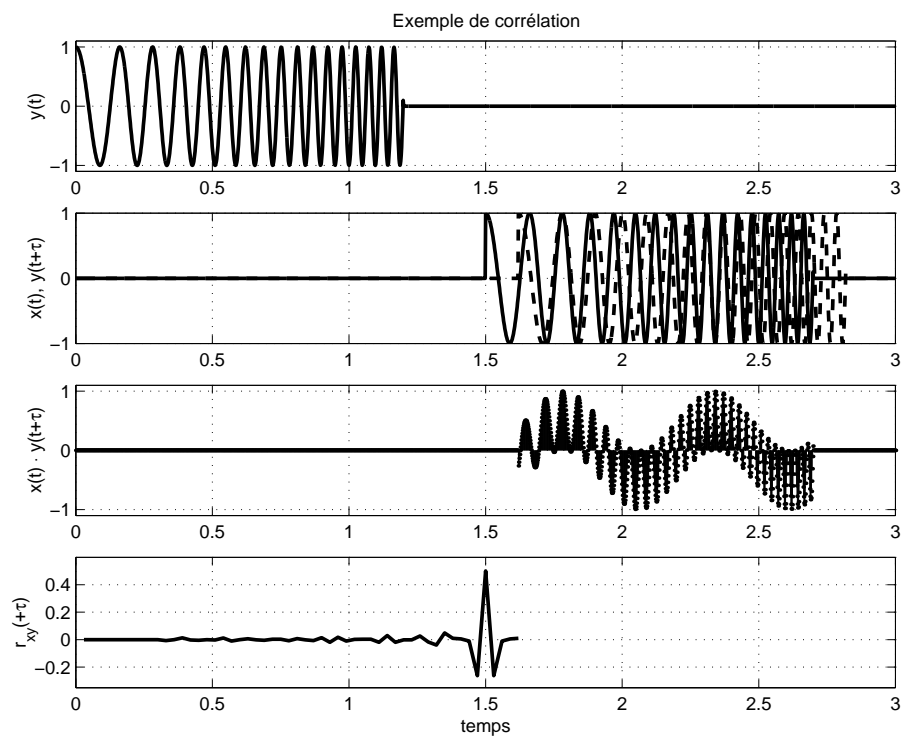


FIG. 4.14.: Autocorrélation d'un signal chirp

4.5.1. Corrélation de signaux à énergie finie

Intercorrélation de deux signaux

Considérant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, on définit la fonction d'*intercorrélacion* (fic) comme l'intégrale du produit du signal $x(t)$ avec le signal $y(t)$ décalé d'une valeur τ :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (4.36)$$

Par changement de variable $\theta = t + \tau$, on montre que

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = r_{yx}(-\tau) \quad (4.37)$$

On voit ainsi que la fonction $r_{xy}(\tau)$ est aussi la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonnée Oy .

Comme on peut le constater, les fonctions d'intercorrélacion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = r_{xy}(\tau)$$

et de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta = x(t) \otimes y(t)$$

sont formellement très proches. On montre qu'elles sont reliées entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau) \quad (4.38)$$

Cette relation valable dans l'espace temps a bien entendu son équivalent dans l'espace des fréquences :

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) Y(jf) \quad (4.39)$$

Autocorrélacion d'un signal

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, on obtient la fonction d'*autocorrélacion* (fac) du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt \quad (4.40)$$

qui, pour un décalage nul, donne l'énergie du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (4.41)$$

4.5.2. Corrélation de signaux à puissance finie

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande ; on ne peut donc pas utiliser les définitions précédentes. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit les deux fonctions de corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t + \tau) dt \quad (4.42)$$

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un décalage nul, on trouve la puissance du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv X_{eff}^2 = P_x \quad (4.44)$$

Il est d'autre part évident que si les signaux sont périodiques, l'intégration se fera sur une période seulement.

La figure 4.15 illustre des fonctions d'autocorrélation représentatives de quelques signaux aléatoires. On y trouve successivement trois signaux dont les puissances sont les mêmes, à savoir $0.2 [V_{eff}^2]$:

- *un bruit blanc gaussien* : son caractère non prévisible est manifeste et il est confirmé par l'étroitesse du pic de la fac.
- *un bruit à large bande* : ce signal a été obtenu en filtrant passe-bas le bruit blanc. Son contenu spectral moins étendu fait qu'il est raisonnablement possible de prévoir une valeur future pas trop éloignée. Une mesure de cet horizon de prévision est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de la fac.
- *un bruit à bande étroite* : ce signal a été obtenu en filtrant le bruit blanc à l'aide d'un filtre passe-bande. Son contenu fréquentiel étroit se manifeste par un comportement oscillant de manière assez régulière. Cette pseudo-périodicité est encore plus facile à déterminer à l'aide de sa fac : elle se mesure par la distance séparant le pic central du premier pic latéral.

4.5.3. Propriétés de l'autocorrélation

On rappellera tout d'abord que la fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux. On montre alors aisément que la fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

1. Lorsque le décalage temporel est nul ($\tau = 0$), la fac est égale à l'énergie du signal pour les signaux à énergie finie :

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (4.45)$$

4.5. Comparaison des signaux

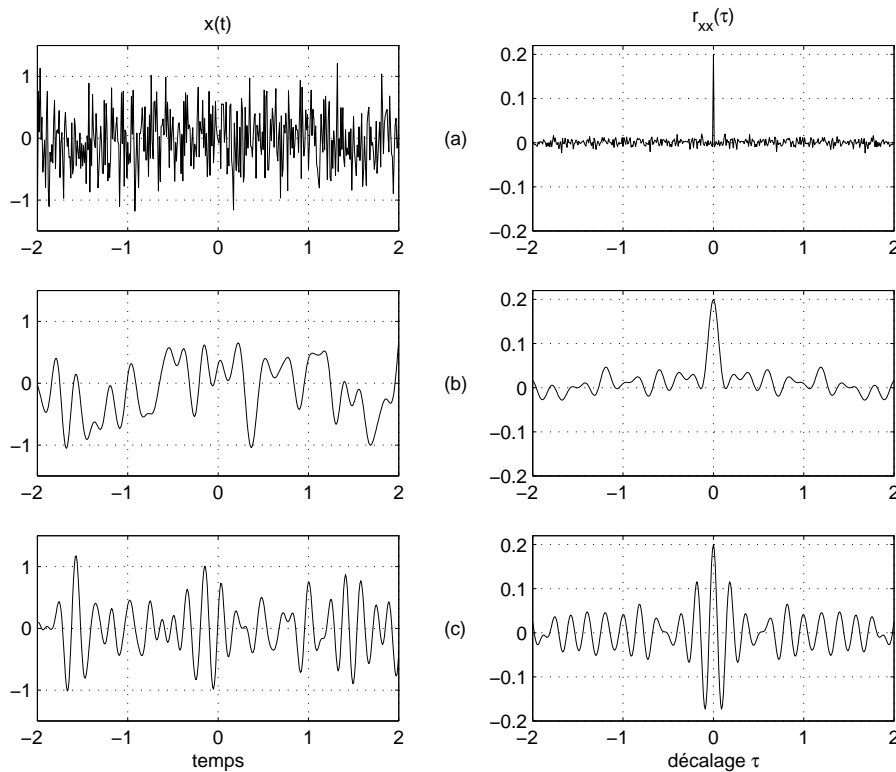


FIG. 4.15.: Quelques signaux et leur fonction d'autocorrélation

ou, à la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie :

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv P_x$$

- Comme la correspondance entre les 2 signaux ne peut pas être aussi forte que lorsque les signaux se superposent exactement cela entraîne que la fac est maximum pour un décalage nul. On a donc :

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau) \quad (4.46)$$

- La fac est une fonction paire :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) \quad (4.47)$$

- La fac d'un bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est une impulsion de Dirac. En effet, le bruit blanc étant formé d'une multitude de fréquences possédant la même puissance, il en résulte un signal variant si rapidement que sa valeur présente est indépendante des valeurs passées et que sa valeur est non nulle pour $\tau = 0$ seulement. On a donc :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (4.48)$$

où σ^2 est la variance du signal aléatoire ; c'est également, comme on l'a vu plus haut, la puissance du signal aléatoire.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

5. La fac d'un signal périodique quelconque est une fonction périodique paire. Considérons comme exemple le signal $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega(t + \tau) + \alpha) dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (4.49)$$

On remarque ainsi que l'amplitude de cette fac est la puissance $A^2/2$ du signal $x(t)$ et que la fac ne nous donne aucune information sur la phase α du signal.

6. Dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, il est possible de retrouver la fac du signal non perturbé. Considérant $y(t) = x(t) + n(t)$, on a en effet :

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) + n(t)) (x(t + \tau) + n(t + \tau)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) x(t + \tau) + n(t) n(t + \tau) \cdots \\ &\quad \cdots + x(t) n(t + \tau) + n(t) x(t + \tau)) dt \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \quad (4.50)$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ et le bruit $n(t)$ ne sont pas corrélés, on a bien entendu $r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$; ce qui donne finalement :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (4.51)$$

De plus, comme généralement la fac $r_{nn}(\tau)$ du bruit tend rapidement vers 0, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

Une illustration de cette dernière propriété (figure 4.16) montre comment l'autocorrélation permet d'extraire un signal noyé dans un bruit blanc. Dans cette figure, le signal est une sinusoïde d'amplitude 1 volt et le bruit blanc possède une valeur efficace de 5 volt.

Le signal extrait est reconnaissable mais encore perturbé par du bruit. Comme ce bruit résiduel diminue avec la racine carrée du nombre d'échantillon, on voit qu'on peut diminuer le bruit en augmentant le nombre d'échantillons enregistrés.

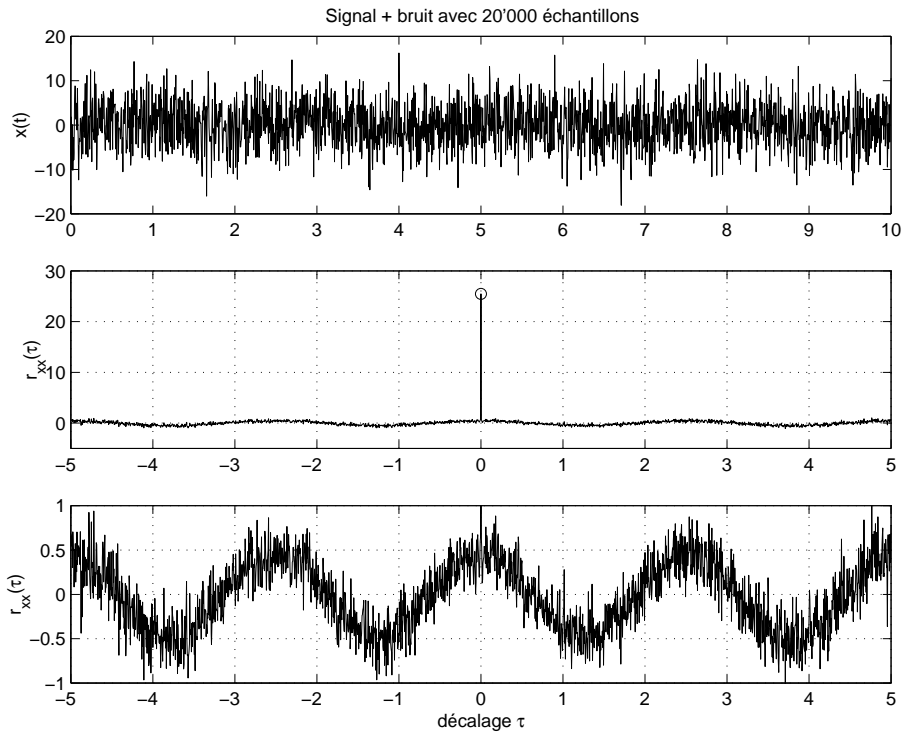


FIG. 4.16.: Extraction d'un signal avec l'aide de l'autocorrélation

4.5.4. Propriétés de l'intercorrélation

Comme pour la fonction d'autocorrélation, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions d'intercorrélation :

1. En général la fic n'est ni paire, ni impaire.
2. Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation.
3. Comme le fait de retarder $y(t)$ par rapport à $x(t)$ d'une valeur τ équivaut à avancer le signal $x(t)$ par rapport à $y(t)$, on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \quad (4.52)$$

4. Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique.

4.5.5. Calcul numérique de la corrélation

Le calcul numérique d'une corrélation se fait en remplaçant l'intégrale par la somme du produit des valeurs échantillonnées avec une période constante unité.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Dans le cas où l'on a suffisamment de points à disposition, on peut calculer la somme sur N points sans atteindre les limites des signaux enregistrés. On a alors :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+k], \quad k_{min} \leq k \leq k_{max} \quad (4.53)$$

Comme on l'a vu plus haut (équ. (4.39)), le calcul de l'intercorrélacion peut également se faire dans le domaine fréquentiel qui, pour les signaux numériques, se fait en utilisant la transformation de Fourier discrète (chapitre suivant). On obtient alors

$$R_{xy}[jk] = \frac{1}{N} X^*[jk] \cdot Y[jk]$$

Dans le cas où l'on souhaite utiliser toutes les valeurs à disposition, le nombre de points intervenant dans la somme diminue au fur et à mesure que le décalage augmente. Pour éviter de biaiser le résultat de la corrélation, on la calcule alors comme suit :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N - |k|} \sum_{n=0}^{N-|k|} x[n] y[n+k], \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (4.54)$$

4.6. Exemples de corrélation

La fonction d'intercorrélacion est très souvent utilisée pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation. Dans ce but, le signal émis est choisi de manière à ce que le pic de sa fonction d'autocorrélacion soit très bien défini. Les signaux le plus souvent utilisés sont les signaux chirp (à fréquence variable au cours du temps) et les séquences binaires pseudo-aléatoires.

4.6.1. Fonction de corrélation d'un signal chirp

Le signal chirp est un signal sinusoïdal dont la fréquence (ou la pulsation) varie linéairement avec le temps. Il est défini comme suit

$$x(t) = A \sin(\theta(t) + \alpha)$$

avec

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$
$$\omega(t) = \omega_{min} + \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{t_{max}} t \quad 0 \leq t \leq t_{max}$$

Sa fonction d'autocorrélacion possède un maximum très bien défini correspondant à la puissance du signal qui vaut $A^2/2$ (figure 4.17).

4.6. Exemples de corrélation

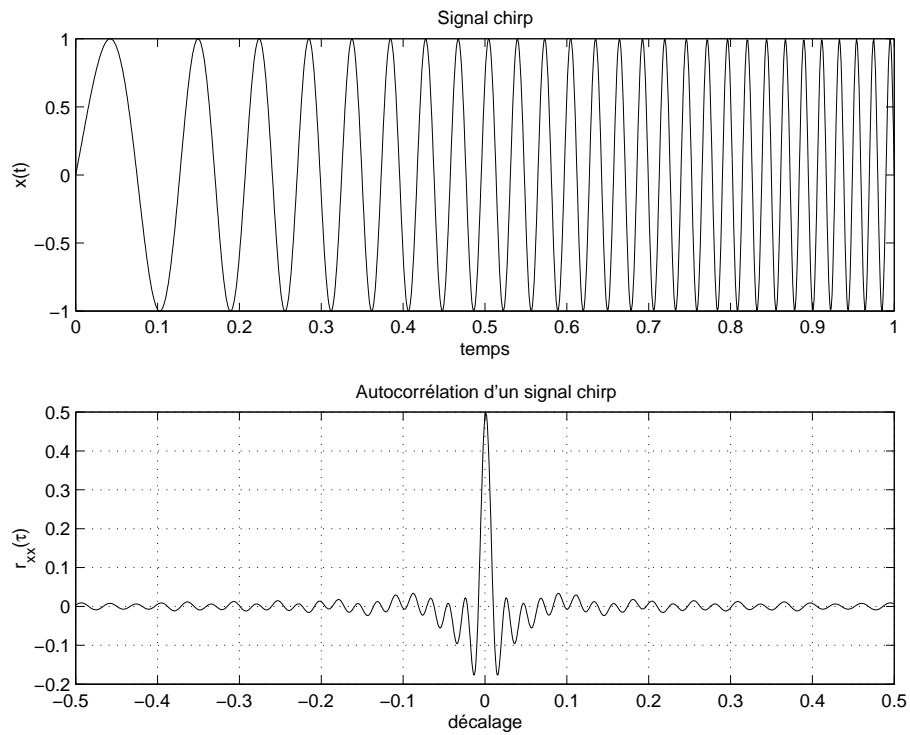


FIG. 4.17.: Autocorrélation d'un signal chirp

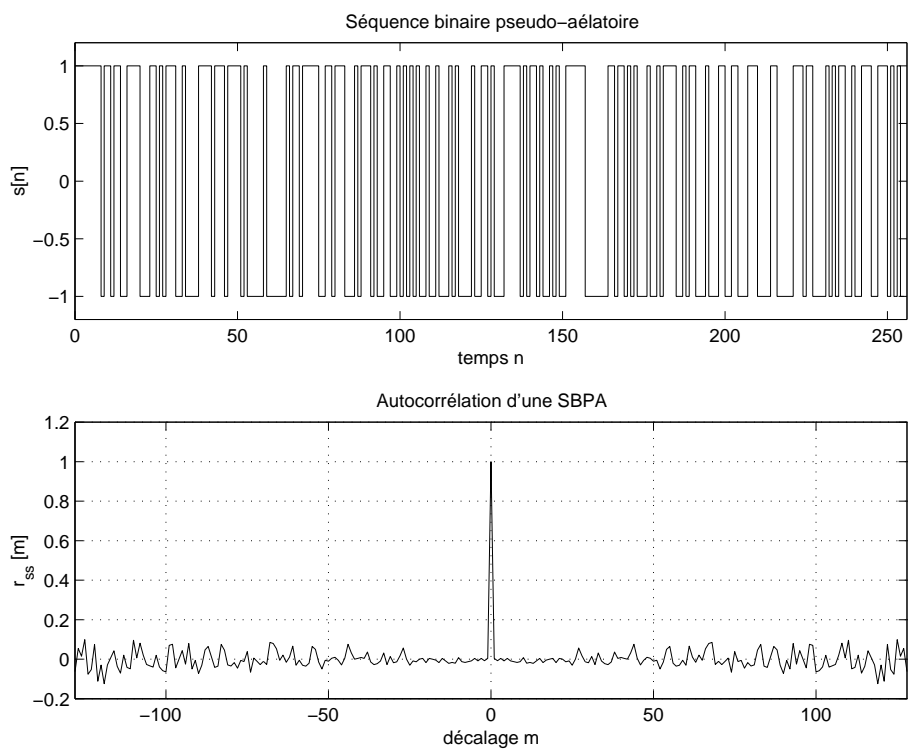


FIG. 4.18.: Autocorrélation d'une SBPA

4.6.2. Fonction de corrélation d'une SBPA

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est une succession de valeurs binaires (généralement ± 1) dont la distribution temporelle possède un caractère aléatoire pendant une certaine durée et qui ensuite se répète périodiquement. Sa fonction d'autocorrélation possède également un pic très bien défini égal à la puissance A^2 du signal (figure 4.18).

4.7. Deux applications de la corrélation

4.7.1. Le radar

Comme exemple illustratif, imaginons un système radar avec lequel on désire détecter la présence ou non d'un avion puis connaître la distance à laquelle il se trouve.

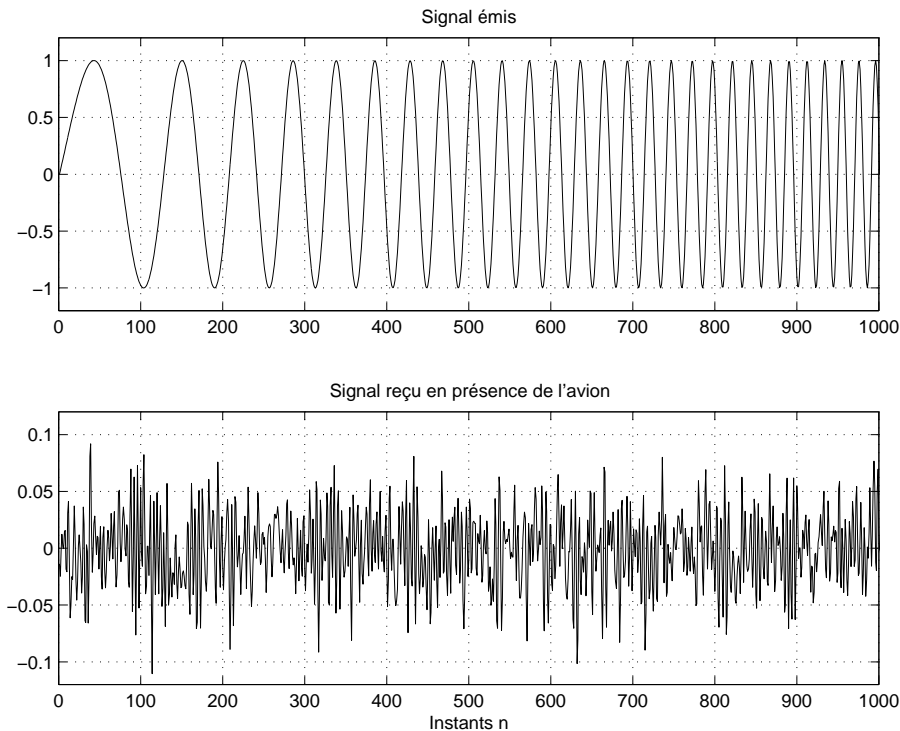


FIG. 4.19.: Signaux émis et reçus par un radar

Le radar émet un signal chirp $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé par l'avion (figure 4.19). S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu $y(t)$ est constitué d'un bruit $n(t)$ seulement. De plus, il est évident que si un avion est présent, le signal $y(t)$ reçu en retour consiste en une version atténuée, retardée, et fortement bruitée du signal émis $x(t)$. Ainsi, le signal reçu peut être décrit par :

$$y(t) = Ax(t - t_d) + n(t)$$

avec :

4.7. Deux applications de la corrélation

- A = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
- t_d = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
- $n(t)$ = le bruit additif capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.

Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle est incapable de détecter la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion (figure 4.19).

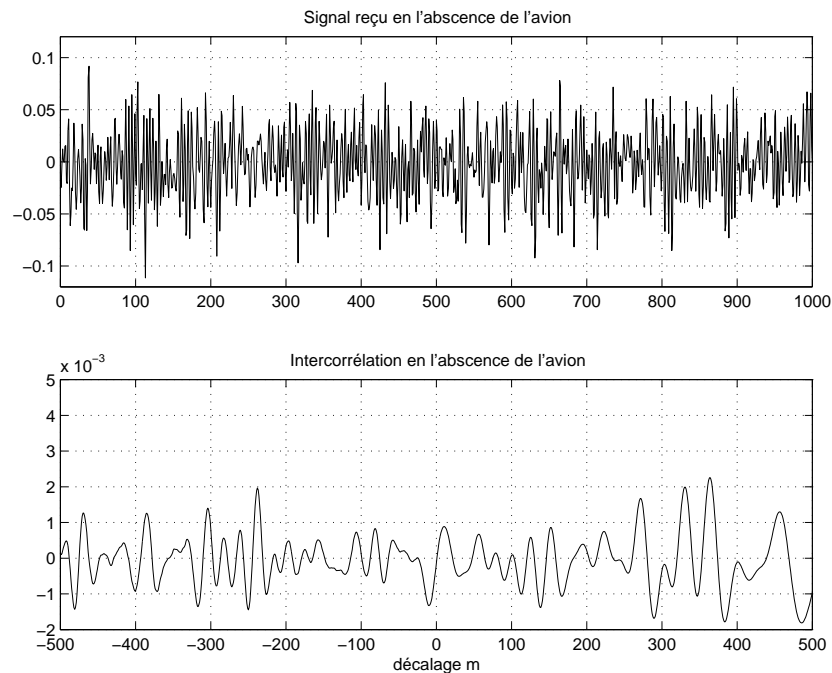


FIG. 4.20.: Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit

Les figures 4.20 et 4.21 illustrent le principe de l'utilisation d'un signal chirp pour détecter un avion et mesurer sa distance. Considérons les deux situations suivantes :

1. **Absence d'un avion :** Le signal reçu $y(t)$ est fortement atténué et perturbé. Seule une intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ permet de savoir si un avion est présent ou non. Dans ce dernier cas, aucun pic bien distinct n'apparaît dans le graphe (figure 4.20).
2. **Présence d'un avion :** Ici, l'intercorrélation fait apparaître un pic très étroit se dégageant nettement au-dessus du bruit de fond (figure 4.21). On notera que ce pic est légèrement décalé vers la droite par rapport à la position centrale ; ce décalage correspond au temps d'aller et retour du signal émis. Une fois ce temps déterminé, on peut calculer la distance de l'avion par rapport au radar.

4.7.2. La mesure d'un débit

On présente ici un débitmètre industriel réalisé par l'Institut d'Automatisation Industrielle de la heig-vd. Le principe, de même que sa réalisation, en est très simple.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

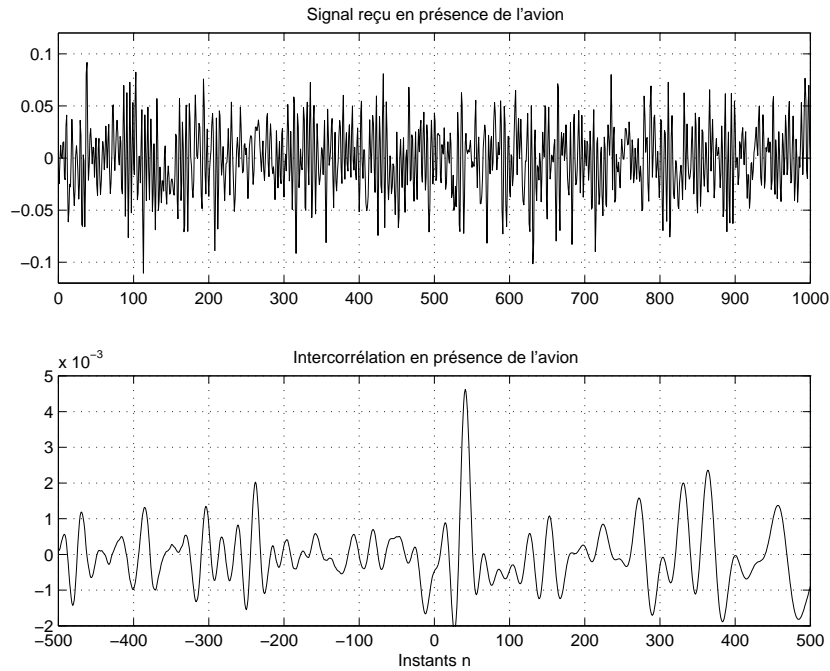


FIG. 4.21.: Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit corrélé

Une caméra fournit régulièrement des images d'un flux de granulés (figure 4.22). En effectuant la comparaison par intercorrélation de deux images successives, on obtient un point lumineux se situant aux coordonnées du déplacement $\Delta y(t)$. Connaissant la section A du conduit, on peut calculer le débit au cours du temps :

$$Q(t) = A \cdot \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

La seule difficulté de cette mesure réside dans le temps nécessaire pour calculer l'intercorrélation en temps réel. En effet, si l'on imagine que l'on dispose d'images de 100x400 pixels, on doit traiter 40'000 pixels par intercorrélation ; ce qui entraîne un nombre d'opérations valant environ

$$N_{op} \simeq N_{pxl}^2 = 16 \cdot 10^8$$

Même avec un DSP très performant ($T_{clock} \simeq 10$ ns), il n'est pas possible de fournir une information en moins d'une seconde. Par contre, en utilisant la FFT on peut espérer fournir des résultats dans le temps imparti car celle-ci demande beaucoup moins d'opérations

$$N_{op} \simeq N_{pxl} \log_2(N_{pxl}) \simeq 40 \cdot 10^3 \cdot 15 = 6 \cdot 10^5$$

L'algorithme de calcul est alors le suivant

- 1) acquisition de image1
- 2) acquisition de image2
- 3) FFT bidimensionnelle de image1 et image2 => IMG1 et IMG2
- 4) calcul de $R_{xy} = \text{conj}(IMG1) * IMG2$
- 5) FFT inverse pour obtenir rxy
- 6) recherche des coordonnées du maximum d'intensité

4.8. Description des signaux aléatoires

Une fois ces calculs effectués, il reste encore suffisamment de temps pour calculer le débit actuel, lisser cette valeur, afficher les images, etc (figure 4.22).

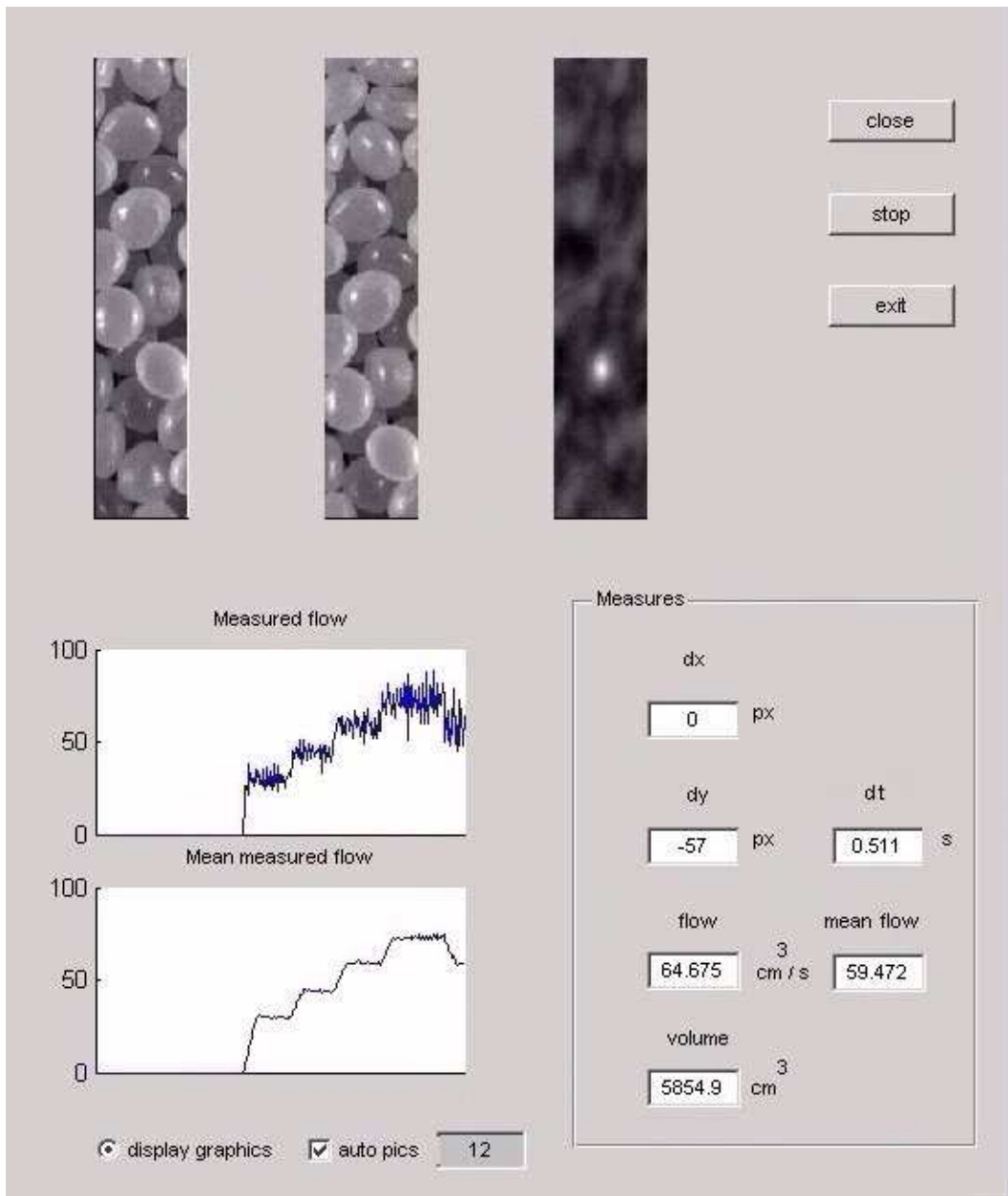


FIG. 4.22.: Interface du débitmètre de granulés

4.8. Description des signaux aléatoires

Par définition, les signaux aléatoires ne peuvent pas être décrits analytiquement. On peut cependant, comme on l'a vu plus haut, tenter de les classer dans une des trois catégories types qui sont :

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (figure 4.23a) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles (figure 4.23b) ;
- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes variables (figure 4.23c).

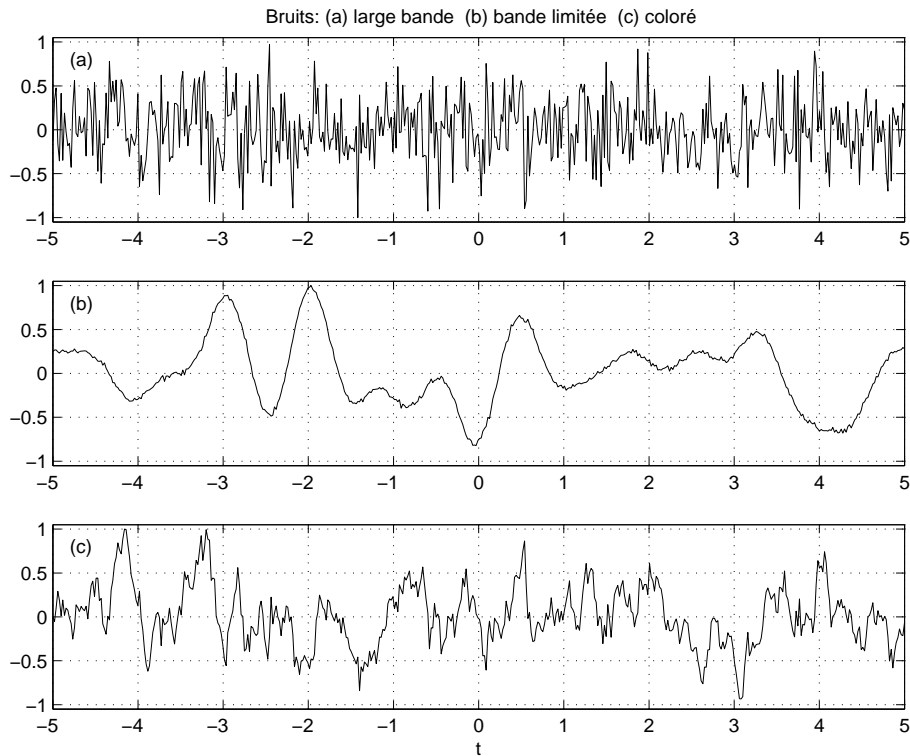


FIG. 4.23.: Trois signaux aléatoires

Comme aucune description analytique n'est possible pour les signaux aléatoires, on tente d'en extraire des propriétés statistiques temporelles en utilisant leurs fonctions d'autocorrélation (fac) illustrées à la figure 4.24. On en déduit que la fac du premier signal est extrêmement étroite ; on la modélise par une impulsion de Dirac. La deuxième fac rappelle une fonction en sinus cardinal. Enfin, la troisième peut être modélisée par une exponentielle décroissante symétrique.

On peut montrer que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation fournit la densité spectrale de puissance

$$R_{xx}(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad [V^2 \text{ sec}] = [V^2/\text{Hz}]$$

L'observation de la densité spectrale de puissance (figure 4.25) des trois signaux permet de tirer quelques propriétés et de définir des modèles représentant aussi bien que possible chacune des trois densités spectrales de puissance.

4.8. Description des signaux aléatoires

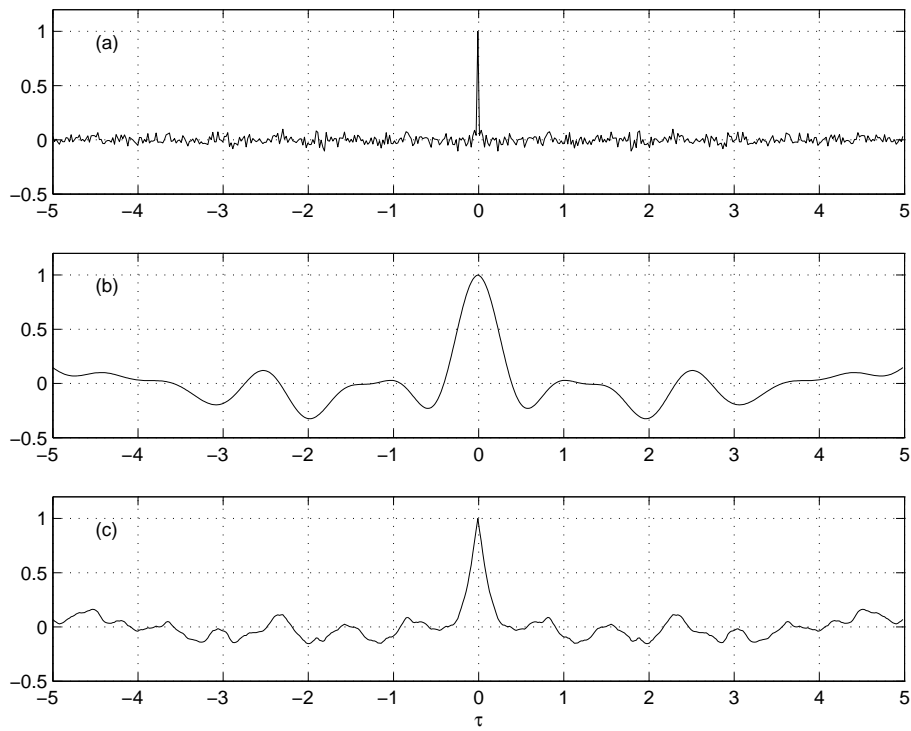


FIG. 4.24.: Fonctions d'autocorrélation des trois bruits types

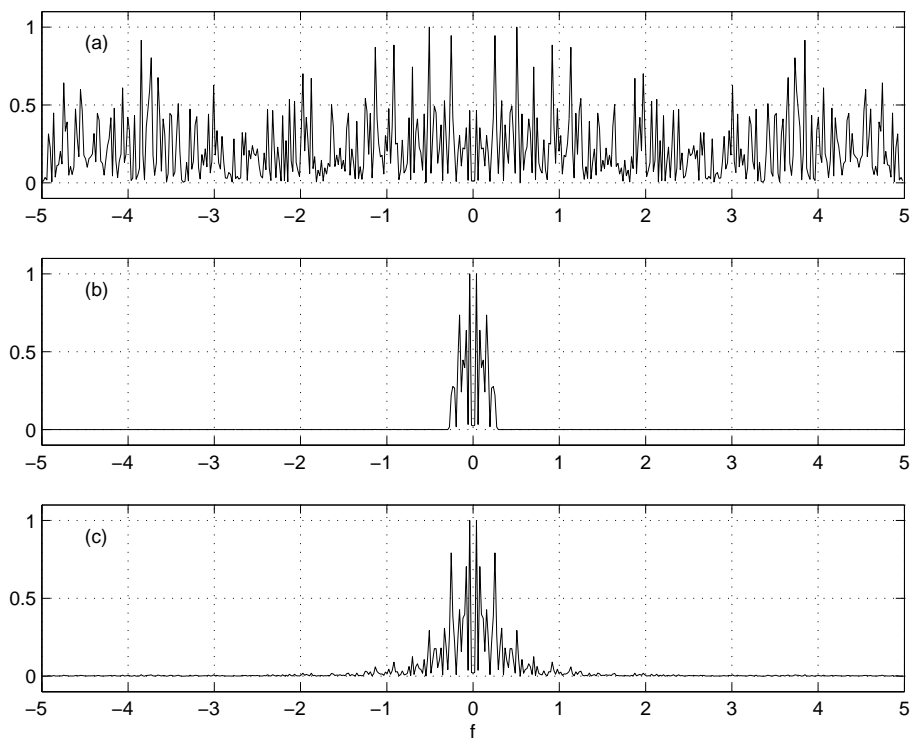


FIG. 4.25.: Densités spectrales de puissance des trois bruits types

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

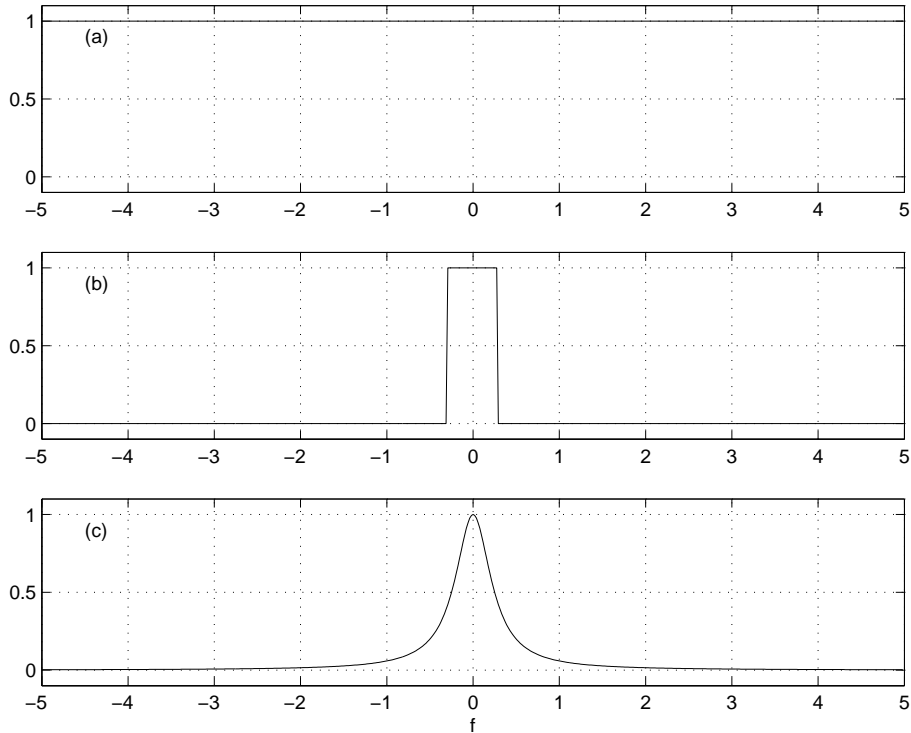


FIG. 4.26.: Trois modèles de densités spectrales de puissance

4.8.1. Le bruit blanc à densité spectrale constante et bande infinie

Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$ et sa densité spectrale de puissance est constante. Il est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = A^2 \quad -\infty < f < +\infty \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.55)$$

dont la fac est une impulsion de Dirac :

$$r_{xx}(\tau) = A^2 \cdot \delta(\tau) \quad [\text{V}^2] \quad (4.56)$$

Le théorème de Parseval nous dit alors que sa puissance est infinie. Est-ce possible ? Comme la réponse est négative, on préfère travailler avec un modèle moins simple, mais plus réaliste ; c'est le bruit à densité spectrale constante et à bande limitée

4.8.2. Le bruit à densité spectrale constante et bande limitée

Il contient toutes les fréquences de $-f_{max}$ à $+f_{max}$. Sa puissance finie est souvent désignée par la variance statistique σ_x^2 qui n'est autre que le carré de la valeur efficace X_{eff}^2 du signal. Ce bruit est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2f_{max}} & \text{si } -f_{max} < f < +f_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.57)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(2\pi f_{max}\tau)}{2\pi f_{max}\tau} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (4.58)$$

4.8.3. Le bruit coloré à puissance finie

Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$. Mais son spectre diminuant avec la fréquence, sa puissance σ_x^2 est finie. Un modèle souvent utilisé est le suivant :

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/Hz] \quad (4.59)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-a|\tau|} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (4.60)$$

avec

$$a = 2\pi f_c \quad [1/sec] \quad (4.61)$$

4.9. Systèmes linéaires et densités spectrales

Il est extrêmement fréquent que l'on doive étudier des signaux reliés entre-eux par le passage au travers d'un système linéaire, par exemple un filtre. Celui-ci étant décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(jf)$, les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont alors reliés entre eux par les relations bien connues :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (4.62)$$

$$Y(jf) = H(jf) X(jf) \quad (4.63)$$

où $X(jf)$ et $Y(jf)$ sont les densités spectrales d'amplitude des signaux $x(t)$ et $y(t)$.

Sachant que les densités spectrales de puissance (ou d'énergie) valent :

$$R_{xx}(f) = X(jf) \cdot X(jf)^* = |X(jf)|^2 \quad (4.64)$$

$$R_{yy}(f) = Y(jf) \cdot Y(jf)^* = |Y(jf)|^2 \quad (4.65)$$

on montre aisément que les densités spectrales de puissance sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$R_{yy}(f) = |H(jf)|^2 R_{xx}(f) \quad (4.66)$$

On peut également montrer que si $x(t)$ et $y(t)$ sont reliés entre eux par $h(t)$, le produit de convolution s'applique aux fonctions de corrélation et l'on a :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) r_{xx}(\tau - \theta) d\theta \quad (4.67)$$

$$R_{xy}(f) = H(jf) R_{xx}(f) \quad (4.68)$$

Le tableau 4.2 réunit les relations existant entre les signaux, les fonctions de corrélation et les densités spectrales.

	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Signaux		
entrée	$x(t)$	$X(jf)$
système	$h(t)$	$H(jf)$
sortie	$y(t)$	$Y(jf)$
relation	$y(t) = h(t) \otimes x(t)$	$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf)$
Corrélation		
entrée	$r_{xx}(\tau)$	$R_{xx}(f)$
système	$h(\tau)$	$H(jf)$
sortie	$r_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(jf)$
relation	$r_{xy}(\tau) = h(\tau) \otimes r_{xx}(\tau)$	$R_{xy}(jf) = H(jf) \cdot R_{xx}(f)$
Densités spectrales		
		$R_{yy}(f) = H(jf) ^2 R_{xx}(f)$

TAB. 4.2.: Relations temporelles et fréquentielles

4.10. Énergie et puissance des signaux

Suivant les caractéristiques des signaux, on calculera leur puissance P ou leur énergie W . Ce calcul peut, bien entendu, se faire dans le domaine temporel :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.69)$$

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (4.70)$$

ou dans celui des fréquences :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) df \quad [\text{V}^2] \quad (4.71)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.72)$$

où $R(f)$ [V^2/Hz] est la densité spectrale de puissance et $S(f)$ [V^2/Hz^2] est la densité spectrale d'énergie.

4.10.1. Domaine temporel

Reprenons les signaux de la figure 4.11 et calculons leur puissance ou leur énergie dans le domaine temporel.

Signal temporaire

Soit $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$; sa puissance moyenne est nulle et son énergie finie :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = 0$$

$$W_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = \frac{A^2}{2a} = \frac{A^2 \tau}{2} < \infty \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.73)$$

Signal périodique permanent

Soit $x_2(t) = A \text{signe}(\sin(2\pi f_0 t))$; sa puissance est finie et son énergie infini :

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt = A^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (4.74)$$

$$W_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt \rightarrow \infty$$

Signal aléatoire permanent

Un signal aléatoire et permanent possède une puissance finie et une énergie infinie :

$$P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_3^2(t) dt = X_{3,eff}^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (4.75)$$

$$W_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_3^2(t) dt \rightarrow \infty$$

4.10.2. Domaine fréquentiel

Reprenant les signaux de la figure 4.11 et connaissant leur densité spectrale de puissance ou d'énergie, on peut calculer leur puissance ou énergie dans le domaine fréquentiel.

Signal temporaire

Son énergie se calcule après définition de sa densité spectrale d'énergie $S_1(f)$:

$$S_1(f) = |X_1(jf)|^2 = \left| \frac{A}{a + j2\pi f} \right|^2 = \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.76)$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} df = \frac{A^2}{2a} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.77)$$

Signal périodique permanent

Sa puissance se calcule après définition de sa densité spectrale de puissance $R_2(f)$. Comme le signal est périodique, celle-ci est discrète et s'obtient à partir des raies spectrales $X(jk)$:

$$R_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = \sum_{-\infty=k \neq 0}^{+\infty} \left| A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \delta(f - kf_0) \right|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.78)$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(f) df = \sum_{-\infty=k \neq 0}^{+\infty} \left| A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right|^2 = A^2 \quad [\text{V}_{eff}^2] \quad (4.79)$$

Signal aléatoire permanent

Grâce aux modèles que l'on s'est donné pour décrire les signaux aléatoires (section 4.4.3), on peut calculer la puissance du signal $x_3(t)$:

$$P_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_3(f) df = X_{3,eff}^2 \quad [\text{V}_{eff}^2] \quad (4.80)$$

Des graphes illustrants ces trois bruits ainsi que les fonctions d'autocorrélation et les densités spectrales de puissance correspondantes sont présentés dans les figures à 4.23 à 4.26.

Remarque Il est intéressant de relever que, pour les composants semiconducteurs, la donnée de la densité spectrale de puissance $R(f)$ est remplacée par une *tension équivalente de bruit* qui n'est autre que la racine carrée de la densité spectrale de puissance :

$$e_n(f) \equiv \sqrt{R(f)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (4.81)$$

Par exemple, les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel LF411 montrent que, dans les basses fréquences, le spectre du bruit décroît à raison de 10 [dB] par décade (flicker noise = bruit de grenaille) et qu'il reste pratiquement constant au delà de 300 [Hz] et qu'il vaut alors :

$$e_n \cong 30 \left[\frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad f > 300 \text{ [Hz]}$$

4.11. Signaux, spectres et statistique

La page suivante, tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2], illustre les propriétés temporelles, spectrales et statistiques de quelques signaux. Comme on l'a déjà dit plus haut, ces descriptions ne sont que des points de vue différents d'une même réalité : le signal temporel $x(t)$. Ces points de vue sont complémentaires et c'est le but du traitement des signaux de les relier entre eux et d'en tirer efficacement le maximum d'information.

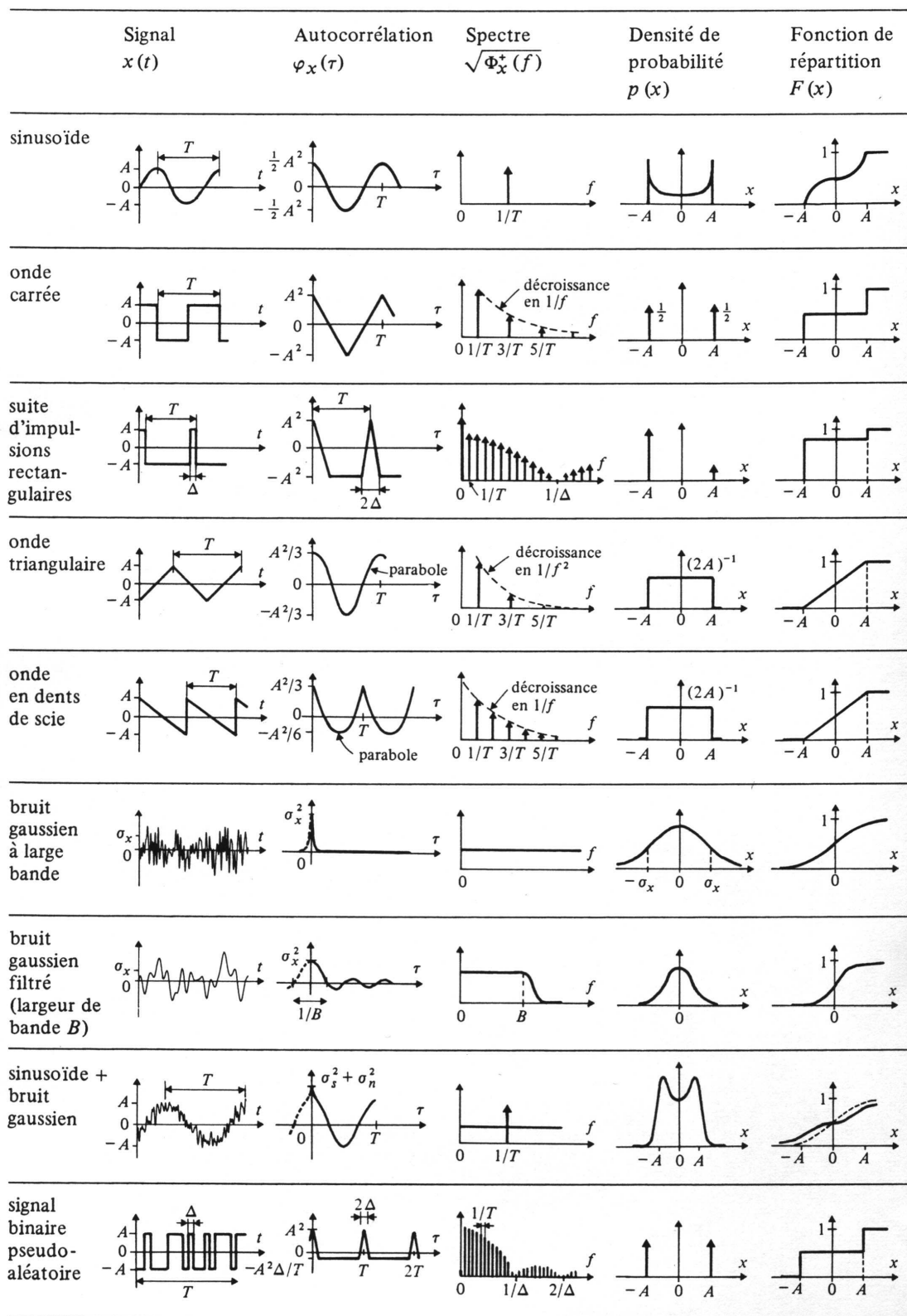


FIG. 4.27.: Descriptions temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques [2]

4.12. Quelques exemples

Exemple 1 :

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at)\epsilon(t)$ à un filtre passe-bande idéal.

1. Dessinez la réponse fréquentielle du filtre.
2. Esquissez les densités spectrales d'amplitude $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
3. Que valent les densités spectrales d'énergie $S_1(f)$ et $S_2(f)$?
4. Calculez les énergies W_1 et W_2 des signaux d'entrée et de sortie.
5. A.N. : $U_0 = 10$ [V], $a = 24'000$ [1/sec], $f_1 = 4$ [kHz], $f_2 = 6$ [kHz]

Solution :

Exemple 2 :

Un opérateur vous informe qu'il a mesuré à la sortie d'un amplificateur un bruit large bande dont la valeur efficace vaut $U_{1,eff} = 0.1 [V_{eff}]$.

1. Quelle est la puissance P_1 de ce bruit ?
2. L'information apportée par l'opérateur est-elle significative et suffisante ? Après discussion, il précise que cette mesure a été effectuée avec un voltmètre à vraie valeur efficace dont la bande passante est de 100kHz.
3. Esquissez puis calculez la densité spectrale de puissance $R_1(f)$ de ce bruit.
4. La sortie de cet amplificateur est branchée sur un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est fixée à 1 kHz. Esquissez la densité spectrale de puissance $R_2(f)$ du bruit après le filtre.
5. Quelle valeur efficace $U_{2,eff}$ mesurerez-vous après le filtre ?

Solution :

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Exemple 3 :

À la sortie d'un amplificateur dont la bande passante est de 100 [kHz], on mesure un bruit de 0.1 [V_{eff}]. On filtre ce bruit avec un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1.6$ [k Ω] et $C = 100$ [nF].

1. Calculez la densité spectrale de puissance $R_1(f)$ du bruit de sortie de l'amplificateur.
2. Calculez la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
3. Esquissez sur un même diagramme les densités spectrales de puissance $R_1(f)$ et $R_2(f)$ présentes à l'entrée et à la sortie du filtre RC.
4. Quelle sera la valeur efficace de la tension à la sortie du filtre RC ?

Solution :

Exemple 4 :

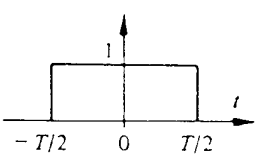
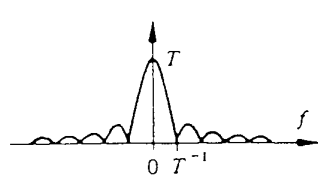
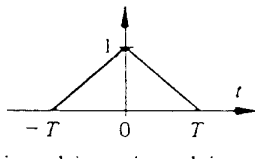
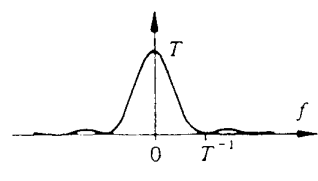
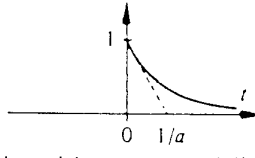
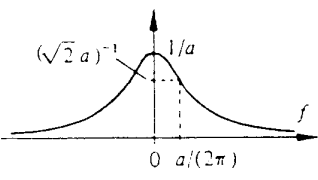
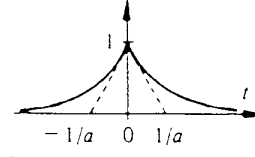
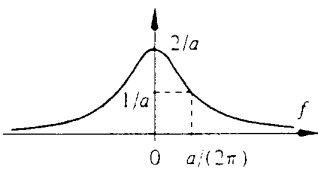
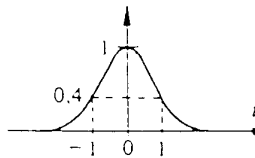
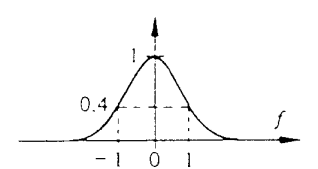
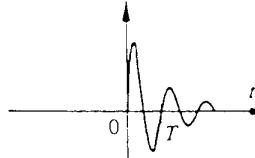
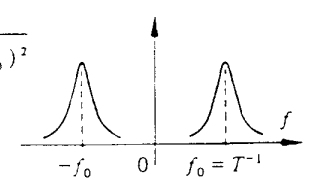
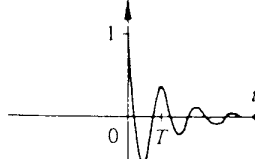
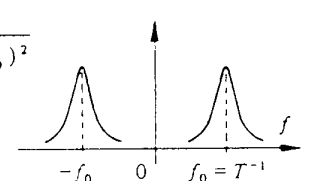
On applique une impulsion de tension d'amplitude E et de largeur Δt à un filtre passe-bande LC-R caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et son facteur de qualité Q_0 . Admettant que la largeur de l'impulsion est beaucoup plus petite que les temps caractéristiques du filtre :

1. Esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ainsi que $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
2. Calculez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$.
3. Calculez l'énergie W_1 du signal d'entrée.
4. Calculez l'énergie W_2 du signal de sortie du filtre.
5. A.N. : $E = 10$ [V], $\Delta t = 10$ [μ sec], $f_0 = 1$ [kHz], $Q_0 = 10$.
6. Proposez des valeurs pour les composants R, L et C du filtre.

Solution :

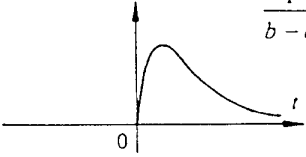
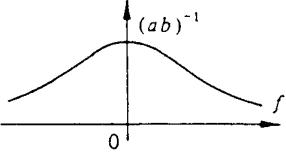
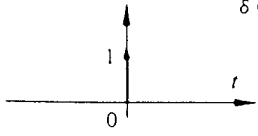

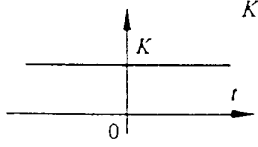
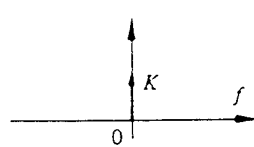

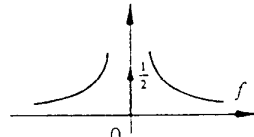
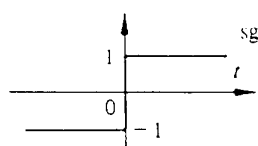
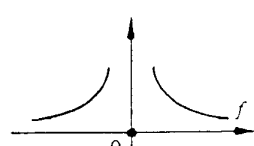
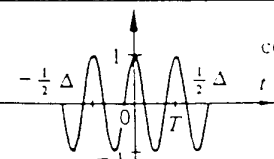
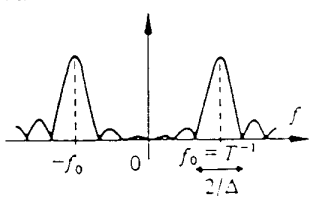
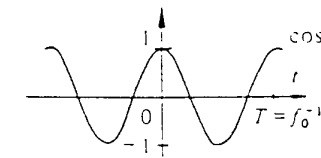
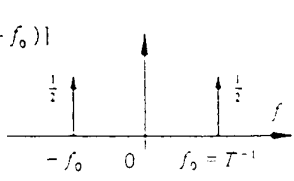
4.13. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$ $T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$ $= T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-a t} \epsilon(t)$ $\frac{1}{a + j 2 \pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$ $\frac{2a}{a^2 + (2 \pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$ $\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-a t} \sin(2 \pi f_0 t) \epsilon(t)$ $\frac{2 \pi f_0}{(a + j 2 \pi f)^2 + (2 \pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-a t} \cos(2 \pi f_0 t) \epsilon(t)$ $\frac{a + j 2 \pi f}{(a + j 2 \pi f)^2 + (2 \pi f_0)^2}$	

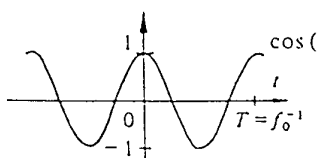
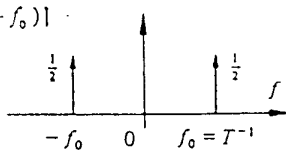
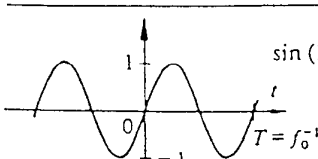
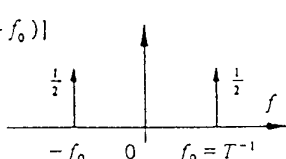
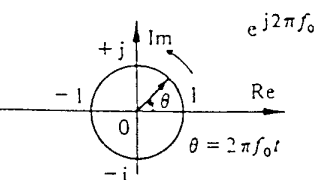
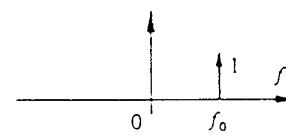

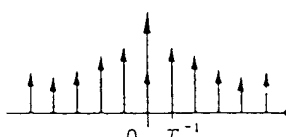
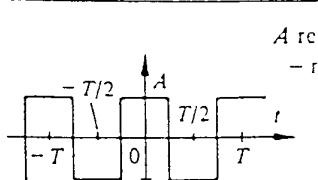
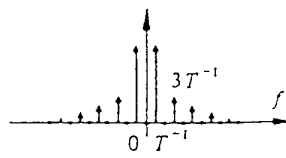
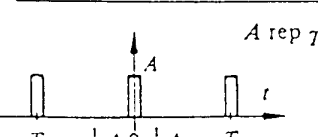
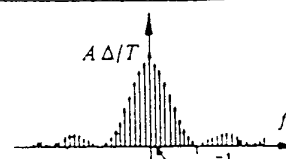

4.13. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\delta(t)$	1	
<p>impulsion unité (Dirac)</p>		
 K	$K \delta(f)$	
<p>constante</p>		
 $\epsilon(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
<p>saut unité</p>		
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\frac{1}{j\pi f}$ si $f \neq 0$ 0 si $f = 0$	
<p>fonction signe</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	
<p>impulsion cosinusoidale</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
<p>signal cosinusoidal</p>		

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$	
 <p>$e^{j2\pi f_0 t}$</p>	$\delta(f-f_0)$	
 <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nr}{T}}$	
 <p>onde carrée</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = A \text{sinc}(n/2)$	
 <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$

4.14. Exercices

TF 10 Soit un message $m(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(jf)|$ si $f_1 = 10$ [kHz] et $f_0 = 800$ [kHz];
3. idem 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(jf)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz].

TF 11 Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $|U(jf)|$ pour $U_0 = 1$ [V], $T = 1/f_0 = 1$ [msec], $t_0 = 10$ [msec].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

TF 12 Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi f_0 t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $U(jf)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée;
4. observez les différences.

TF 13 Connaissant la transformée $E(jf)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(jf)$ de la fonction signe $s(t)$.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

TF 14 Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(jf) = X(jf) \cdot H(jf) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(jf)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf)\exp(+j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(jf)X(jf)\exp(+j2\pi ft)df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\exp(-j2\pi f\theta)d\theta$$

TF 15 Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(jf)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(jf)$; ce filtre est-il réalisable ? pourquoi ?

TF 16 Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $U(jf)$;
2. calculez puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut sa puissance ?

TF 17 Utilisez la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

TF 18 On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

TF 19 On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \exp(-a|t|)$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

TF 20 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$; esquissez leur module ;
2. en admettant $U_0 = 10$ [V] et $a = 1000$ [1/sec], calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :
 - (a) $f_c = 1$ [kHz] ;
 - (b) $f_c = \frac{a}{2\pi}$.

TF 21 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec] un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(jf) = \begin{cases} 1 \text{ [V/Hz]} & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 300 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(jf)$ du filtre ; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(jf)$, $H(jf)$ et $U_2(jf)$ pour $-500 \text{ [Hz]} < f < +500 \text{ [Hz]}$;
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie ?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue ?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche ; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

TF 22 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = RC = 10$ [msec] une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \exp(-at)\epsilon(t)$ avec $a = 1000$ [1/sec].

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

TF 23 On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(jf) = \frac{D_0 \frac{jf}{f_0}}{1 + D_0 \frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie ;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1 \text{ [kHz]} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 D_0$$

TF 24 Considérant le spectre $X(jf)$ de la figure 4.28 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface 1/2, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

TF 25 A partir du signal $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Corr 1 Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

¹Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- a) esquissez la fonction à intégrer ;
- b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie ;
- c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

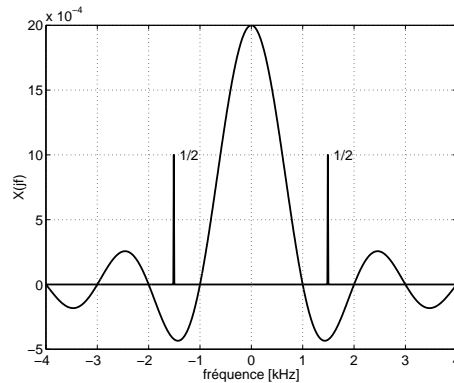


FIG. 4.28.: Exercice TF24

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes $\tau = 0, \pm\Delta t, \pm 2\Delta t$;
3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Corr 2 Considérant les 3 signaux suivants :

- $x(t)$ = une exponentielle décroissante d'amplitude A et de constante de temps τ_1
- $y(t)$ = une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt
- $z(t)$ = une impulsion triangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2\Delta t$

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux ;
2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation ;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple ; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

Corr 3 Calculez la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $h(t)$ de l'exercice Corr 3. Avant de vous lancer dans les calculs, imaginez où se situera le maximum de la fonction. Esquissez le résultat de l'intercorrélation.

Corr 4 On souhaite connaître la fonction d'intercorrélation des signaux $h_2(t)$ et $h_1(t)$ de l'exercice Corr 4 :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

Pour cela :

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

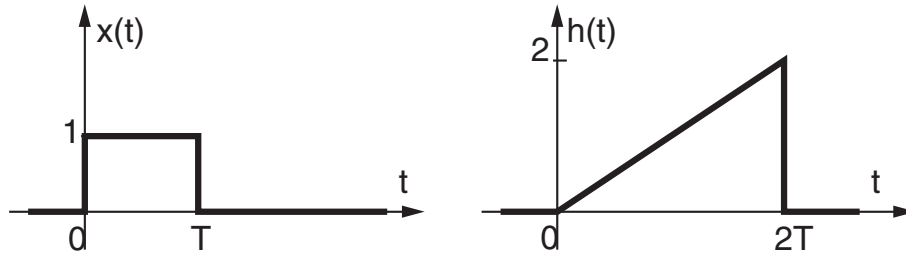


FIG. 4.29.: Exercice Corr 3

1. imaginez tout d'abord l'endroit où se situera le maximum de la fic ;
2. montrez que, pour les points particuliers suivants $\tau = \{-2\Delta t, -\Delta t, 0, +\Delta t\}$, on a, respectivement, $h_{21}(\tau) = \{0, A^2 \frac{\Delta t}{3}, A^2 \frac{\Delta t}{6}, 0\}$;
3. pourquoi, comme il est précisé dans la remarque ci-dessous, le calcul est-il plus simple lorsque τ est compris entre 0 et Δt ?
4. que pensez-vous des résultats graphiques obtenus avec Matlab (figure 4.30) ?

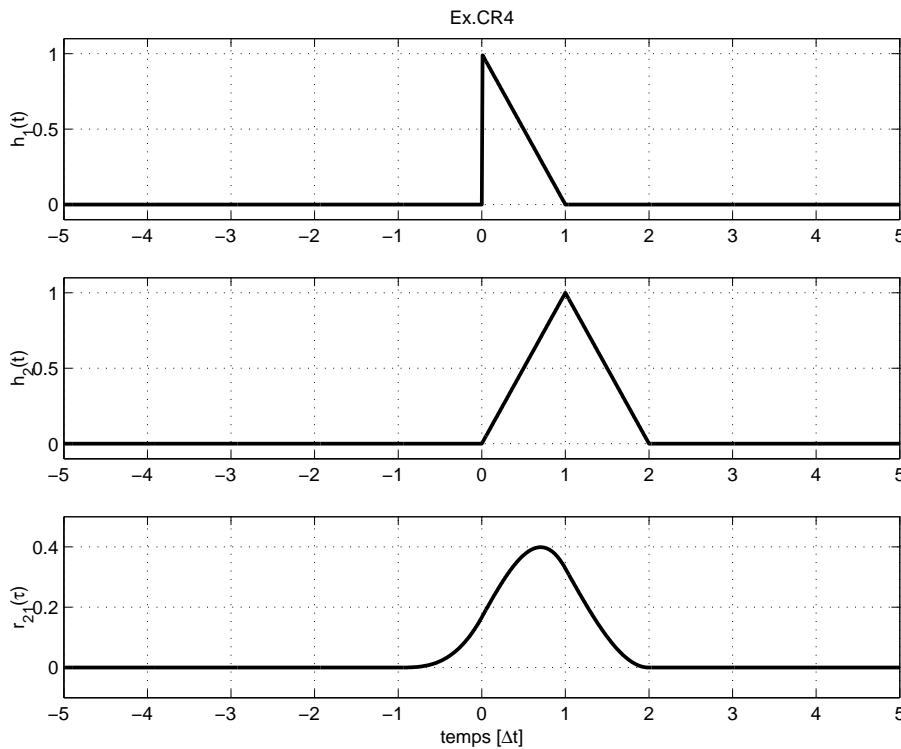


FIG. 4.30.: Exercice Corr4

Remarque Pour donner une idée de ce que représente l'approche analytique, voici le calcul de la partie la plus simple correspondant au décalage avancé de $h_1(t + \tau)$ avec τ compris entre 0 et Δt .

Comme l'on a :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

il faut commencer par décrire les 2 fonctions suivantes :

$$h_2(t) = \frac{A}{\Delta t} t \quad h_1(t + \tau) = A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t} \right)$$

valables pour $0 < t < \Delta t$, respectivement, $-\tau < t < \Delta t - \tau$.

Puis, tenant compte des parties nulles, il vient :

$$\begin{aligned} r_{21}(\tau) &= \int_0^{\Delta t - \tau} h_2(t) h_1(t + \tau) dt \\ &= \int_0^{\Delta t - \tau} \frac{A}{\Delta t} t A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t} \right) dt \\ &= \frac{A^2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t - \tau} \left(t - \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{\tau t}{\Delta t} \right) dt \\ &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\Delta t} - \frac{\tau t^2}{2\Delta t} \right) \Big|_0^{\Delta t - \tau} \\ &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) - \frac{(\Delta t - \tau)^3}{3\Delta t} \right) \\ &= A^2 \frac{(\Delta t + \tau)^2}{6 \Delta t^2} (\Delta t - \tau) \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier les 2 valeurs suivantes :

$$r_{21}(\tau = 0) = A^2 \frac{\Delta t}{6} \quad r_{21}(\tau = \Delta t) = 0$$

Corr 5

Considérant deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ définis comme suit :

n	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0

calculez et représentez la fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n + m)$$

4. ANALYSE ET COMPARAISON DES SIGNAUX

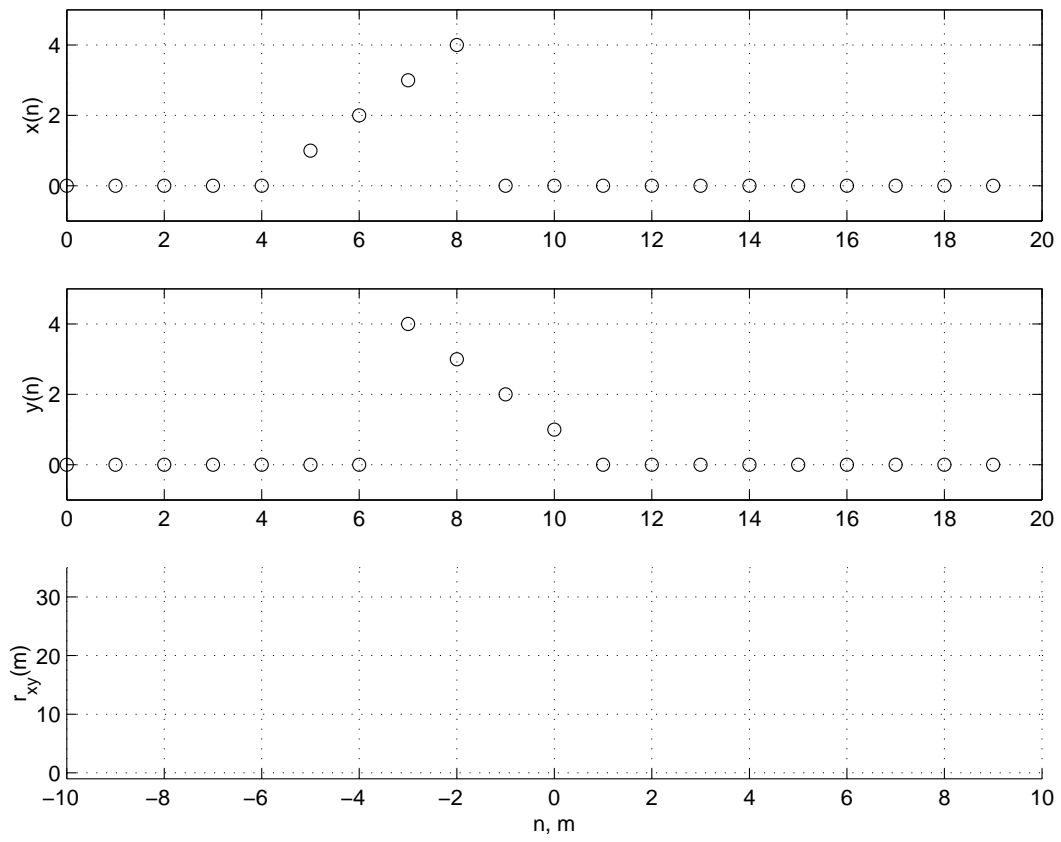


FIG. 4.31.: Exercice Corr5

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970

Bibliographie

5. Éléments d'analyse spectrale numérique

5.1. Passage de la TF à la TFD

L'échantillonnage des signaux analogiques est étudiée en détail dans la première partie du chapitre suivant. Pour ce qui suit, il suffit de savoir que tout signal analogique $x(t)$ est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage T_e et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux $x[n]$ sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 5.1) et tels que

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_e} \quad (5.1)$$

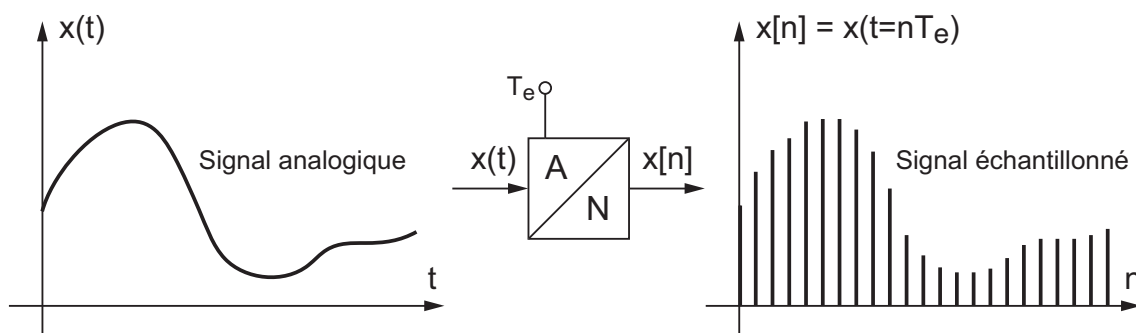


FIG. 5.1.: Acquisition numérique d'un signal analogique

Le passage de la transformation de Fourier (TF) des signaux analogiques $x(t)$ à la transformation de Fourier discrète (TFD) des signaux numérisés $x[n]$ fait intervenir trois opérations :

- l'échantillonnage du signal analogique ;
- la limitation de la durée de l'enregistrement de ce signal ;
- la discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale numérique.

Ces trois opérations, apparemment anodines, ont des conséquences dont il est important d'évaluer l'étendue. Pour mémoire, on rappelle trois propriétés de la transformation de Fourier dont on aura besoin par la suite :

- au produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(jf) \otimes Y(jf) \quad (5.2)$$

$$x(t) \otimes y(t) \longleftrightarrow X(jf) \cdot Y(jf) \quad (5.3)$$

– la TF d'un peigne d'impulsions de Dirac est également un peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (5.4)$$

– la TF d'une impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt est un sinus cardinal

$$A \text{rect}(t/\Delta t) \longleftrightarrow A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{sinc}(f \Delta t) \quad (5.5)$$

Afin de concrétiser au mieux les relations existant entre les espaces temps et fréquence, on considérera par la suite que les signaux étudiés sont fournis sous la forme d'une tension électrique que l'on échantillonne régulièrement pendant une durée finie avant de calculer numériquement son contenu spectral. Ainsi, pour chaque équation, on pourra préciser les unités des résultats obtenus.

5.1.1. Signaux continus non-périodiques

Un signal analogique $x(t)$ et sa densité spectrale $X(jf)$ sont reliés entre eux par les relations

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V sec}] \quad (5.6)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi ft) df \quad [\text{V}] \quad (5.7)$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence (figure 5.2.a). À cette symétrie correspond la propriété suivante :

à un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu non périodique.

5.1.2. Signaux discrets de durée infinie

On considère ici que le signal continu $x(t)$ (figure 5.2.a) est échantillonné tous les multiples de la période d'échantillonnage T_e . Cette opération d'échantillonnage peut être représentée mathématiquement par la multiplication du signal $x(t)$ avec un peigne d'impulsions de Dirac distantes de T_e (figure 5.2.b)

$$x(t = nT_e) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (5.8)$$

On obtient ainsi une suite d'impulsions de Dirac pondérées par les valeurs $x(t = nT_e)$ (figure 5.2.c) ; celles-ci représentent alors le signal discret $x[n] = x(t = nT_e)$.

Dans l'espace fréquentiel, le peigne de Dirac temporel $\delta_{T_e}(t)$ devient un peigne de Dirac périodique f_e (figure 5.2.b)

$$\Delta(f) \equiv TF\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (5.9)$$

5.1. Passage de la TF à la TFD

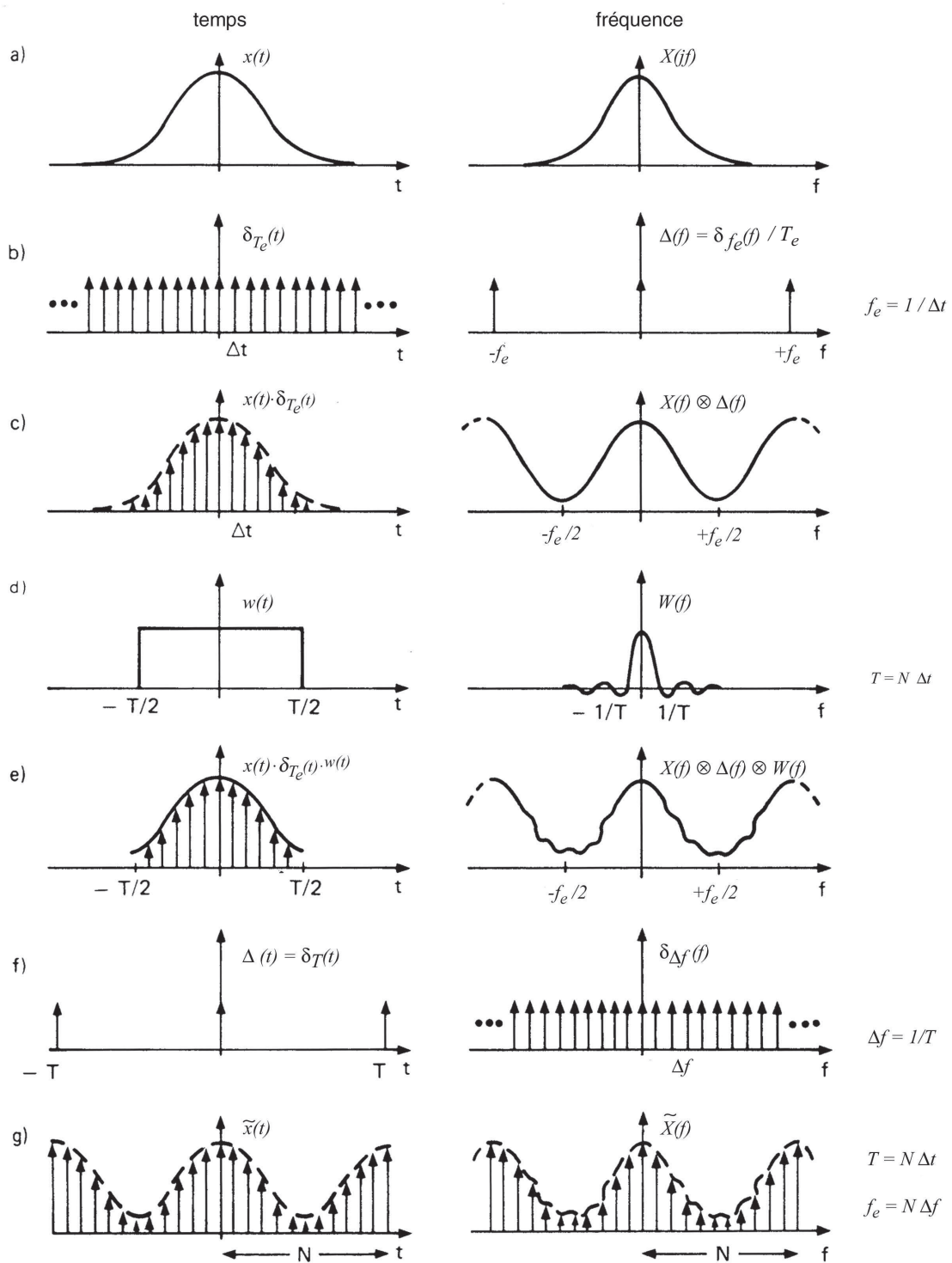


FIG. 5.2.: Passage de la TF à la TFD [1]

Comme le produit simple dans l'espace temps conduit à un produit de convolution entre les spectres $X(jf)$ et $\Delta(f)$ (figure 5.2.c), on constate que :

à un signal échantillonné ou discret correspond un spectre continu et périodique f_e .

Le calcul du spectre $X_e(jf)$ d'un signal discret $x[n]$ se fait à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux continus (équation 5.6). On obtient alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (5.10)$$

Partant de ce spectre $X_e(jf)$, on peut bien entendu revenir au signal temporel $x[n]$:

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad -\infty < n < +\infty \quad (5.11)$$

5.1.3. Signaux discrets de durée finie

Dans le cas où l'on désire traiter numériquement un signal, le nombre de valeurs $x[n]$ ne peut pas être infiniment grand. On est donc contraint à ne prendre en compte qu'une partie du signal original. Mathématiquement, cette opération de troncation revient à multiplier le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire $w(t)$ de largeur T (figure 5.2.d).

À cette multiplication dans l'espace temps correspond un produit de convolution dans l'espace des fréquences entre le spectre du signal $X(jf)$ et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre $w(t)$. Il en résulte une déformation du spectre original causée par les ondulations du sinus cardinal (figure 5.2.e).

Le signal $x(t)$ est enregistré pendant une durée finie T en échantillonnant N valeurs du signal $x(t)$. On a donc $T = N \cdot T_e$. La suite de valeurs discrètes $x_N[n]$ ainsi obtenue sera énumérée avec le compteur temporel n compris entre 0 et $N - 1$ et le spectre du signal tronqué se calcule alors comme suit

$$X_{e,N}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}]$$

Il est bien clair que les N valeurs temporelles peuvent s'obtenir par transformation inverse de $X_{e,N}(jf)$

$$x_N[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{e,N}(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Remarque Par la suite, aucune distinction ne sera faite entre $x_N[n]$ et $x[n]$ d'une part, et $X_{e,N}(jf)$ et $X_e(jf)$ d'autre part, car le contexte permettra toujours de savoir si la longueur N de la suite considérée est finie ou non ; les 2 relations ci-dessus s'écriront alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T_e) \quad [\text{V sec}] \quad (5.12)$$

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi f n T_e) df \quad [\text{V}] \quad (5.13)$$

5.1.4. Discrétisation de la fréquence

Afin de pouvoir calculer numériquement un spectre, il est évidemment nécessaire de discrétiser la fréquence. En divisant le domaine fréquentiel en N intervalles, l'incrément fréquentiel vaut $\Delta f = f_e/N$ et les fréquences analysées, au nombre de N , sont :

$$f = k \cdot \Delta f = k \cdot f_e/N \quad (5.14)$$

Cette discrétisation de la fréquence n'est rien d'autre qu'un échantillonnage dans le domaine spectral et les résultats des opérations d'échantillonnage et de multiplication vues plus haut pour l'espace temps s'appliquent également dans l'espace des fréquences (figure 5.2.f et 5.2.g) et conduisent à la propriété suivante :

à la discrétisation du domaine spectral correspond un signal temporel périodique.

Tout se passe comme si la durée d'acquisition T correspondait à une période du signal temporel $x[n]$. Le spectre considéré à présent est donc un spectre discret que l'on écrit $X[jk]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$. Tenant compte des relations temps-fréquence, l'argument du phaseur s'écrit

$$\pm j2\pi f n T_e = \pm j2\pi k \Delta f n T_e = \pm j2\pi k \frac{f_e}{N} n T_e = \pm j2\pi \frac{k n}{N} \quad (5.15)$$

Le spectre $X[jk]$ et le signal temporel $x[n]$ se calculent alors comme suit

$$X[jk] = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi k n}{N}\right) \quad [\text{V sec}] \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (5.16)$$

$$x[n] = \frac{1}{N T_e} \sum_{k=0}^{N-1} X[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi k n}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (5.17)$$

5.2. Relations temps-fréquence

Comme les domaines temporel et fréquentiel sont discrétisés avec le même nombre de points N , on peut relever que

1. l'**espace du temps** est caractérisé par la durée de l'enregistrement T et par l'incrément temporel Δt (qui n'est autre que la période d'échantillonnage T_e) tel que

$$\Delta t \equiv T_e = \frac{T}{N} \quad (5.18)$$

2. l'**espace des fréquences** est caractérisé par l'incrément fréquentiel Δf et la fréquence maximum f_{max} qui n'est autre que la fréquence d'échantillonnage f_e

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{f_e}{N} \quad (5.19)$$

Ces deux relations ayant en commun la période d'échantillonnage T_e et son inverse la fréquence d'échantillonnage, on a

$$\Delta t \equiv T_e \equiv \frac{1}{f_e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta f} \quad (5.20)$$

On en déduit donc trois relations importantes liant les domaines temporel et fréquentiel

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (5.21)$$

$$f_{max} \equiv f_e = \frac{1}{\Delta t} \equiv \frac{1}{T_e} \quad (5.22)$$

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (5.23)$$

De plus, on définit la fréquence de Nyquist f_N comme étant la limite du domaine d'analyse spectrale

$$f_N = \frac{f_e}{2} \quad (5.24)$$

Les relations que nous venons de voir peuvent se traduire par les propriétés suivantes.

1. *L'incrément fréquentiel Δf est l'inverse de la durée temporelle T .*
2. *La période spectrale $f_{max} = f_e$ est l'inverse de l'incrément temporel Δt .*
3. *Le domaine d'analyse spectrale est limité par la fréquence de Nyquist $f_e/2$.*
4. *Pour un nombre donné de points N , il n'est pas possible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et une très bonne définition fréquentielle (Δf petit).*

Une illustration des relations existant entre les domaines temporel et fréquentiel est donnée dans la figure 5.3.

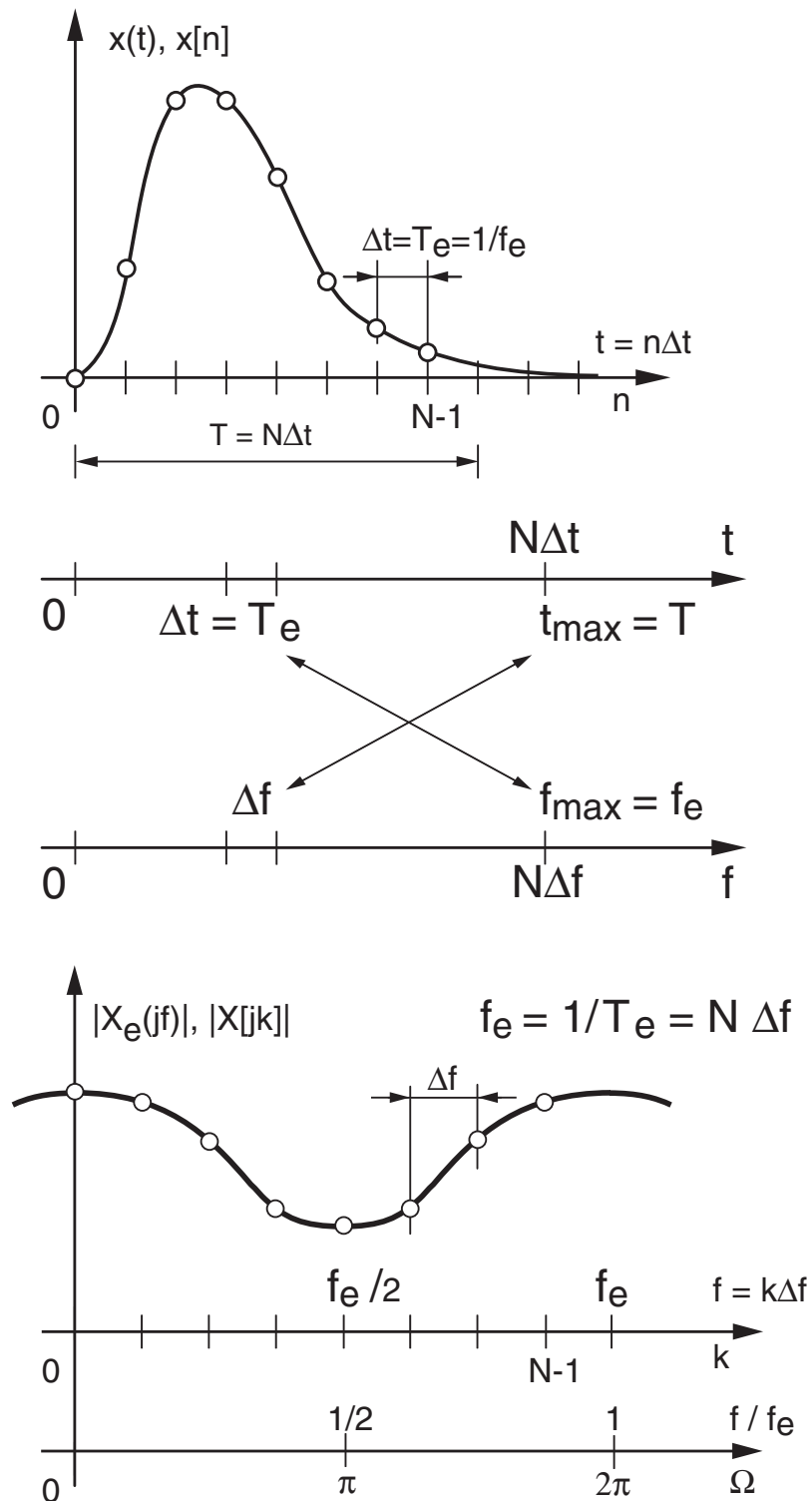


FIG. 5.3.: Relations temps – fréquence

5.2.1. Pulsation normalisée

Dans ce qui précède, on a constamment vu apparaître un phaseur faisant intervenir l'argument $\pm j2\pi n f T_e$:

$$\exp(\pm j2\pi n f T_e)$$

Il est donc naturel de chercher à alléger l'écriture en définissant la pulsation numérique ou normalisée Ω qui s'exprime en radians (figure 5.3) :

$$\Omega \equiv 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e} \text{ [rad]} \quad (5.25)$$

Comme le spectre de base est compris entre $\pm f_e/2$, on voit que la pulsation normalisée prendra ses valeurs entre $\pm\pi$ et que les transformations de Fourier s'écrivent :

$$X_e(j\Omega) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [\text{V sec}] \quad (5.26)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_e(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad [\text{V}] \quad (5.27)$$

5.3. Transformation de Fourier discrète

5.3.1. Définition de la TFD

En observant les relations (5.16) et (5.17), on constate que, mis à part le changement de signe du phaseur et les coefficients précédant la somme, les calculs du spectre $X[jk]$ ou du signal $x[n]$ se font de la même manière. Ceci conduit à définir les algorithmes des transformations de Fourier discrètes directe ou inverse comme suit :

$$X_D[jk] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (5.28)$$

$$x_D[n] \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_D[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5.29)$$

Comme ces deux définitions ne diffèrent que par le signe de l'exponentielle qui pondère les signaux $x[n]$ et $X_D[jk]$, on voit qu'un même algorithme peut être utilisé pour les transformations de Fourier directe et inverse. Alors les résultats de la TFD ainsi définie sont reliés aux spectres et signaux réels par les relations suivantes :

$$X[jk] = T_e \cdot X_D[jk] \quad (5.30)$$

$$x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (5.31)$$

La figure 5.4 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique où l'on a, d'un côté, des signaux et des spectres continus alors que de l'autre, on n'a que des valeurs numériques stockées en RAM.

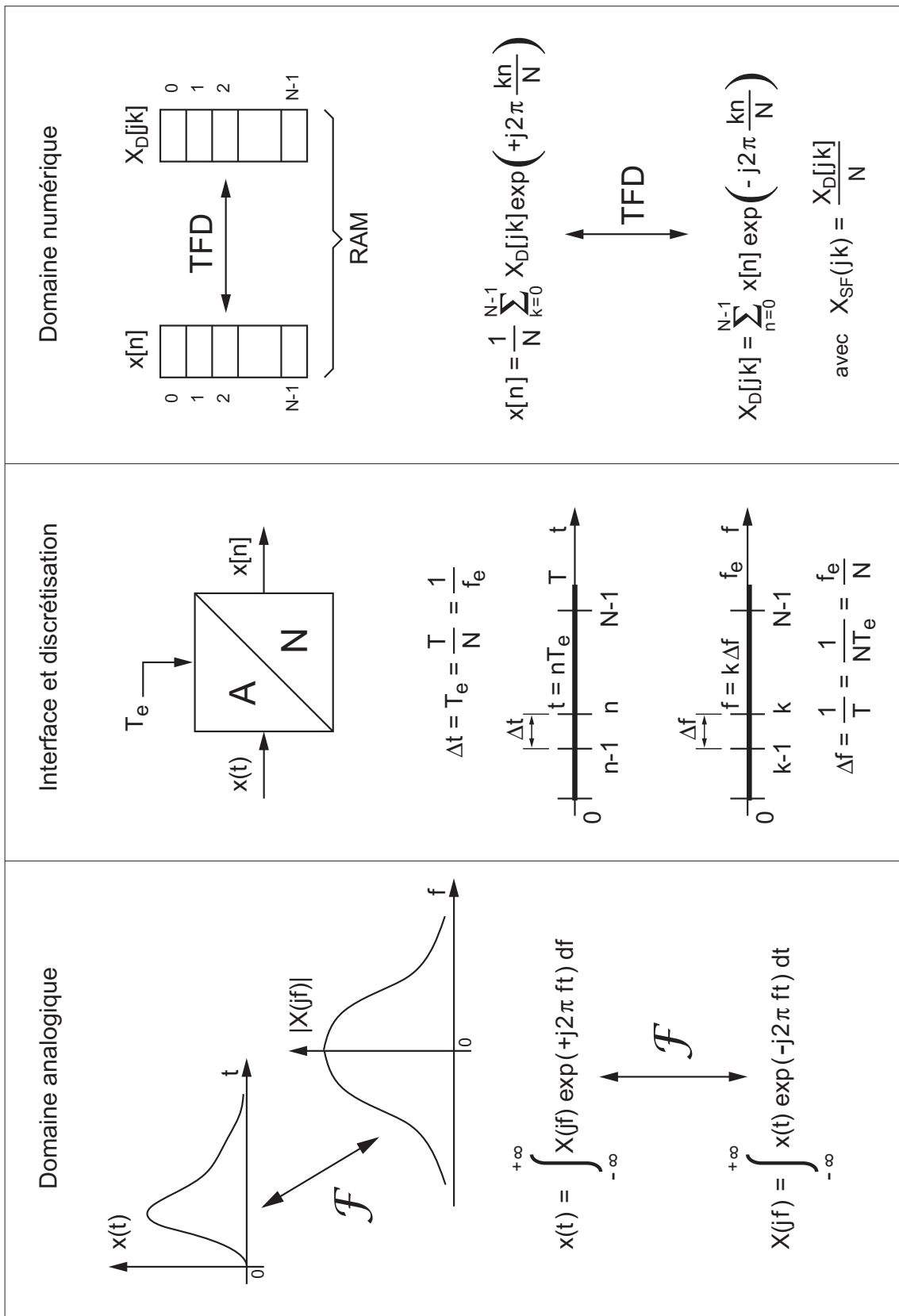


FIG. 5.4.: Illustration des relations entre les domaines analogiques et numériques

5.3.2. TFD d'un signal périodique

Nous avons vu que le passage de la TF à la TFD peut modifier de manière sensible les résultats de l'analyse spectrale à cause de la troncation. Par contre, si le signal temporel $x(t)$ est périodique, on peut se trouver dans la situation idéale où les raies spectrales du signal $x_T(t)$ sont en parfaite coïncidence avec les raies analysées par la TFD. Pour remplir cette condition, il suffit d'enregistrer très exactement une ou plusieurs périodes du signal temporel.

En comparant les définitions de la décomposition en série de Fourier :

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt \quad [V] \quad (5.32)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{SF}[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kt}{T}\right) \quad [V] \quad (5.33)$$

avec celles de la TFD (équations 5.28 et 5.29), on voit alors apparaître les relations suivantes :

$$X_{SF}[jk] = \frac{X_D[jk]}{N} \quad (5.34)$$

$$x_T(t = nT_e) = \frac{x_D[n]}{N} \quad (5.35)$$

5.3.3. Relations entre les domaines analogique et numérique

En conclusion de ce que nous venons de voir, la figure 5.4 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique. On y voit que, du côté analogique, on a des signaux et spectres continus (ou discrets si $x(t)$ est périodique) reliés entre eux par la transformation de Fourier alors que du côté numérique, on n'a que des valeurs numériques stockées en RAM sur lesquelles on travaille avec l'algorithme de la TFD.

L'interface entre les domaines analogique et numérique est réalisée par un échantillonneur qui acquiert les signaux à un rythme fixé par la période d'échantillonnage $T_e \equiv 1/f_e$.

5.3.4. TFD et FFT

La découverte de la transformation rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey [3] a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier et il est généralement désigné par son appellation anglo-saxonne : FFT (Fast Fourier Transform).

Il est aisé de voir que le nombre d'opérations arithmétiques (sommations et produits) nécessitées par la TFD d'une suite de longueur N est proportionnel à N^2 . Ce qui, pour une suite de longueur 1000, conduit à calculer 1'000'000 de sinus et cosinus suivis d'une addition et d'une multiplication; les temps de calcul deviennent très vite prohibitifs..

L'algorithme de la FFT utilise le fait que l'opération de la TFD globale peut être décomposée en la TFD de séquences de plus en plus courtes. Il en découle alors que le nombre total d'opérations est bien inférieur à celui imposé par la simple application de l'algorithme de la TFD. En contrepartie, le nombre de points analysés N doit être une puissance de 2. Le nombre d'opérations demandées par le nouvel algorithme est alors fortement diminué et il vaut

$$N_{op} \simeq N \log_2(N) \quad (5.36)$$

Ainsi, pour transformer 1024 points, le nouvel algorithme demande environ cent fois moins de temps que la TFD :

$$\frac{N^2}{N_{op}} = \frac{N}{\log_2(N)} = \frac{1024}{10} = 102.4$$

Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD. Différents algorithmes de FFT sont présentés dans le livre de Burrus et Parks [3].

5.4. Spectre d'une sinusoïde

Il est important de bien comprendre que, dans toute analyse numérique des signaux, on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal et que cette durée finie peut conduire à des effets indésirables lors de l'analyse.

On a vu que la FFT travaille sur un bloc complet d'échantillons considéré comme périodique. Cela ne pose aucun problème dans le cas d'un signal transitoire si celui a le temps de revenir à 0 avant la fin de l'enregistrement. Par contre, dans le cas de signaux permanents, les choses peuvent se compliquer sensiblement. Pour le voir, considérons deux situations pouvant apparaître lors de l'enregistrement d'un signal périodique tel qu'une sinusoïde.

5.4.1. Le nombre de périodes enregistrées est un entier

La figure 5.5a illustre un enregistrement de durée 10 ms contenant *exactement* 10 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, coïncide avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et aucune modification de l'information n'est introduite.

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Le résultat de l'analyse FFT pour cette situation confirme ce que l'on attend, à savoir que son spectre est constitué d'une raie spectrale bien définie et située en 1 kHz. Les deux raies supplémentaires que l'on peut observer en 3 et 5 kHz sont dues aux distorsions du signal sinusoïdal fourni par le générateur.

5.4.2. Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier

Dans ce cas, la FFT analyse un signal qui possède une transition brusque au raccordement du début et de la fin de l'enregistrement. Cette transition possède un contenu spectral hautes-fréquences qui peut masquer une partie du spectre réel.

La figure 5.5b montre un enregistrement contenant 10.25 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, ne coïncide pas avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et son spectre s'étale dans tout le domaine spectral. Cette dispersion de la puissance du signal dans tout le domaine fréquentiel porte le nom d'*étalement spectral*.

Il est important de réaliser que le phénomène d'étalement spectral est dû à la non-coïncidence des valeurs initiale et finale de la durée enregistrée. Dans le cas de la figure 5.5b, ces effets de bords sont tels qu'ils masquent complètement les composantes spectrales d'ordre 3 et 5 du signal.

Pour éviter ces effets de bords, il faut s'attacher à enregistrer exactement un nombre entier de périodes du signal et, dans le cas où cela n'est pas possible, il faut ramener les deux bords à une valeur identique à l'aide d'une fenêtre qui modifie aussi peu que possible le spectre réel.

5.5. Fenêtres d'observation

5.5.1. Quatre fenêtres usuelles

Les fenêtres utilisées en analyse spectrale sont nombreuses et elles ont été étudiées extensivement par F.J. Harris [2]. On se contente ici de mentionner quatre fenêtres fréquemment appliquées à l'enregistrement d'un signal. Elles sont définies comme suit :

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (5.37)$$

Fenêtre de Hann

$$w_c[n] = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < N \quad (5.38)$$

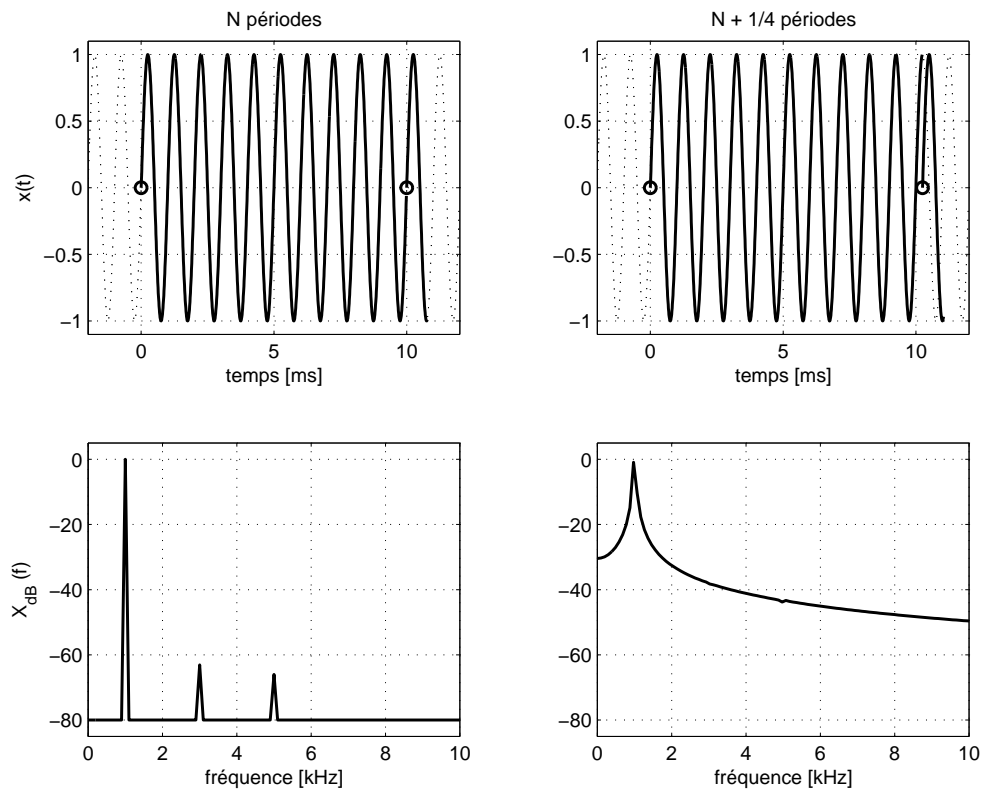


FIG. 5.5.: Signal sinusoïdal et son spectre

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (5.39)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi\frac{n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi\frac{n}{N}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (5.40)$$

5.5.2. Effet d'une fenêtre

Pour bien saisir l'effet des fenêtres dans le domaine spectral, on considère ici les deux situations présentées plus haut auxquelles on appliquera les fenêtres de Hann, de Hamming et de Blackman (figure 5.7).

Le nombre de périodes enregistrées est un entier Dans ce cas idéal (figure 5.7a), on peut relever quelques différences spectrales légères.

1. Les raies spectrales du signal original sont également présentes quelle que soit la fenêtre choisie.

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

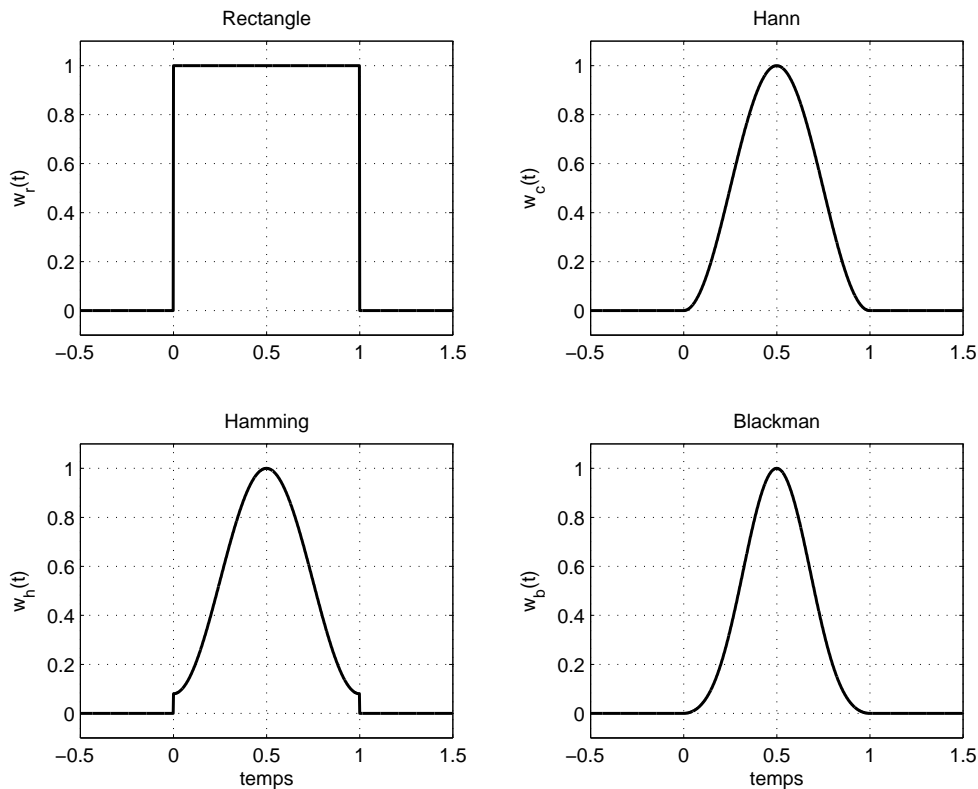


FIG. 5.6.: Fenêtres d'observation

2. Grâce au maintien d'une légère discontinuité temporelle, la fenêtre de Hamming offre les raies spectrales les plus étroites.
3. La fenêtre de Blackman qui est la plus étroite temporellement, fournit, comme attendu, des raies spectrales plus larges.

Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier Dans la figure 5.7b, on a repris l'enregistrement contenant 10.25 périodes. Les résultats spectraux obtenus montrent à l'évidence l'effet de ces 3 fenêtres :

1. la fenêtre de Hann fournit un spectre tout à fait satisfaisant sans diminuer fortement l'étalement spectral ; c'est pourquoi le spectre est un peu large à la base ;
2. la fenêtre de Hamming fournit un spectre étroit mais, à cause de l'effet de bord résiduel, l'étalement spectral n'est pas suffisamment réduit et il masque les deux autres composantes spectrales ;
3. la fenêtre de Blackman donne le meilleur résultat grâce à la double cosinusoïde qui masque bien les effets de bord ; les raies spectrales sont alors étroites et bien définies.

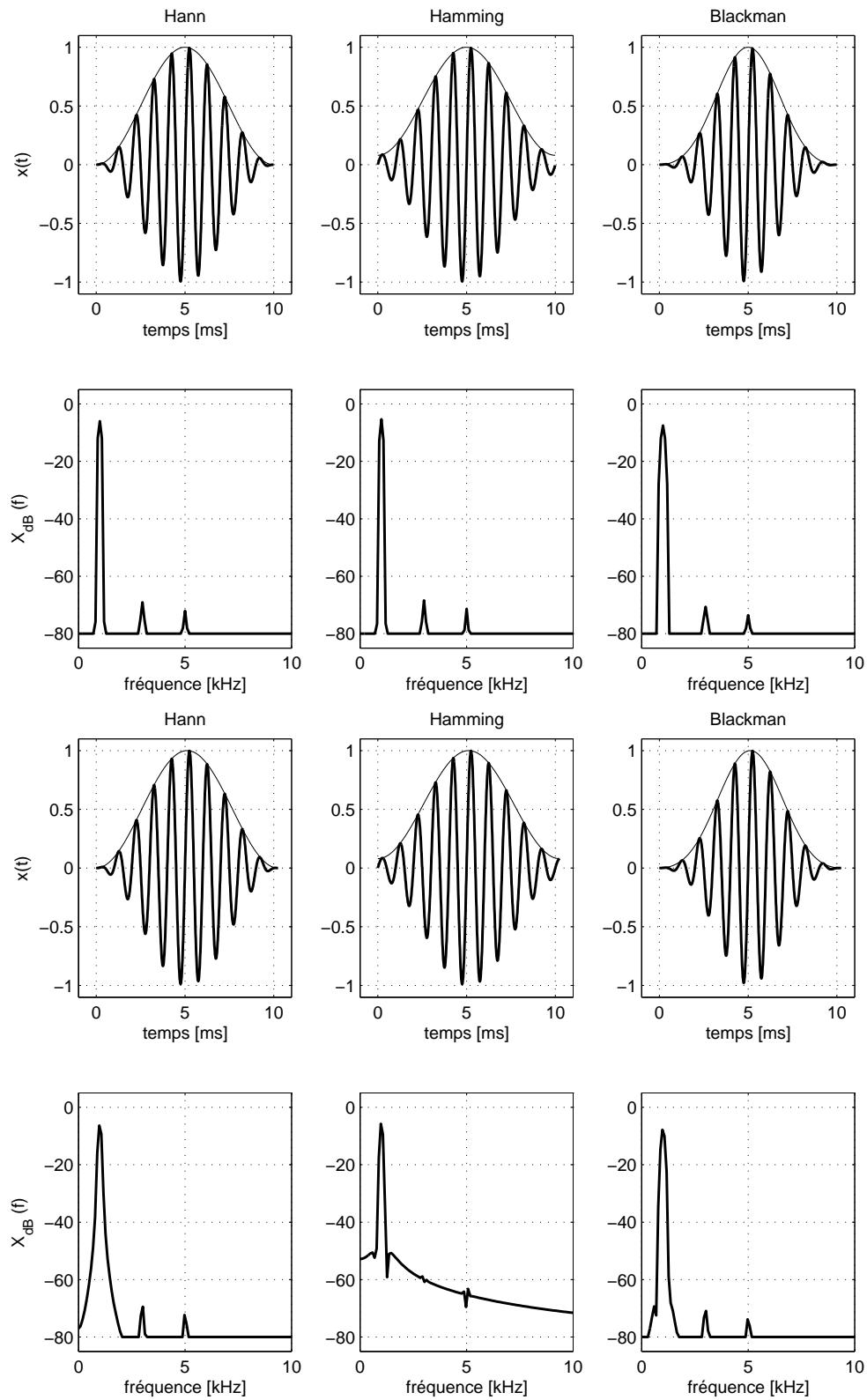


FIG. 5.7.: Effet des fenêtres d'observation avec : (a) 10 périodes entières ; (b) 10.25 périodes

5.5.3. Choix d'une fenêtre

Le choix d'une fenêtre est un compromis entre une bonne définition spectrale (spectre étroit) et un étalement spectral aussi faible que possible (douceur de la fenêtre). Qualitativement, leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit.

1. La *fenêtre rectangulaire* ne modifie pas l'enregistrement ; c'est celle que l'on utilisera dans le cas de **signaux transitoires ou non permanents** et, dans le cas de signaux périodiques, lorsque l'on est sûr que le nombre de périodes enregistrées est un entier.
2. La *fenêtre en cosinus*, dite de Hann, est mathématiquement la plus simple et elle offre de bons résultats dans le cas de **composantes spectrales pas trop proches**.
3. La *fenêtre en cosinus relevé*, dite de Hamming, n'élimine pas complètement l'étalement spectral. Elle offre en contre partie une **meilleure définition spectrale** mais ne permet pas de voir des composantes spectrales de faibles amplitudes.
4. La *fenêtre de Blackman*, constituée de deux cosinus, atténue très fortement les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des **raies spectrales proches et de faibles amplitudes**.

5.6. Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

Données On considère ici un signal temporel fortement bruité (SNR $\simeq 0$ dB) qui semble contenir une oscillation périodique dont on souhaite connaître la teneur (figure 5.8).

Analyse temporelle De l'enregistrement, on tire

1. la composante DC du signal et sa valeur efficace AC

$$X_{dc} = 0.045 \quad X_{ac} = 1.42$$

2. la période d'échantillonnage T_e et sa durée T

$$T_e = 20 \mu s \quad T = 20 \text{ ms}$$

3. le domaine d'analyse spectrale f_N et la définition spectrale Δf

$$f_N = \frac{1}{2} f_e = \frac{1}{2T_e} = 25 \text{ kHz} \quad \Delta f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

5.6. Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

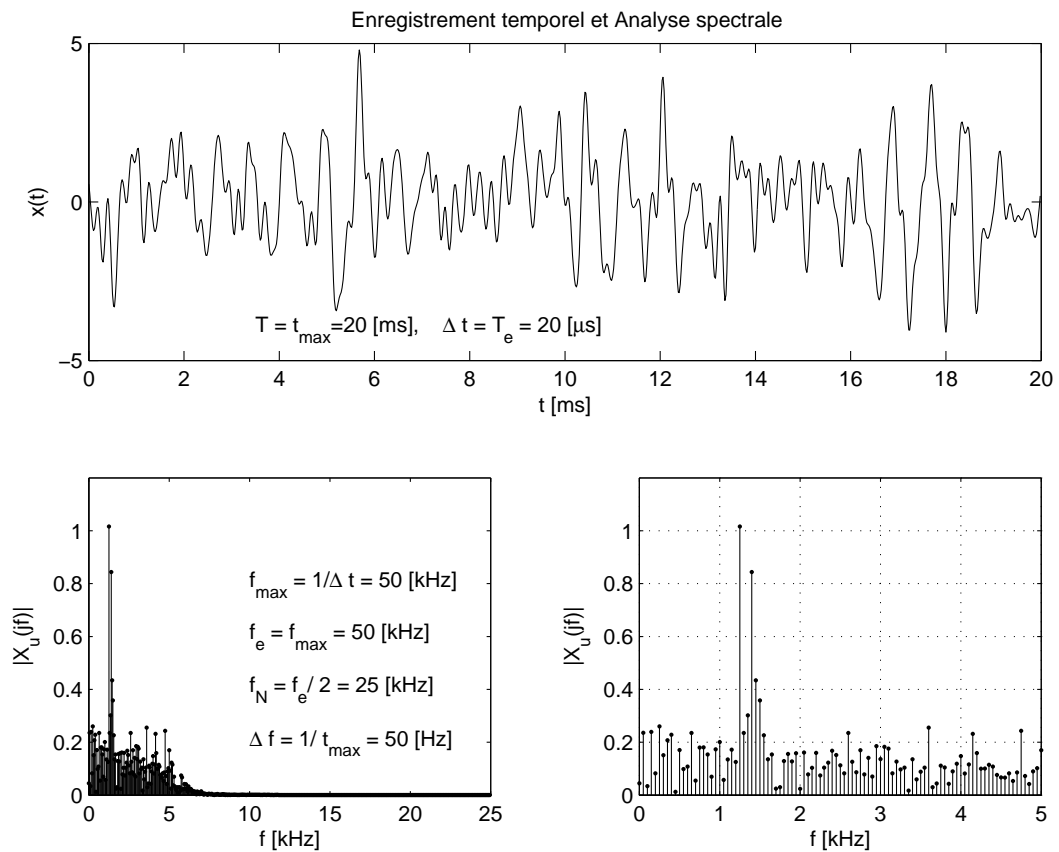


FIG. 5.8.: Illustration de l'analyse spectrale avec :

- a) l'enregistrement temporel ;
- b) son spectre d'amplitudes pour $0 \leq f \leq f_e/2 = 25$ kHz ;
- c) un zoom spectral entre 0 et 5 kHz

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Analyse spectrale Le programme des calculs temporels et spectraux se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```
% lecture de l'enregistrement
enreg = load('enreg.txt');
tt = enreg(:,1);
xt = enreg(:,2);
Xdc = mean(xt)
Xac = std(xt)

% analyse temporelle
Npts = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1)
duree = Npts * dt

% analyse spectrale
df = 1/duree, fmax = 1/dt
ff = 0 :df :fmax-df;
Xjf = fft(xt)/Npts;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(Npts/2);
fk = ff(1 :Ndemi);
Ak = 2*abs(Xjf(1 :Ndemi));
Ak(1) = abs(Xjf(1)); % composante DC
ak = angle(Xjf(1 :Ndemi));
subplot(2,1,1); stem(f,Ak,'.');

% estimation du rapport signal/bruit (SNR)
Px = Xdc^2 + Xac^2; % puissance du signal + bruit = 2.023
A1 = 1.02; A2 = 0.85; % amplitudes mesurées
Px0 = (A1^2 + A2^2)/2; % puissance du signal original = 0.88
Pn = Px - Px0; % puissance du bruit = 1.14
SNR = 10*log10(Px0/Pn) % SNR = -1.12
```

Les spectres d'amplitudes, présentés dans la figure 5.8, montrent que deux raies spectrales s'élèvent clairement au-dessus du niveau de bruit situé aux environs de 0.3. Ces deux raies spectrales ont une amplitude et une fréquence valant respectivement

$$A_1 \simeq 1.02 \quad f_1 = 1.25 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

$$A_2 \simeq 0.85 \quad f_2 = 1.40 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

La précision des fréquences mesurées est égale à la moitié de la définition spectrale Δf .

5.7. Exemple 2 : reconstruction d'un signal

Données Afin d'analyser et illustrer les résultats fournis par la TFD, on considère ici un signal connu

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \pi/4)$$

constitué de trois sinusoïdes d'amplitudes

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -0.8 \quad A_3 = 0.5$$

et de fréquences harmoniques

$$f_1 = 50 \text{ Hz} \quad f_2 = 150 \text{ Hz} \quad f_3 = 250 \text{ Hz}$$

Ce signal original est perturbé par un bruit important car le SNR ne vaut que +5dB. Le but de cet exemple est de montrer que, malgré la présence d'un fort bruit, il est possible de retrouver le signal original.

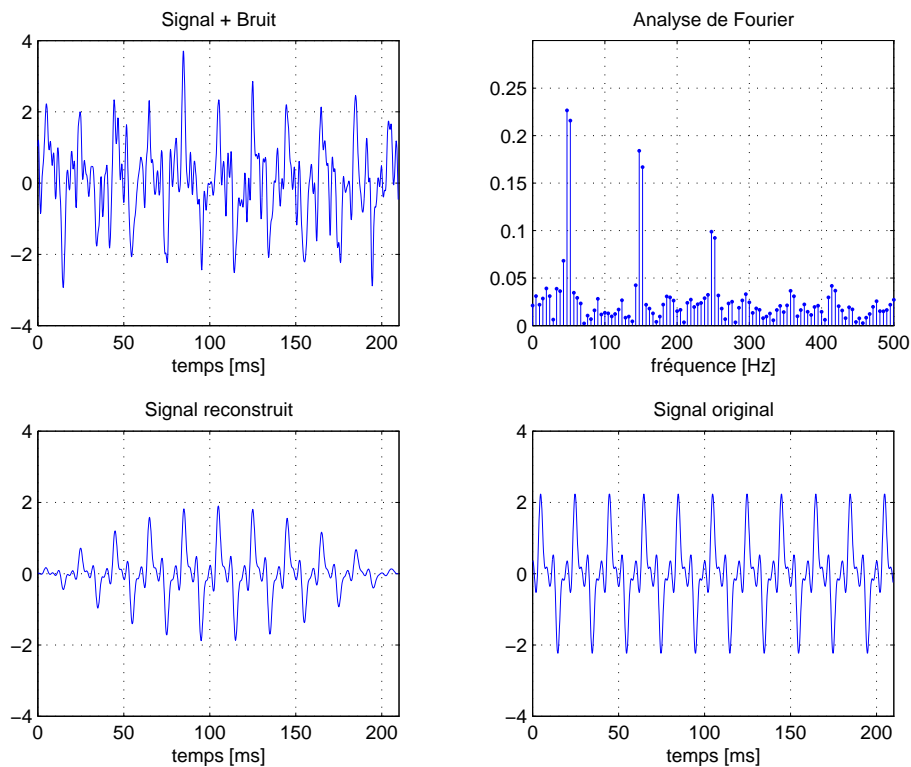


FIG. 5.9.: Analyse spectrale et extraction des signaux

Analyse temporelle Le signal bruité a été enregistré avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.2 \text{ ms}$ et il a une durée $T = 210 \text{ ms}$ (figure 5.9a). Ceci permet de prévoir que le domaine des fréquences est caractérisé par :

– la fréquence de Nyquist

$$f_N = \frac{f_e}{2} = 2500 \text{ Hz}$$

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

– la définition spectrale

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{210 \text{ ms}} = 4.76 \text{ Hz}$$

On notera que la durée d'analyse $T = 210 \text{ ms}$ conduit à une définition spectrale $\Delta f = 4.76 \text{ Hz}$ qui n'est pas un sous-multiple des composantes spectrales. Cela fait que l'on sera dans l'impossibilité de trouver la valeur exacte des fréquences originales. Idéalement, on aurait dû prendre une durée de 200 ms permettant ainsi d'avoir une définition spectrale de 5 Hz .

Analyse spectrale L'observation du spectre obtenu après fenêtrage (figure 5.9b) montre que les trois raies spectrales sont bien visibles. Mais, on doit cependant constater que ces raies se sont dédoublées à cause de la définition spectrale non-entière et de l'utilisation de la fenêtre d'observation.

Le programme donné ci-dessous permet de rechercher ces raies spectrales. Les fréquences mesurées à $\pm 2.4 \text{ Hz}$ près sont

$$f_{11} = 47.6 \text{ Hz} \quad f_{12} = 52.4 \text{ Hz}$$

$$f_{21} = 147.6 \text{ Hz} \quad f_{22} = 152.4 \text{ Hz}$$

$$f_{31} = 247.6 \text{ Hz} \quad f_{32} = 252.4 \text{ Hz}$$

Leurs amplitudes et phases respectives valent

$$\begin{array}{llll} A_{11} = 0.453 & A_{12} = 0.432 & \alpha_{11} = -0.151 \text{ rad} & \alpha_{12} = +2.98 \text{ rad} \\ A_{21} = 0.368 & A_{22} = 0.334 & \alpha_{21} = -2.87 \text{ rad} & \alpha_{22} = -0.275 \text{ rad} \\ A_{31} = 0.198 & A_{32} = 0.185 & \alpha_{31} = +0.372 \text{ rad} & \alpha_{32} = -2.65 \text{ rad} \end{array}$$

avec

$$A_k = 2 |X(jk)| \quad \alpha_k = \angle X(jk)$$

Reconstruction du signal original Connaissant les amplitudes et phases des composantes spectrales, il est aisé de reconstruire le signal non bruité :

$$x_r(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \alpha_k)$$

Malgré l'effet de la fenêtre d'observation utilisée avant d'effectuer la FFT et le fait qu'il y ait six fréquences au lieu de trois, le signal ainsi extrait (figure 5.9c) reproduit assez bien l'allure du signal original (figure 5.9d).

Programme d'analyse et recherche des composantes spectrales Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```

% signal bruité
yt = xt+nt;
Npts = length(yt);

% analyse spectrale avec une fenêtre de Hann
yht = yt'.*hann(Npts);
Yjf = fft(yht)/Npts;
df = 1/tmax; fmax = 1/dt;
ff = 0 :df :fmax-df;

% recherche de N raies spectrales
Nraies = 6;
Yjf_tempo = Yjf(1 :end/2);
for kn = 1 :Nraies
    [Ymax, kf(kn)] = max(abs(Yjf_tempo));
    Yjf_tempo(kf(kn)) = 0; % mise à zéro de la valeur trouvée
end;

% reconstruction
xtr = zeros(size(yt));
for kn = 1 :Nraies
    Xrjf = Yjf(kf(kn)); fr = ff(kf(kn));
    xtr = xtr + Xrjf*exp(+j*2*pi*fr*tt) + Xrjf'*exp(-j*2*pi*fr*tt);
end;

% valeurs des composantes spectrales
fr = ff(kf)';
Ar = 2*abs(Yjf(kf))
ar = angle(Yjf(kf))

```

5.8. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

5.8.1. Données

On considère ici un signal permanent observé à l'oscilloscope. À partir de l'observation visuelle du signal, on désire choisir les paramètres d'acquisition qui permettront ensuite d'extraire toutes les informations possibles. L'acquisition se fera avec un convertisseur analogique-numérique 8 bits ± 2 V.

5.8.2. Signal temporel

Le signal $x(t)$ observé à l'oscilloscope (figure 5.10a) apparaît comme une sinusoïde caractérisée par son amplitude $A \simeq 1.7$ V et sa période $T_0 \simeq 3.68$ msec. Cependant, une observation de plus longue durée (figure 5.10b) montre un phénomène de

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

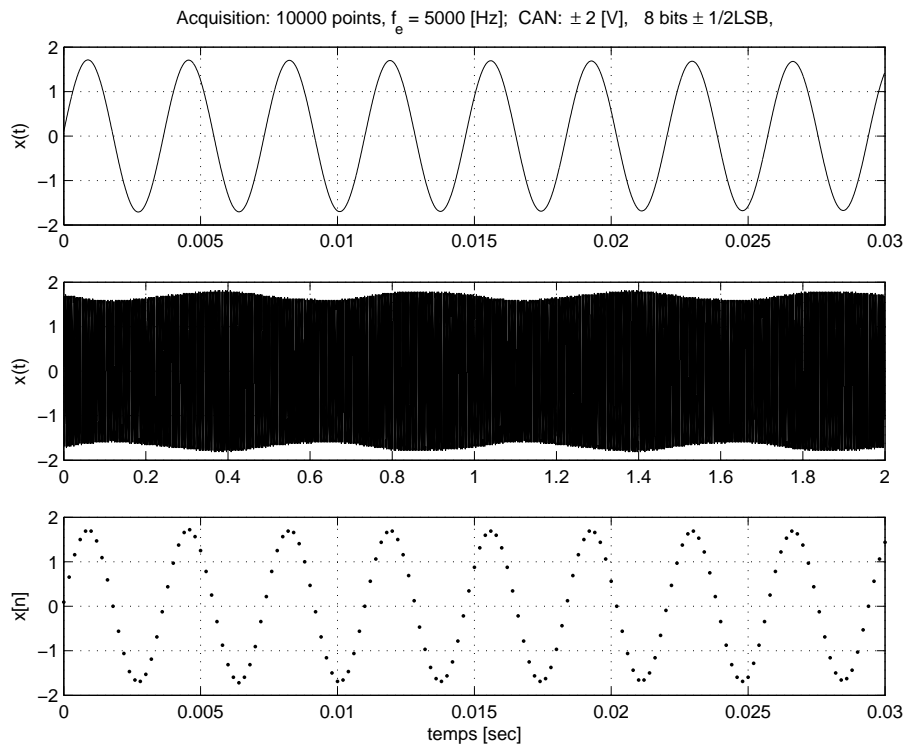


FIG. 5.10.: Signal analysé

battement de période $T_b \simeq 0.45$ sec ou de fréquence

$$f_b = \frac{1}{T_b} \simeq 2.2 \text{ Hz}$$

On en déduit que ce signal est composé d'au moins deux sinusoïdes de fréquences très proches

$$f_1 \simeq \frac{1}{T_0} \simeq 272 \text{ Hz} \quad f_2 = f_1 \pm f_b \simeq 270 \text{ ou } 274 \text{ Hz}$$

et d'amplitudes fort différentes car la variation d'amplitude de $x(t)$ est faible.

5.8.3. Paramètres d'acquisition

Afin d'avoir une définition temporelle raisonnable, on choisit

$$\Delta t \equiv T_e \simeq \frac{T_0}{10} = 0.35 \text{ msec} \simeq 0.2 \text{ msec}$$

et on en déduit la fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} = 5 \text{ kHz}$$

La figure 5.10c présente une partie du signal numérique ainsi acquis.

5.8. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

Comme il faut pouvoir distinguer deux raies distantes de $f_b \simeq 2$ Hz, on choisira une définition spectrale suffisamment fine

$$\Delta f \simeq \frac{f_b}{4} = 0.5 \text{ Hz}$$

Sachant que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à la durée d'acquisition, on en tire

$$t_{acq} = \frac{1}{\Delta f} = 2 \text{ sec}$$

Le nombre de points acquis vaudra donc

$$N_{pts} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} = \frac{1}{0.5 \text{ Hz} \cdot 0.2 \text{ ms}} = 10'000$$

L'ensemble des valeurs acquises est représenté à la figure 5.10b.

5.8.4. Analyse spectrale

Utilisation de la FFT On a vu plus haut que l'algorithme FFT exige un nombre de points égal à une puissance de 2. Lorsque cela n'est pas le cas, on complète la suite de valeurs acquises par une succession de zéros permettant d'atteindre un nombre de valeurs égal à la puissance de 2 la plus proche (figure 5.11a).

Du point de vue de l'analyse de Fourier, cela ne change rien aux résultats fournis ; seule la résolution spectrale est améliorée. Dans notre cas, on passera donc de $N_{pts} = 10'000$ à $N_{fft} = 16'384$ et la résolution fréquentielle passera ainsi de

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{5000}{10'000} = 0.5 \text{ Hz}$$

à

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{fft}} = \frac{5000}{16'384} = 0.305 \text{ Hz}$$

Fenêtre rectangulaire Dans ce cas, l'analyse spectrale de la suite de valeurs acquises $x[n]$ fournit les spectres présentés dans les figures 5.11b et 5.13a). Le spectre ainsi obtenu fait apparaître une seule raie spectrale aux environs de 270 Hz et, contrairement à ce que l'on attendait, il n'y a pas de deuxième raie spectrale. Manifestement, celle-ci est masquée par l'étalement spectral dû à la fenêtre rectangulaire.

Fenêtre de Blackman On est donc amené à fenêtrer le signal acquis en le multipliant par une fonction atténuant les effets de bord dus à l'acquisition effectuée. On choisit ici d'utiliser la fenêtre de Blackman définie comme suit :

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N_{pts}$$

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

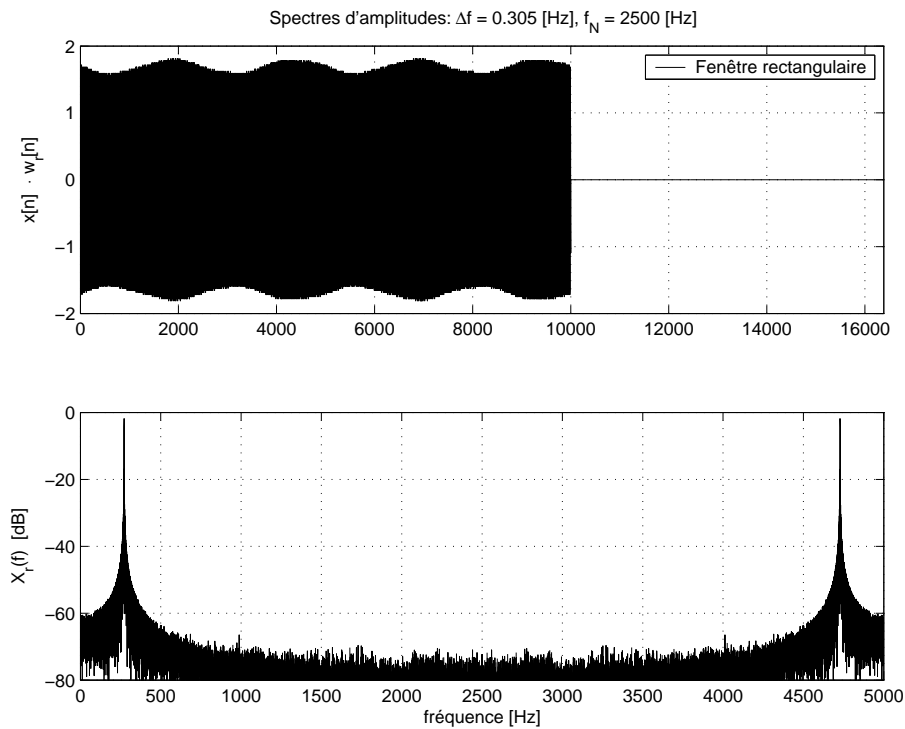


FIG. 5.11.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre rectangulaire

Du point de vue numérique, on analysera donc le signal

$$x_w[n] = x[n] \cdot w_b[n]$$

Après avoir complété le signal fenêtré par des zéros pour atteindre une puissance de 2 (figure 5.12a), on obtient les résultats présentés dans les figures 5.12b et 5.13b où le niveau de bruit causé par l'étalement spectral a pratiquement disparu.

Zoom fréquentiel Étant donné la haute définition spectrale, obtenue au prix d'un long enregistrement, les échelles globales ne permettent pas de voir le détail des raies attendues. Il faut donc zoomer sur la zone intéressante. On voit alors très nettement que la fenêtre rectangulaire (figure 5.13a) est totalement incapable de fournir les informations attendues alors qu'avec la fenêtre de Blackman (figure 5.13b), on retrouve bien la deuxième fréquence recherchée et on peut même apercevoir la présence d'une troisième composante spectrale d'amplitude encore plus faible, qui n'était absolument pas perceptible au niveau temporel.

5.8.5. Estimation des amplitudes

Le spectre d'amplitudes de la figure 5.13b permet de mesurer les fréquences des trois composantes spectrales du signal $x(t)$ et les amplitudes relatives des raies spectrales.

5.8. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

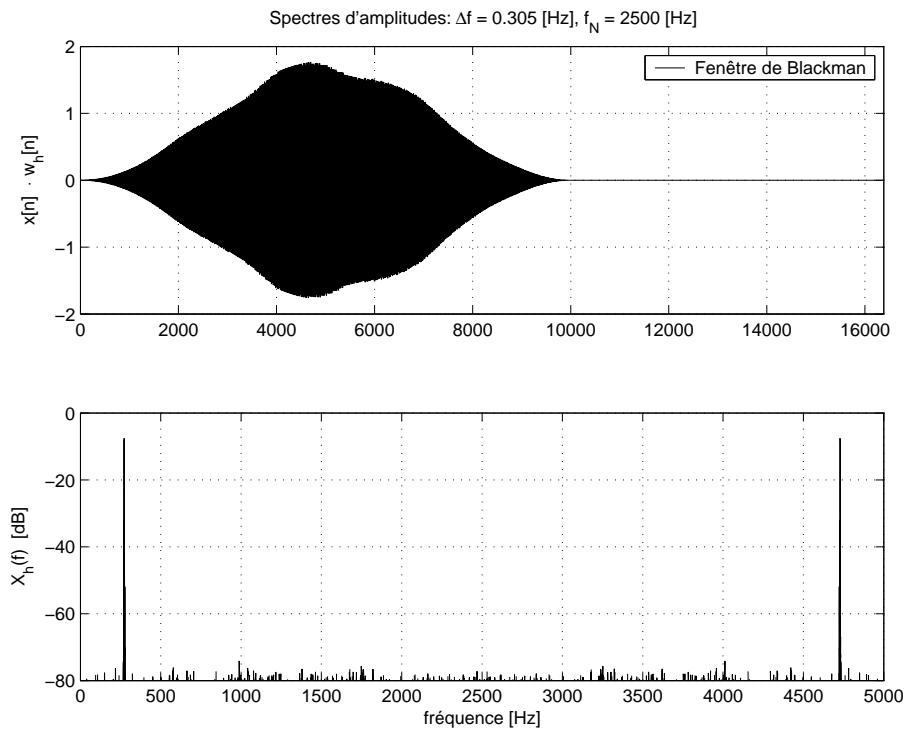


FIG. 5.12.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre de Blackman

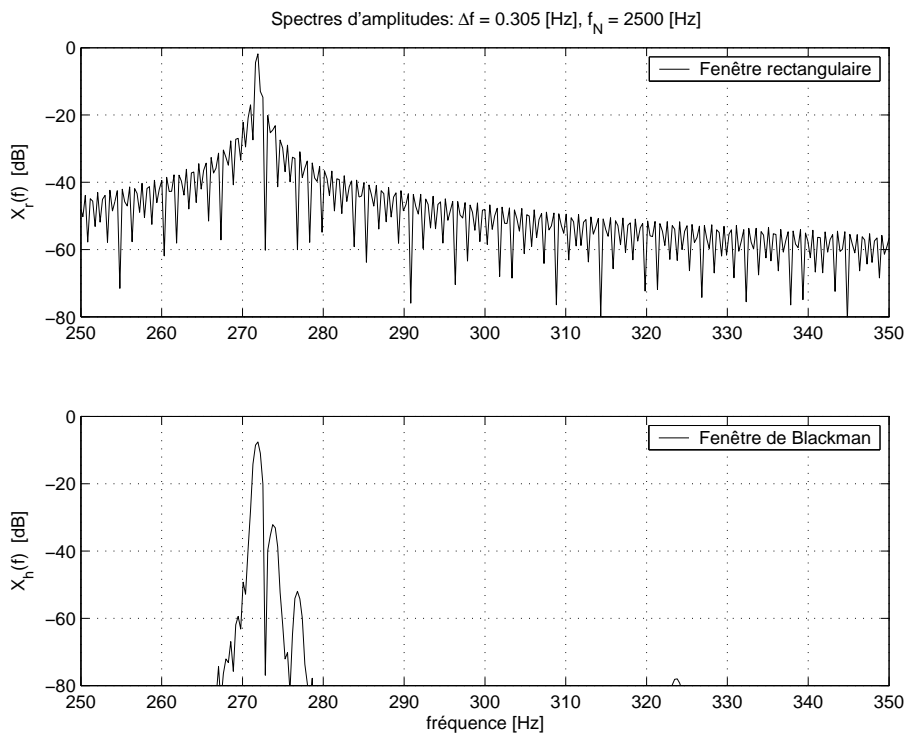


FIG. 5.13.: Agrandissement spectral

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

k	f_k	$X_{k,dB}$	$X_{k,dB} - X_{1,dB}$	X_k/X_1
1	272 Hz	-7.6	0	1
2	274 Hz	-32.2	-24.6	0.059
3	277 Hz	-52	-44.4	0.006

Il est important de noter que les amplitudes spectrales dépendent de la fenêtre choisie et que seules leurs valeurs relatives peuvent en être déduites

$$\frac{X_k}{X_1} = 10^{(X_{k,dB} - X_{1,dB})/20}$$

Pour obtenir la valeur réelle des amplitudes, on peut passer par l'égalité de Parseval :

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T x_{ac}^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} \left(1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \right)$$

Ce qui donne dans notre cas

$$P_{ac} = \frac{A_1^2}{2} (1 + 0.059^2 + 0.006^2) = 1.00352 \frac{A_1^2}{2}$$

À partir du signal acquis, on calcule aisément sa puissance :

$$P_{ac} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \mu_x)^2 = \text{var}(x[n]) = 1.45$$

On en déduit alors la valeur de A_1 et celles des autres composantes :

$$A_1 = \sqrt{\frac{2 P_{ac}}{1.00352}} = 1.70$$

$$A_2 = 0.059 A_1 = 0.1$$

$$A_3 = 0.006 A_1 = 0.01$$

Remarque Une correction des amplitudes spectrales tenant compte de la fenêtre utilisée n'est possible que *si le signal acquis possède exactement un nombre entier de périodes*. Si cette condition est remplie, il suffit alors de diviser les amplitudes spectrales par la valeur moyenne de la fenêtre : $A_k \rightarrow A_k/\mu(w)$. Ce calcul doit être évité si l'on n'est pas sûr que la condition est remplie.

5.8.6. Détail du calcul des signaux et des spectres

Le fichier créé pour générer le signal $x(t)$, calculer et tracer les spectres dans différentes conditions est donné ci-dessous. Bien qu'il puisse paraître volumineux au premier abord (beaucoup de lignes sont consacrées au traçage uniquement), les parties essentielles de ce fichier sont simplement :

5.8. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

1. la conversion analogique- numérique $\pm 2\text{ V}$ avec $N_{bits} \pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité (on admet que celle-ci entraîne la perte d'un bit) :

```
· Ucan = 4; Nbits = 8;  
· xn = Ucan*round((xn0/Ucan)*(2^(Nbits-1)))/(2^(Nbits-1));
```

2. le fenêtrage :

```
· wh = (blackman(length(xn)))';  
· xnwh = xn.*wh;
```

3. l'ajout de zéros et le calcul du spectre :

```
· Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)));  
· xnwh = [xnwh, zeros(1,Nfft-length(xn))];  
· Xjfh = fft(xnwh)/length(xnwh);
```

Initialisation Le programme débute par l'initialisation des paramètres et la création du signal vu sur l'écran de l'oscilloscope

```
% analyse spectrale  
clear all; close all; format compact; clc;  
  
% parametres du signal  
amp1 = 1.7; amp2 = 0.1; amp3 = 0.01;  
f1 = 271.828; f2 = f1+2; f3 = f1+5;  
% oscilloscope  
tosc = 0.03; kosc = 2000;  
dt = tosc/kosc;  
tt = 0 :dt :tosc-dt;  
xt0 = amp1*sin(2*pi*tt*f1)+amp2*cos(2*pi*tt*f2)+amp3*sin(2*pi*tt*f3);
```

Acquisition numérique Il se poursuit avec l'acquisition et la conversion sur une durée plus longue

```
% acquisition  
tacq = 2;  
Te = 0.2e-3;  
tn = 0 :Te :tacq-Te;  
xn0 = amp1*sin(2*pi*tn*f1)+amp2*cos(2*pi*tn*f2)+amp3*sin(2*pi*tn*f3);  
% conversion +/- 2V avec Nbits et +/- 1/2LSB de non linearite  
Ucan = 4; Nbits = 8;  
xn = Ucan*round(xn0/Ucan*2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1);
```

Calcul des spectres Une fois les signaux acquis, on peut calculer leurs spectres et afficher des informations

```
% calcul des spectres  
Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)))  
% fenetres rectangulaire et de Blackman  
wr = ones(size(xn));
```

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
wh = (blackman(length(xn)))';
xnwr = xn.*wr;
xnwh = xn.*wh;
% ajout de zeros
xnwr = [xnwr, zeros(1,Nfft-length(xnwr))];
xnwh = [xnwh, zeros(1,Nfft-length(xnwh))];
% fft
Xjfr = fft(xnwr)/length(xn);
Xjfh = fft(xnwh)/length(xn);
% domaine spectral
fmax = 1/Te;
df = fmax/Nfft;
ff = 0 :df :fmax-df;
% infos
Nbits, tacq, Te, fmax, df
Pac = var(xn)
Npoints = round(tacq/Te), Nfft
```

Graphes On trace les signaux acquis

```
% graphes temporels
figure;
subplot(3,1,1);
plot(tt,xt0); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
texte = ['Acquisition : ', num2str(round(tacq/Te)), ' points,'];
texte = [texte, ' f_e = ', num2str(1/Te,4), ' [Hz];'];
texte = [texte, ' CAN : \pm ', num2str(Ucan/2,2), ' [V], '];
texte = [texte, ' ', num2str(Nbits,2), ' bits \pm 1/2LSB,'];
title(texte);
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2)
plot(tn,xn); grid;
axis([0,tacq,-2,2])
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,3); % zoom
plot(tn,xn, '.'); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
ylabel('x[n]');
xlabel('temps [sec]');
print -deps ansptemps.eps
```

ainsi que les spectres après fenêtrage

```
% spectres
figure; % fenetre rectangulaire
subplot(2,1,1);
plot(xnwr); grid;
axis([0,Nfft,-2,2])
```

5.8. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

```
texte = ['Spectres d'amplitudes : \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_r[n]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_r(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwr.eps
figure; % fenetre de Blackman
subplot(2,1,1);
plot(xnwh); grid;
axis([0,Nfft,-2,2])
texte = ['Spectres d'amplitudes : \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_h[n]');
legend('Fenêtre de Blackman');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps ansphw.eps
```

Zoom Les détails sont mis en évidence

```
% zoom spectral
fz1 = 250; fz2 = 350; % domaine interessant
dbmax = 80;
figure;
subplot(2,1,1);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); hold on;
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
title(texte);
ylabel('X_r(f) [dB]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh)));
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
legend('Fenêtre de Blackman');
print -deps anszoom.eps
```

5.9. Exercices

TFD 0

1. Montrez que le passage de l'analogique vers le numérique se fait bien avec les deux relations discrètes $X[jk]$ et $x[n]$ de la figure 5.4.
2. Considérant la suite de quatre valeurs $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$, calculez son spectre $X[jk]$. Dessinez la suite $x[n]$ et un signal analogique périodique $x(t)$ lui correspondant.
3. Calculez le signal périodique $x_F(t)$ correspondant à la suite $x[n]$ au sens de Fourier.

TFD 1

L'analyse spectrale, par la FFT, d'un signal $x[n]$ constitué de $N = 8$ valeurs a fourni le spectre discret $X_D[jk]$ partiellement donné dans le tableau ci-dessous.

1. Complétez le tableau sachant que $f_e = 1$ [kHz].
2. Le signal temporel $x_N[n]$ est-il continu, discret, périodique ?
3. Que vaut $x_N[n = 0]$?
4. Quelle est l'expression de $x_N[n]$?
5. Tracez $x_N[n]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_D[jk]$	4	$2+j$	$3+2j$	j	2						
$ X_D[jk] $											
$\angle X_D[jk]$											
f [kHz]											

TFD 2 On souhaite calculer le spectre d'une impulsion rectangulaire de largeur $\Delta t = 3$ [msec] et d'amplitude $A = 5$ [V]. Pour ce faire, on acquiert 8 points à la fréquence $f_e = 1$ [kHz].

1. Admettant que l'échantillonnage commence à l'apparition du flanc montant, dessinez $x(t)$ et $x[n]$. Discutez les valeurs choisies pour $x[n]$ lorsque $n = 0$ et $n = 3$.

2. Que vaut la durée d'acquisition t_{max} ?
3. Quel sera le domaine spectral analysé ; que vaudra l'incrément de fréquence Δf ?
4. Calculez $X_D[jk]$ pour $k = 0$ et $k = 2$; quel est le domaine de variation du compteur k des fréquences ?
5. Validez votre résultat en analysant la valeur de $X_D[jk = 0]$.

TFD 3 Considérant la suite de valeurs $x[n]$ ci-dessous :

1. Esquissez $x[n]$ et une fonction $x(t)$ passant par ces points.
2. Calculez $X_D[jk]$; sa valeur dépend-elle de la longueur $N = 2m$ de la suite ?
3. Qu'est ce qui change si on ajoute des zéros pour doubler le nombre d'échantillons ?

n	-m	-m+1	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...	+m-1
x[n]	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0

TFD 4 Considérant un signal $x(t) = \cos(2\pi 1000 t) + \cos(2\pi 2000 t)$ échantillonné pendant une période à la fréquence $f_e = 8 f_0$:

1. Dessinez la suite de valeurs $x[n]$.
2. Justifiez les résultats du tableau ci-dessous fournis par la la FFT puis précisez la relation existant avec ceux fournis par la décomposition en série de Fourier.
3. On échantillonne le signal $x(t)$ sur 4 périodes ; que donnera la FFT ?

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$X_D[jk]$	0	4	4	0	0	0	4	4

TFD 5 On échantillonne avec une période d'échantillonnage $T_e = 1$ [msec] une exponentielle décroissante

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \epsilon(t)$$

où $A = 5$ [V], $\tau = 5$ [msec].

1. Que vaut la densité spectrale $X(jf)$ du signal $x(t)$?
2. Calculez la suite des valeurs $x[n]$; exprimez la sous la forme $x[n] = A \cdot r^n$.
3. Calculez la TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$.

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

4. On ne prend en compte que les 16 premières valeurs de la suite $x[n]$ et on annule les autres ; que vaut $X_{e,N}(jf)$.
5. Considérant la suite temporelle tronquée $x_N[n]$ avec $N = 16$, on discrétise l'axe des fréquences. Que vaut l'incrément fréquentiel ? Calculez le spectre discret $X_D[jk]$.
6. Que valent, pour chacun des spectres ci-dessus ($X(jf)$, $X_e(jf)$, $X_{e,N}(jf)$, $X_D[jk]$), les composantes spectrales lorsque $f = 0$?

AnSp 0 On considère le signal

$$x(t) = 1 + 5 \sin(2\pi f_a t) + 2 \sin(2\pi f_b t), \quad f_a = 1 \text{ [kHz]}, \quad f_b = 1.5 \text{ [kHz]}$$

1. Quelle est la période de ce signal ? Dessinez le spectre unilatéral de $x(t)$. Que valent X_{dc} et X_{ac} ?
2. Son enregistrement a été effectué avec une période d'échantillonnage de 125 μsec pendant exactement 10 msec.
 - a) Quel sera le domaine d'analyse spectrale et sa résolution.
 - b) Pensez-vous devoir utiliser une fenêtre d'observation ? Si oui, laquelle choisissez-vous et pourquoi ?
 - c) Les raies spectrales fournies par la FFT seront-elles situées aux fréquences attendues ? Sinon, précisez la valeur de ces fréquences.
3. Idem 2), si l'enregistrement a duré exactement 11 msec.

AnSp 1 Lors de l'analyse spectrale d'un signal échantillonné $x[n]$, les paramètres N , T_e , t_{max} et f_e , Δf sont reliés entre eux ; la donnée de deux d'entre eux suffit pour fixer tous les paramètres de l'analyse. Rappelez ces relations puis complétez le tableau ci-dessous.

N	T_e	t_{max}	Δf	f_e
40				2 kHz
	1 msec		50 Hz	
50		10 msec		
100			10 Hz	
			20 Hz	1 kHz
	2 msec	1 sec		
30	1 msec			
		5 msec		5 kHz

AnSp 2 On doit faire l'analyse spectrale numérique des signaux suivants

1	une sinusoïde	5	une impulsion triangulaire
2	une réponse indicielle	6	un signal chirp (wobulé)
3	une impulsion rectangulaire	7	une exponentielle décroissante
4	une suite d'impulsions rectangulaires	8	un signal triangulaire périodique

Pour chacun des signaux :

1. Esquissez leur allure temporelle.
2. Choisissez-vous une fenêtre rectangulaire ou en cosinus ?
3. Précisez les raisons de votre choix.

AnSp 3 On considère ici le signal

$$x(t) = 3 + 4 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(4\pi f_0 t), \quad f_0 = 100 \text{ Hz}$$

représenté à la figure 5.14 dont on a enregistré deux périodes. Sachant qu'on souhaite obtenir numériquement son spectre $X[jk]$, on l'échantillonne avec une période $T_e = 1$ msec.

1. Dessinez les points échantillonnés $x[n]$. Quelle fenêtre faut-il utiliser avant l'analyse spectrale ?
2. Que valent N , t_{max} , f_e , Δf ?
3. Quelles raies spectrales seront présentes ? Quel sera le nombre de valeurs spectrales analysées ?
4. Donnez les fréquences, les amplitudes et les phases de chaque valeur spectrale $X[jk]$, $k = 0, \dots, N - 1$.
5. Quel serait le résultat de l'analyse spectrale si l'on avait échantillonné six périodes au lieu de deux ?

5. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

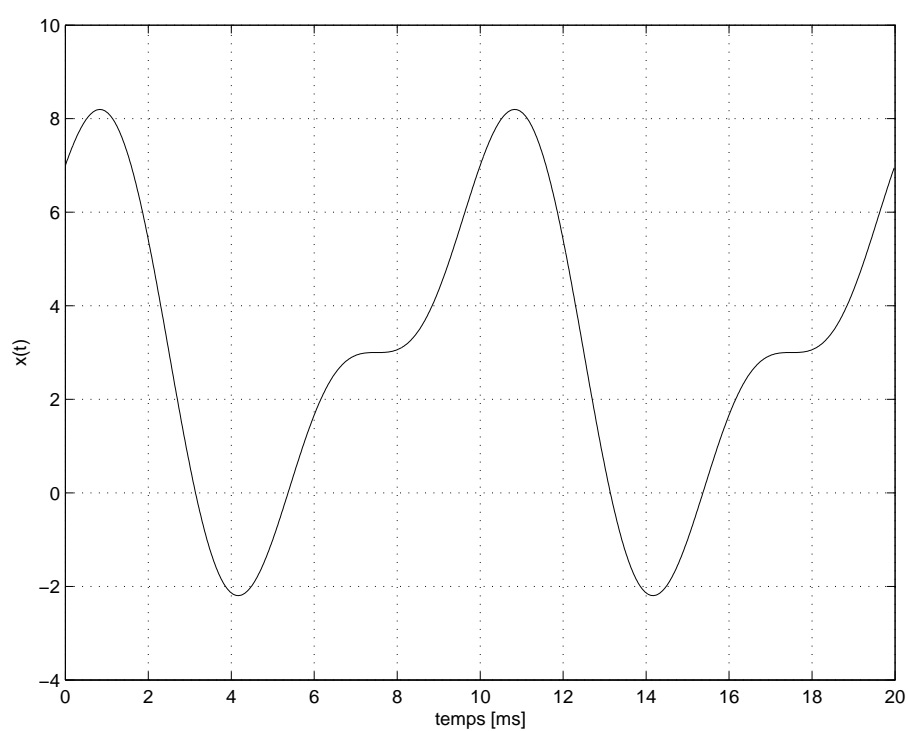


FIG. 5.14.: Ex AnSp 3

Bibliographie

- [1] Randall R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1987
- [2] Frederic J. Harris : *On the use of windows for harmonic analysis with DFT*, Proceedings of IEEE, vol. 66, no.1, january 1978
- [3] Cooley J.W., Tukey J.W., “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965
- [4] Burrus C.S., Parks T.W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985
- [5] B.P. Lathy, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992

Bibliographie