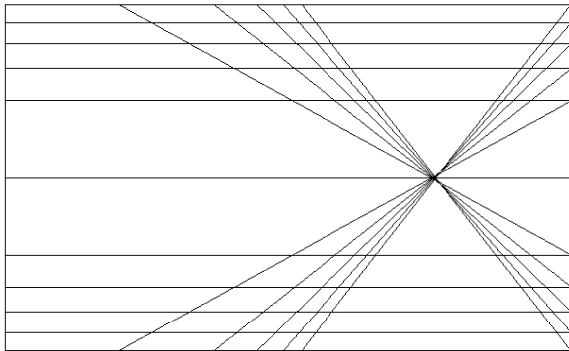


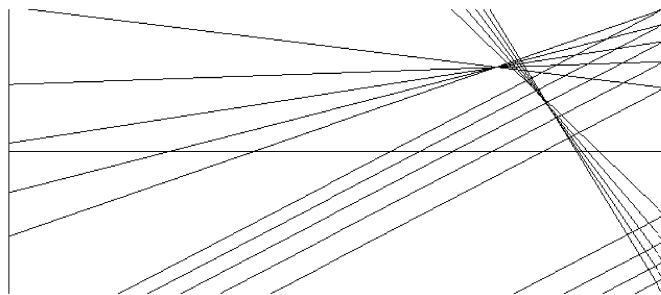
I STIGMATISME DES SYSTEMES CATADIOPTRIQUES:

1°) Cas du miroir parabolique

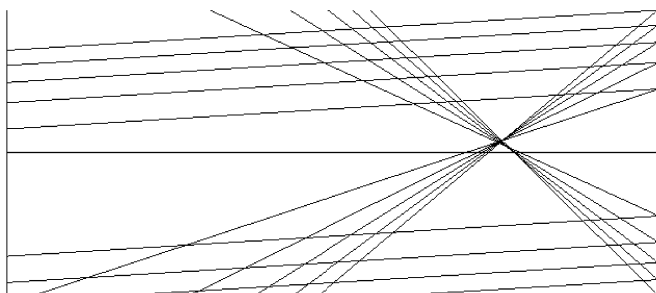


Par définition, un miroir parabolique est stigmatique pour deux points: le point F (foyer objet et image) et le point à l'infini sur l'axe.

On rappelle qu'un système optique est stigmatique pour deux points A et A' si tout rayon lumineux passant par A passe par A' après avoir traversé le système optique.



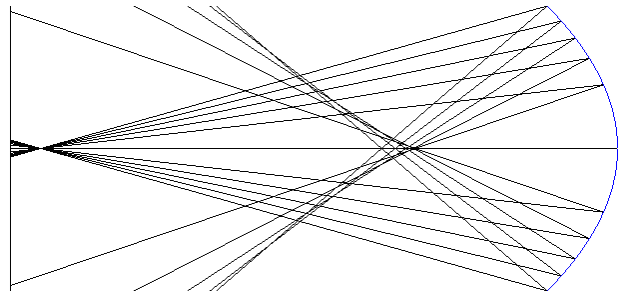
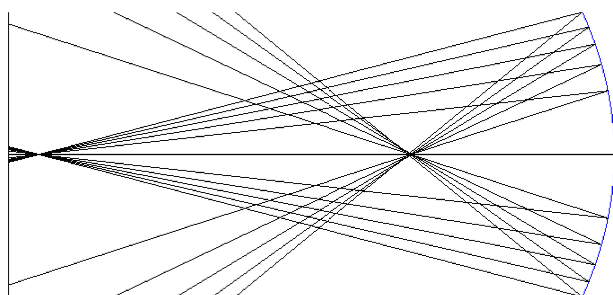
Mais si le point à l'infini n'est plus sur l'axe, il n'y a plus stigmatisme: les rayons sont très denses au voisinage d'une courbe appelée caustique.



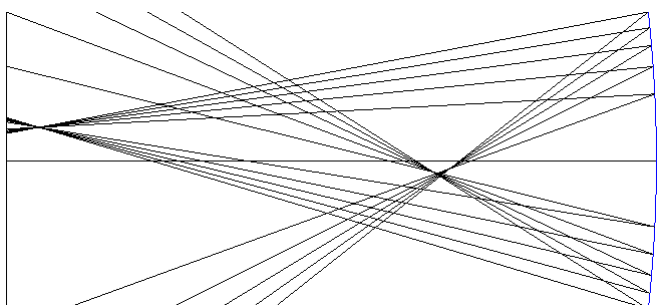
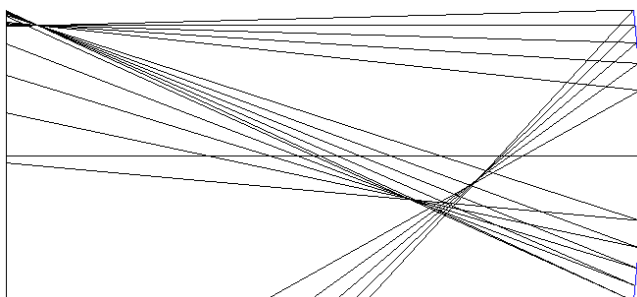
En revanche si le point à l'infini n'est pas trop éloigné de l'axe – les rayons incidents font un angle petit avec l'axe optique – , on pourra considérer qu'il y a stigmatisme approché dans le plan focal image.

On rappelle qu'un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss si tous les rayons lumineux qui le traversent sont paraxiaux (ils présentent des angles faibles avec l'axe optique du système).

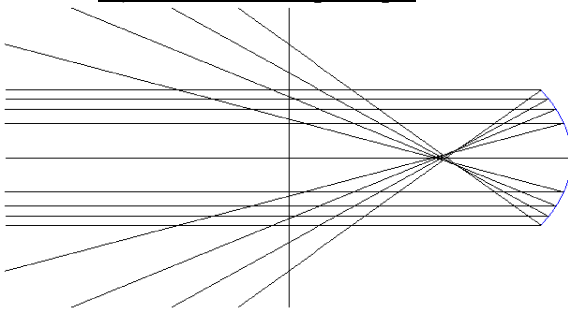
Pour un point à distance finie, il n'y a plus stigmatisme: l'image d'un point est une tache comme l'illustre de schéma ci –dessous à droite. Si les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique, on voit sur le schéma de gauche que cette tache a une dimension très réduite on considèrera qu'il y a encore stigmatisme approché.



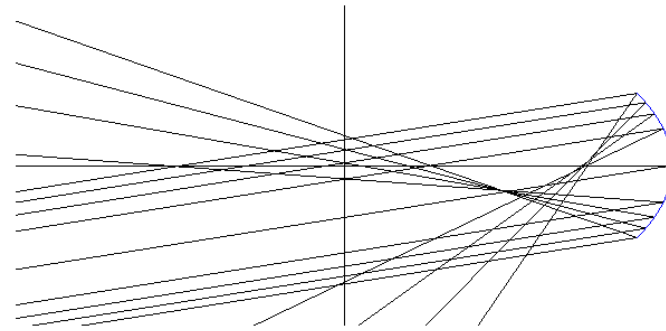
Si le point est à distance finie hors de l'axe, on observe une caustique d'autant plus importante que le point est loin de l'axe



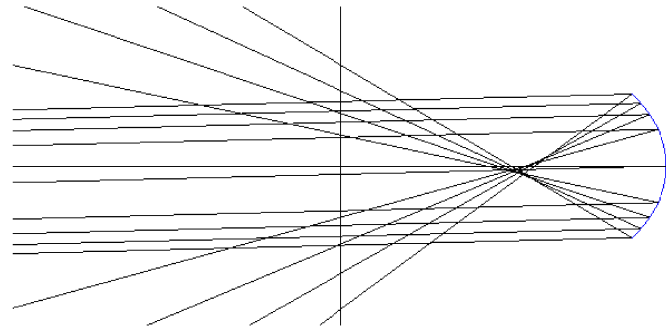
2°) Cas du miroir sphérique



Contrairement au cas du miroir parabolique, il n'y a pas stigmatisme pour un point à l'infini sur l'axe.

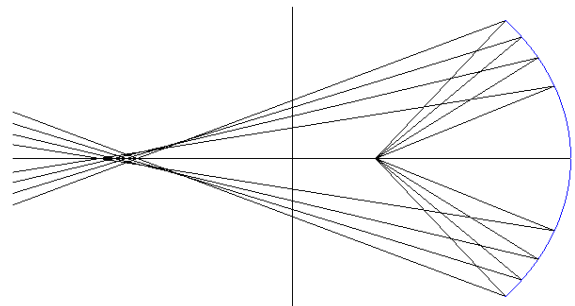
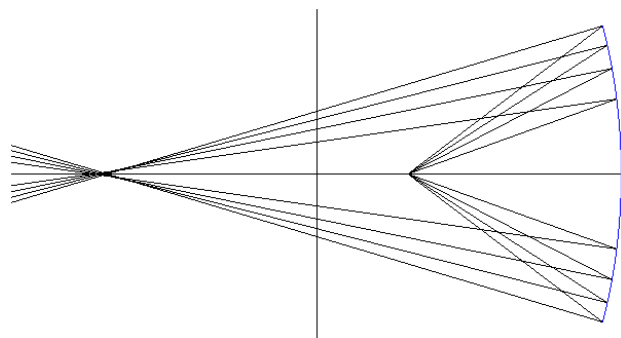


Si le point à l'infini n'est plus sur l'axe, les rayons sont très denses au voisinage d'une courbe appelée caustique.

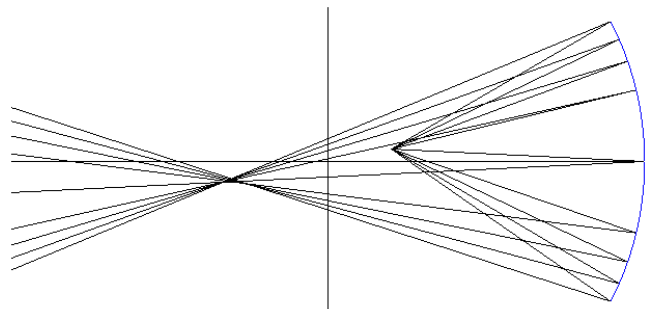
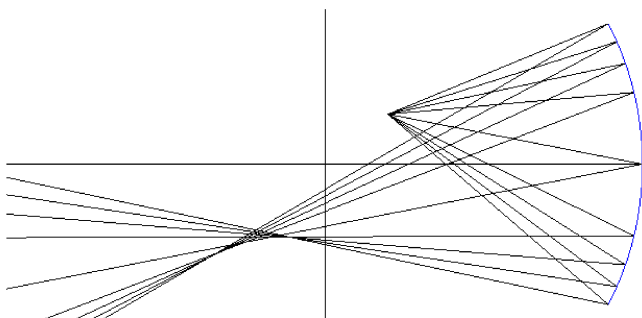


Si le point à l'infini n'est pas trop éloigné de l'axe – les rayons incidents font un angle petit avec l'axe optique –, on pourra considérer qu'il y a stigmatisme. Toutefois, le stigmatisme approché est moins bien vérifié que dans le cas du miroir parabolique.

Pour un point à distance finie, il n'y a pas stigmatisme non plus: l'image d'un point est une tache comme l'illustre de schéma ci – dessous à droite. Si les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique, on voit sur le schéma de gauche que cette tache a une dimension très réduite: on considèrera qu'il y a encore stigmatisme approché.



Si le point est à distance finie hors de l'axe, on observe une caustique d'autant plus importante que le point est loin de l'axe



II ABERRATIONS DES LENTILLES:

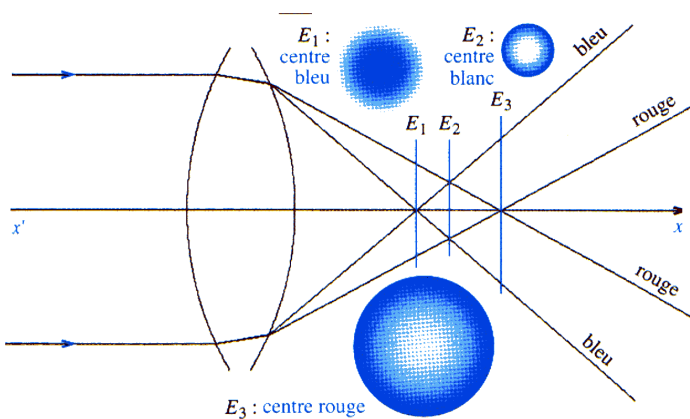
1°) Généralités:

Les lentilles présenteront un stigmatisme approché pour des rayons peu éloignés de l'axe optique et peu inclinés sur celui-ci. Que l'objet soit à l'infini ou à distance finie, les conclusions sont les mêmes: si la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss et dans sa partie centrale, il y aura stigmatisme et aplanétisme approché.

On rappelle qu'un système optique présentant un axe de révolution Δ (axe optique) est aplanétique s'il donne d'un objet AB perpendiculaire à Δ une image perpendiculaire à Δ .

On sait concevoir et fabriquer des lentilles qui restent stigmatiques et aplanétiques pour des rayons écartés de l'axe optique ou plus inclinés sur celui-ci: ce sont les lentilles asphériques dont la courbure variable des faces assurent une utilisation correcte hors conditions de Gauss (elles sont utilisées en photographie notamment).

2°) Aberrations chromatiques:

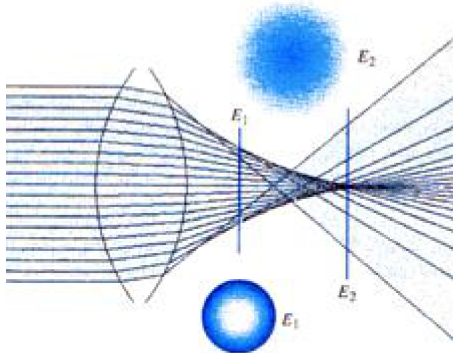


L'indice du verre constituant la lentille dépend de la longueur d'onde.

Si un objet est éclairé en lumière blanche, la vergence de la lentille ne sera donc pas la même pour toutes les longueurs d'onde (voir la formule de la vergence au III).

Les rayons issus d'un même point ne convergeront pas au même endroit d'où une image irisée. C'est l'aberration chromatique.

2°) Aberrations de sphéricité:

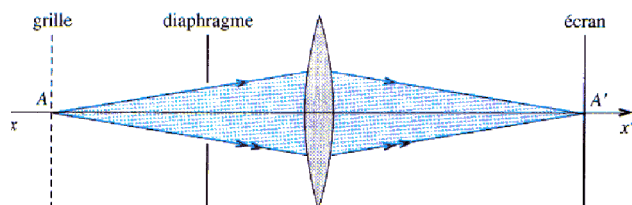


Lorsque des rayons incidents venant de l'infini frappent la face d'entrée de la lentille en dehors de sa zone centrale, on montre qu'ils ne convergent plus strictement en F' foyer image mais dans une zone dont l'extension est proportionnelle au carré de la distance à l'axe du rayon le plus éloigné de celui-ci.

On parle d'aberration en y^2 si y est la distance à l'axe du rayon incident.

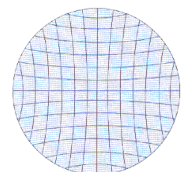
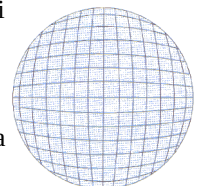
3°) Distorsions:

Du fait des défauts d'aplanétisme, on observe en faisant l'image d'un objet étendu des distorsions. Elles sont ici illustrées en faisant l'image d'une grille.



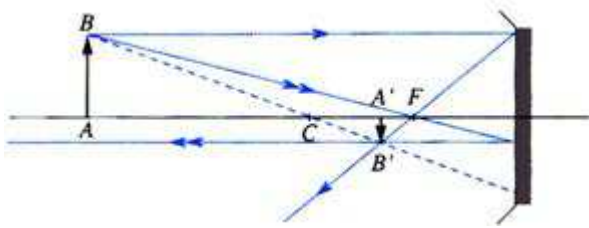
Si on place le diaphragme entre la grille et la lentille, on observe une distorsion en barillet.

Si on place le diaphragme entre la lentille et l'écran, on observe une distorsion en coussinet.



III ETUDE PARTICULIERE DE DEUX SYSTEMES CENTRES:

1°) Le miroir sphérique:



Les formules de conjugaison et de grandissement avec origine au sommet S sont:

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

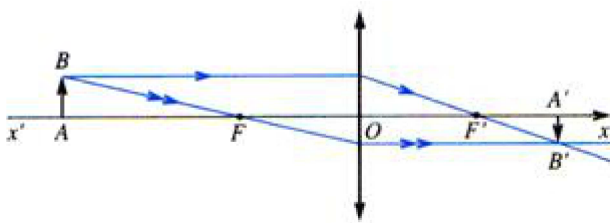
Les formules de conjugaison et de grandissement avec origine au centre C sont:

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

La position des foyers objet et image sont donnés par $f = \overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$ où f est la distance focale. On obtient alors

facilement la formule de Newton: $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = f^2$.

2°) Les lentilles minces:



Les formules de conjugaison et de grandissement avec origine centre O de la lentille sont:

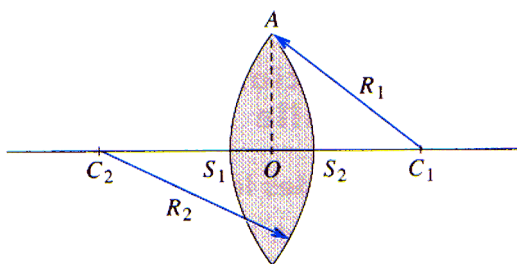
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

La position des foyers objet et image sont donnés par $f = \overline{OF} = -f'$ et $f' = \overline{OF'}$ où f est la distance focale

objet et f' la distance focale image. On obtient alors facilement la formule de Newton: $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2 = -f'^2$.

La vergence V d'une lentille mince est donnée par la formule:

$$V = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}} = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{OC_2}} - \frac{1}{\overline{OC_1}} \right)$$



où n est l'indice du verre et R1 et R2 les rayons de courbures des deux faces de la lame. Ils sont comptés positivement pour des faces convexes et négativement pour des faces concaves.

On rappelle que deux lentilles minces accolées voient leurs vergences s'ajouter. Les vergences s'expriment en dioptries δ

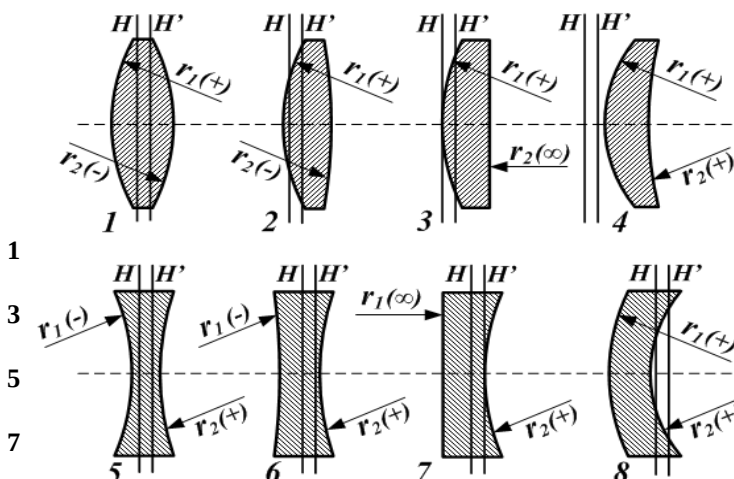
Différents types de lentilles.

Lentilles convergentes :

- Lentille biconvexe symétrique. 2 - Lentille biconvexe asymétrique.
- Lentille plan convexe. 4 - Lentille ménisque convergent.

Lentilles divergentes :

- Lentille biconcave symétrique. 6 - Lentille biconcave asymétrique.
- Lentille plan-concave. 8 - Lentille ménisque divergent.



IV LES MIRAGES

L'indice de réfraction de l'air n'est pas une constante : il évolue notamment avec la température et la pression atmosphérique, ainsi que l'humidité et plus généralement la composition de l'air. Les couches d'air froid par exemple, sont plus denses et de ce fait, leur indice est plus fort car l'indice évolue proportionnellement à la pression et inversement proportionnellement à la température. La superposition de couches d'air de plus en plus chaudes ou froides créent un gradient de température et de pression et donc d'indice pour l'air.

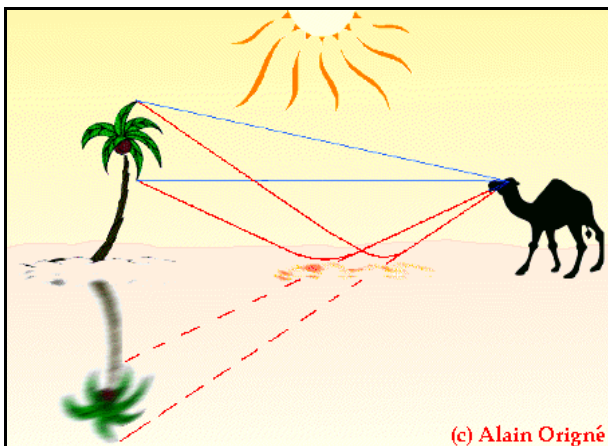
Le tableau ci-dessous donne les variations de l'indice de l'air en fonction de la température :

Température	Indice
-20 °C	1.00031489
-10 °C	1.000302844
0 °C	1.000291647
10 °C	1.000281196
20 °C	1.000271373

Dans son état normal et « stable » une colonne d'air dans l'atmosphère normale possède un gradient de température d'environ $-1 \times 10^{-2} \text{ °C} \cdot \text{m}^{-1}$; le gradient est négatif car la température a tendance à diminuer avec l'altitude. Le gradient d'indice de l'atmosphère provoque déjà des phénomènes dit de réfraction terrestre faisant que des objets situés légèrement sous la ligne d'horizon sont visible. Pour qu'un mirage ait lieu, il faut donc un gradient bien supérieur à cela, de plusieurs degrés par mètres.

Pour qu'un mirage ait lieu et ne soit pas une simple déformation de l'objet (comme un allongement ou une contraction sans effet d'inversion de l'image par exemple), il faut un gradient de température d'au moins $2 \text{ °C} \cdot \text{m}^{-1}$, voire 4 ou $5 \text{ °C} \cdot \text{m}^{-1}$.

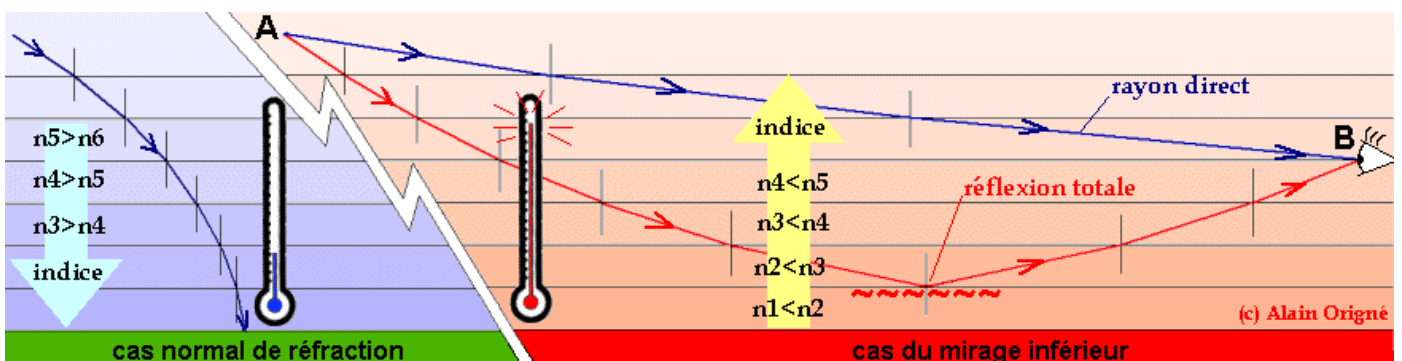
1°) Le mirage inférieur:



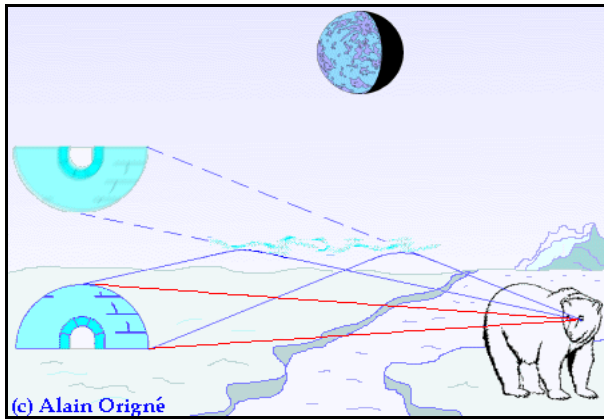
Le mirage inférieur ou *mirage chaud* est causé par le réchauffement des couches basses de l'air, ce qui a lieu très fréquemment dans les zones désertiques ou sur les routes chauffées par le soleil. Dans ces cas, l'air proche du sol peut atteindre des températures supérieures de près d'une dizaine de degrés aux températures des couches d'air plus élevées.

Les rayons lumineux sont alors très courbés dans cette zone près du sol. On observe aussi très souvent un phénomène d'inversion de l'image : comme les rayons situés en haut de l'objet sont moins inclinés par rapport au gradient que les rayons du bas, ils subissent une réflexion totale plus bas et seront donc perçus en dessous des rayons du bas de l'objet. De ce fait, le mirage est sous l'objet et inversé par rapport à celui-ci.

Comme ce phénomène repose sur un échauffement important de l'air au niveau du sol, des turbulences ont tendance à apparaître et donneront une impression de distorsion de l'image. C'est ainsi que les mirages que l'on voit apparaître sur les routes ne donnent pas une réflexion parfaite du ciel, mais une image instable, comme une flaque d'eau.



2°) Le mirage supérieur:



La naissance d'un *mirage supérieur* dit « froid » survient lorsque l'air proche du sol est plus froid qu'en hauteur.

Le gradient normal de l'atmosphère est négatif, indiquant une baisse de température avec l'altitude, ici le phénomène est inverse et l'air est refroidi au niveau du sol, créant un gradient positif : la température croît avec l'altitude sur une certaine distance. Ceci est le cas dans des lieux où la surface du sol est très froide (banquise, mer froide, sol gelé...) où ces couches d'air plus froid dites couches d'inversion apparaissent.

L'image de l'objet peut être inversée ou non, parfois déformée par la convection de l'air, et sera au-dessus de l'objet réel.

Dans un mirage supérieur, les rayons lumineux issus de l'objet vont suivre une trajectoire ascendante et concave comme expliqué précédemment. Une singularité de ce type de mirages apparaît lorsque les rayons suivent la courbe de la Terre : un objet situé sous l'horizon peut alors être perçu au-dessus. Ainsi la Corse peut être vue de Nice alors que son point culminant le Monte Cinto ne pourrait être observé en principe que d'un point bien plus élevé. De même des bateaux au-delà de l'horizon peuvent apparaître au-dessus, déformés.

Il est à noter que si le gradient de température est de $0,129\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ les rayons lumineux seront suffisamment courbés par l'effet de mirage pour suivre la courbure de la terre tant que la couche d'inversion est présente

Démonstration du minimum de déviation du prisme

L'angle de déviation D vaut : $D=i-r+i'-r'$

Or $A=r+r'$ où A est l'angle au sommet du prisme.

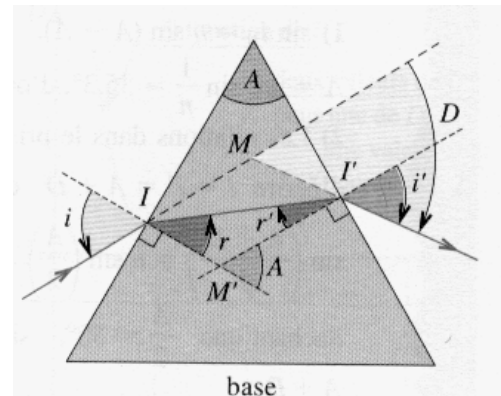
D'où $D=i+i'-A$.

D est minimum quand $\frac{dD}{di} = 0$ soit $1 + \frac{di'}{di} = 0$ et donc $di' = -di$

Or les lois de la réfraction à l'entrée et à la sortie donnent

$$(1) \sin(i) = n \cdot \sin(r)$$

$$(2) \sin(i') = n \cdot \sin(r')$$



En différentiant (1) et (2), on obtient $\cos(i) di = n \cdot \cos(r) dr$ et $\cos(i') di' = n \cdot \cos(r') dr'$. Il suffit d'en faire ensuite le rapport pour obtenir : $\frac{\cos(i) di}{\cos(i') di'} = \frac{\cos(r) dr}{\cos(r') dr'}$ (3)

Or on a montré que $di = -di'$ et en différentiant $A=r+r'$, on obtient de même que $dr = -dr'$. En remplaçant dans (3), on a alors : $\frac{\cos(i)}{\cos(i')} = \frac{\cos(r)}{\cos(r')}$

On obtient alors facilement que $\frac{1-\sin(i)^2}{1-\sin(i')^2} = \frac{1-\frac{\sin(i)^2}{n^2}}{1-\frac{\sin(i')^2}{n^2}}$ soit encore $\frac{1-\sin(i)^2}{n^2-\sin(i)^2} = \frac{1-\sin(i')^2}{n^2-\sin(i')^2}$ (4)

Pour résoudre cette équation, il faut donc étudier la fonction $f(x) = \frac{1-x}{n^2-x}$ pour $x>0$

Dérivons : $f(x) = \frac{-1}{n^2-x} + \frac{1-x}{(n^2-x)^2} = \frac{1-n^2}{(n^2-x)^2} < 0$ car $n>1$

La fonction f est monotone décroissante donc injective. L'équation (4) admet donc pour solution unique $i = i'$. Cela entraîne immédiatement que $r = r'$.

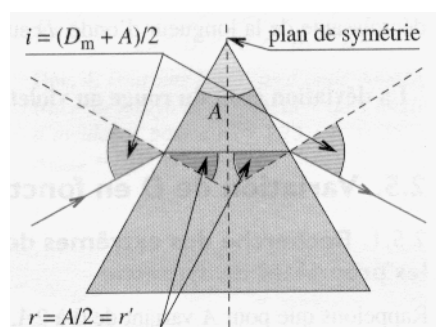
Alors $D_m = 2i - A = 2 \arcsin\left(n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A$

Soit $\frac{A+D_m}{2} = \arcsin\left(n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)$

On en déduit la formule classique donnant l'indice du verre du prisme en fonction de D_m :

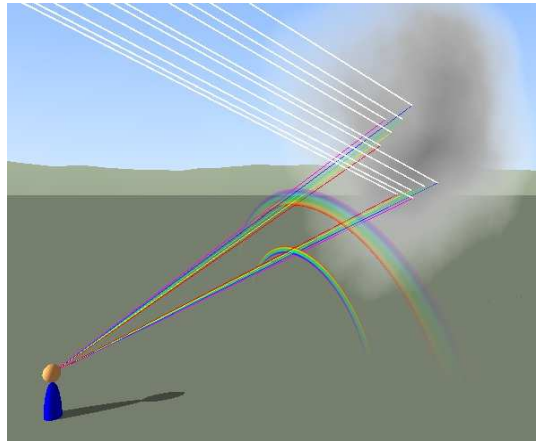
$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Le tracé des rayons lumineux au minimum de déviation est donc le suivant :



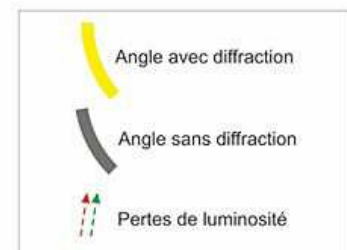
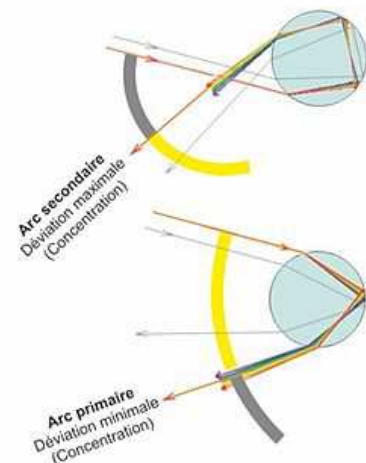
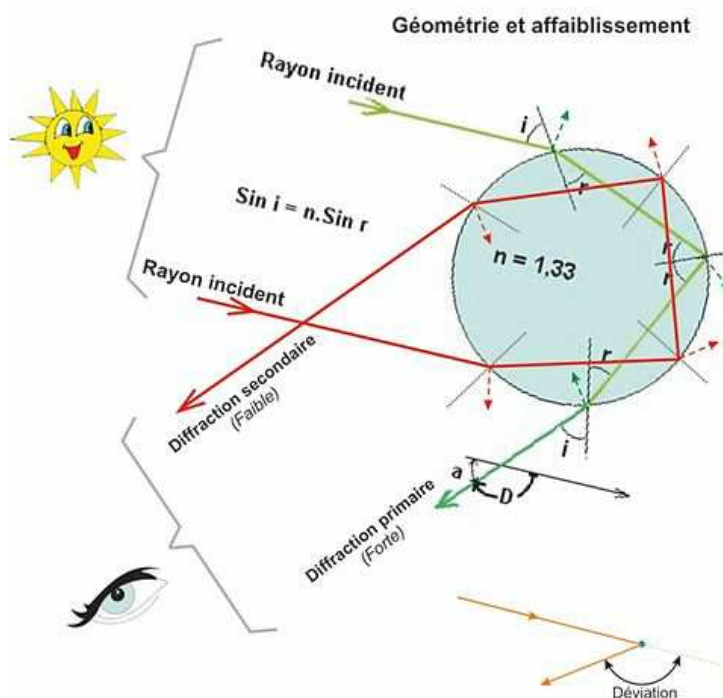
Arc en ciel

Pour bien comprendre les couleurs, il faut raisonner en se plaçant du point de vue de l'observateur et non des gouttes d'eau. Les rayons doivent tous arriver sur l'œil de l'observateur au même point comme dessiné ci-dessous :



Diffractions primaire et secondaire

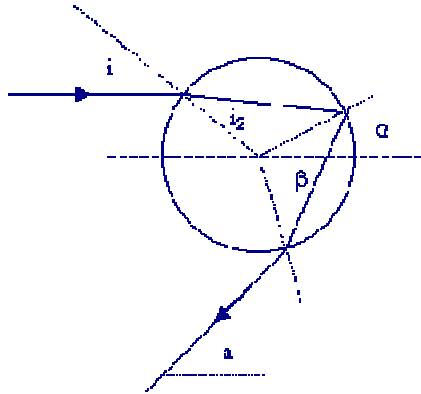
Arcs primaires et secondaires



Arc primaire

Il faut que la déviation se fasse dans le sens des aiguilles d'une montre car pour $p=1$, l'angle de déviation est autour de 135° . Comme $\frac{\partial \Delta}{\partial n} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(p+1)^2 - n^2}{n^2 - 1}}$ et que n augmente quand la longueur d'onde diminue, le rouge est moins dévié que le violet. Donc pour arriver sur l'œil de l'observateur,

le violet qui arrive avec un angle de déviation plus grand, devra arriver d' « en dessous » par rapport au rouge. Donc le violet est vers le centre de l'arc et le rouge à l'extérieur.



Arc secondaire

Pour l'arc secondaire, si l'observateur le voit, c'est que la déviation s'est faite dans le sens trigonométrique cette fois-ci puisque quand $p=2$, la déviation est autour de 230° . Les positions des couleurs sont donc inversées : le rouge sort moins dévié que le violet mais on a tourné dans l'autre sens. Le violet sera donc à l'extérieur cette fois-ci et le rouge à l'intérieur !

