

I Electrostatique

1. Equations locales et globales

Les équations de Maxwell de l'électrostatique sont :

- l'équation de Maxwell Gauss : $\text{div}(\vec{E}_{(M)}) = \frac{\rho_{(M)}}{\epsilon_0}$ dont la forme intégrée est le théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où S est une surface fermée et Q_{int} la charge contenue à l'intérieur de la surface fermée

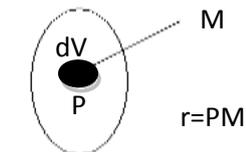
- l'équation de Maxwell Faraday : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. \vec{E} est donc à circulation conservative

On définit le potentiel V par: $\vec{E} = -\text{grad}V$. Il obéit à l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

2. Champ et potentiel dans le vide

Soit une distribution de charges D de densité $\rho(\vec{r}, t)$ occupant le volume (V). L'équation de Poisson admet une solution unique si D est d'extension finie et si on suppose que $V(M)$ tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Cette solution vaut :

$$V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{(P)} dV}{PM}$$



$$\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM}$$

Alors le champ électrique est donné par la loi de Coulomb :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{(P)} dV}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

3. Calcul du champ électrique

3.1. Symétries

La première étape consiste à trouver la direction du champ électrique.

Le champ \vec{E} en un point M appartenant aux plans de symétrie de la distribution de charges D appartient aussi à ces plans. Le champ \vec{E} en un point M appartenant aux plans d'antisymétrie de la distribution de charges D est perpendiculaire à ces plans. Il ne dépend pas de l'orientation de l'espace. C'est un vecteur polaire.

Remarque 1 : le plan de symétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D **et contenir le point M !**

Remarque 2 : le plan d'antisymétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D qui change le signe des charges dans l'opération de symétrie. **Il doit aussi contenir le point M !**

3.2. Invariances

La deuxième étape consiste trouver les variables d'espace dont dépend le champ électrique.

Si la répartition est invariante par translation le long d'un axe alors \vec{E} est invariant le long de cet axe.

Si la distribution est invariante par rotation autour d'un axe alors le champ \vec{E} ne dépend pas de l'angle repérant la rotation autour de cet axe.

3.2. Méthode de calcul

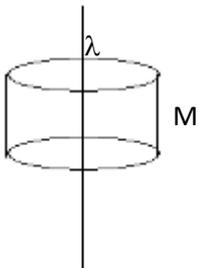
Si la distribution présente un haut degré de symétrie (donc en général si le champ ne dépend que d'une seule variable d'espace), on peut chercher à appliquer le théorème de Gauss. Pour cela, il faut trouver une surface fermée qui rende élémentaire le calcul du flux de \vec{E} . Ce sera donc une surface sur laquelle le module du champ

électrique est constant. Si on ne peut constituer une surface fermée en respectant cette condition, on la fermera en y adjoignant des morceaux de surface tels que $\vec{E} \perp d\vec{S}$. On comptera positivement les flux sortants de S.

Dans tous les autres cas, on fera un calcul direct à l'aide de la loi de Coulomb. Dans ce cas, l'étude préalable des symétries permettra le plus souvent de réduire le calcul à une ou deux intégrales simples. Il ne faut donc pas oublier de **projeter** \vec{E} sur les directions où il sera non nul **avant de faire les intégrations**.

4. Champs classiques

4.1. Fil infini



Par symétrie : $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{e}_r$

Par invariance : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss sera un cylindre de hauteur h quelconque et ayant pour base un cercle de rayon r : la surface passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de E est constant sur la surface latérale. On ferme la surface avec les deux couvercles tels que $\vec{E} \perp d\vec{S}$.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

et

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}$$

où a est une constante arbitraire

Remarque : on ne peut pas dire que V est nul à l'infini ici puisque la distribution de charge n'est pas d'extension finie.

4.2. Sphère pleine

Soit une sphère de centre O, de rayon R, portant la charge Q uniformément répartie en volume. Cela correspond à une densité volumique de charge $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

Par symétrie : $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$

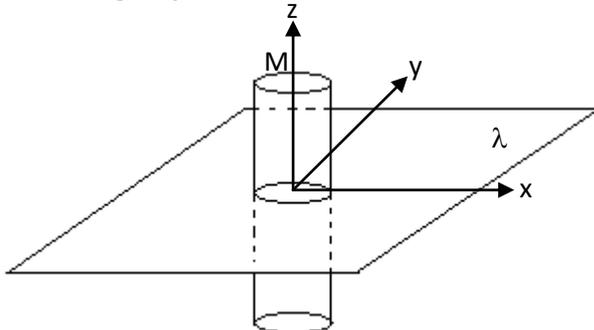
Par invariance : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

La surface de Gauss est une sphère centrée en O et passant par M : elle est fermée et telle que le module de E soit constant puisqu'il ne dépend que de r.

• $r > R$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ car V est nul à l'infini

• $r < R$: $\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$ et $V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2)$ car V est continu en $r=R$

4.3. Plan infini



Soit un plan infini portant la densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

Par symétrie : $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_z$

Par invariance : $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

La surface de Gauss sera un cylindre de hauteur 2z et ayant pour base une surface S quelconque. Ce cylindre est symétrique par rapport au plan xOy. Le module de E est constant sur les couvercles. On ferme la surface avec la surface latérale telle que $\vec{E} \perp d\vec{S}$.

Alors on obtient :

• $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $V = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$ avec V nul en $z=0$

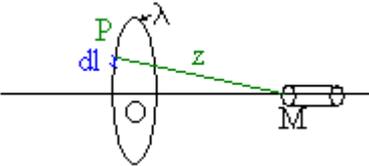
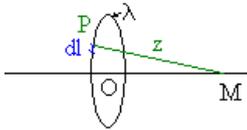
• $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ et $V = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$ avec V nul en $z=0$

Remarque : on ne peut pas dire que V est nul à l'infini ici puisque la distribution de charge n'est pas d'extension finie.

4.4. Spire de rayon a

Soit une spire de rayon a , d'axe z , portant la charge linéique λ . Eu égard aux symétries, il faut faire un calcul direct. On trouve pour un point M appartenant à l'axe Oz :

$$V = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$



Le champ au voisinage de l'axe a deux composantes : une composante axiale qu'on considérera égale à celle obtenue pour un point de l'axe et une composante radiale qu'on trouvera en appliquant le théorème de Gauss à un petit cylindre de longueur dz et de rayon r petit devant z .

On montre alors que :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = - \iint_{\text{base en } z} E_z(z) \cdot dS + \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r, z) \cdot dS + \iint_{\text{base en } z+dz} E_z(z + dz) \cdot dS$$

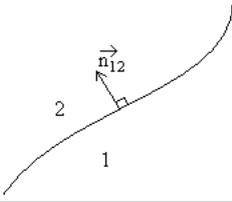
$$\text{Soit } 0 = -E_z(z) \cdot \pi r^2 + E_r(r, z) \cdot 2\pi r dz + E_z(z + dz) \pi r^2$$

D'où

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

5. Continuités

A la traversée d'une distribution de charges, le potentiel et le champ électrique se comportent différemment. Les diverses continuités sont rappelées ci-dessous.

Distribution	Champ électrique \vec{E}	Potentiel V
Volumique ρ	Continu	Continu
Surfacique σ	Discontinu  <i>Relation de passage</i> $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	Continu
Linéique λ	Discontinu	Discontinu

6. Dipôle électrostatique

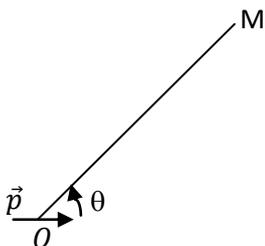
Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} placé en O . Le dipôle est quasi ponctuel et le point M est à grande distance.

Le potentiel électrostatique créé en un point M distant de r est donné par :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le champ électrostatique est donné par :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$



Placé dans un champ électrique extérieur, il acquiert une énergie potentielle : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$

Le dipôle a donc tendance à s'aligner sur le champ extérieur et à se déplacer vers les zones de champ intense. On retrouve ces propriétés en utilisant le torseur des forces subies :

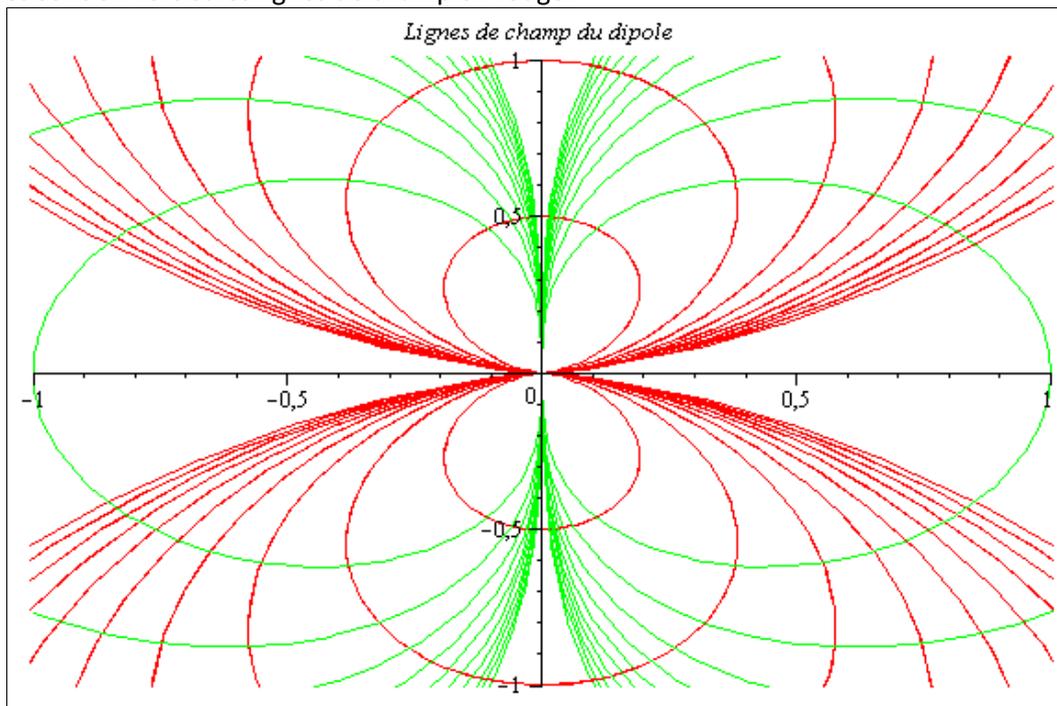
$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext} \text{ et } \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

On peut faire le tracé des lignes de champ. A partir de

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

on montre que $r = r_0 \cdot \sin^2 \theta$

Les équipotentielles sont données par $V = C \cdot \sqrt{|\cos \theta|}$. On obtient alors le tracé suivant où les équipotentielles sont en vert et les lignes de champ en rouge.



7. Résolution de l'équation de Laplace

7.1 . Problème à symétrie cylindrique

Soit un cylindre de rayon r_1 au potentiel V_1 et un cylindre de même axe de rayon r_2 au potentiel V_2 . On se propose de chercher le potentiel dans l'espace vide de charges compris entre r_1 et r_2 .

Par invariance on a $V(r, \theta, z) = V(r)$. L'équation de Laplace en cylindriques donne :

$$\Delta V = 0 \text{ soit } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \text{ donc } V = A \ln r + B$$

Les conditions aux limites donnent : $V=V_1$ en $r=r_1$ et $V=V_2$ en $r=r_2$. On en déduit que :

$$V = \frac{V_2 - V_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \ln r + \frac{V_2 \ln r_1 - V_1 \ln r_2}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

7.2 . Problème à symétrie cylindrique

Soit une sphère de rayon r_1 au potentiel V_1 et une autre sphère de même centre de rayon r_2 au potentiel V_2 . On se propose de chercher le potentiel dans l'espace vide de charges compris entre r_1 et r_2 .

Par invariance on a $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$. L'équation de Laplace en sphériques donne :

$$\Delta V = 0 \text{ soit } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \text{ donc } V = -\frac{A}{r} + B$$

Les conditions aux limites donnent : $V=V_1$ en $r=r_1$ et $V=V_2$ en $r=r_2$. On en déduit que :

$$V = r_1 r_2 \frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{r} + \frac{r_2 V_2 - r_1 V_1}{r_2 - r_1}$$

II Magnétostatique

1. Equations locales et globales

Les équations de Maxwell de la magnétostatique sont :

- l'équation de Maxwell Ampère :

$$\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

dont la forme intégrée est le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où C est un contour fermé et $I_{\text{enlacé}}$ le courant enlacé par le contour fermé C.

- l'équation de Maxwell Flux :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

\vec{B} est donc à flux conservatif soit

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

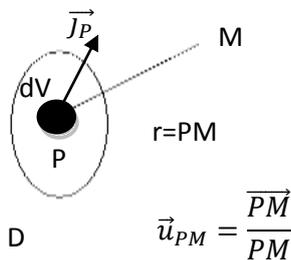
On définit le potentiel vecteur \vec{A} par :

$$\vec{B} = \overline{\text{rot}} \vec{A}.$$

En se plaçant dans la jauge de Coulomb (soit $\text{div} \vec{A} = 0$), on montre qu'il obéit à l'équation de Poisson de la magnétostatique :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

2. Champ et potentiel dans le vide



Soit une distribution de courants D de densité $\vec{j}(\vec{r}, t)$ occupant le volume (V). L'équation de Poisson projetée sur les 3 axes admet comme en électrostatique une solution unique si D est d'extension finie et si on suppose que $\vec{A}(M)$ tend vers 0 quand r tend vers l'infini. Cette solution vaut :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{PM} dV$$

Pour une distribution linéique de courants, on a :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I(P) d\vec{l}}{PM}$$

Alors le champ magnétique est donné par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} dV$$

Pour une distribution linéique de courants, on a :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I(P) d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Remarque: ces expressions pour le champ magnétique sont valables y compris pour des distributions de courant d'extension infinie. Ce n'est pas le cas pour les expressions du potentiel vecteur à cause d'un problème de convergence d'intégrale généralisée.

3. Calcul du champ magnétique

3.1. Symétries

La première étape consiste à trouver la direction du champ magnétique.

Le champ \vec{B} en un point M appartenant aux plans d'antisymétrie de la distribution de courants D appartient aussi à ces plans. Le champ \vec{B} en un point M appartenant aux plans de symétrie de la distribution de courants D est perpendiculaire à ces plans. Il dépend de l'orientation de l'espace. C'est un vecteur axial.

Remarque 1 : le plan de symétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D et contenir le point M !

Remarque 2 : le plan d'antisymétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D qui change le sens des courants dans l'opération de symétrie. Il doit aussi contenir le point M !

3.2. Invariances

La deuxième étape consiste trouver les variables d'espace dont dépend le champ magnétique.

Si la répartition est invariante par translation le long d'un axe alors \vec{B} est invariant le long de cet axe.

Si la distribution est invariante par rotation autour d'un axe alors le champ \vec{B} ne dépend pas de l'angle repérant la rotation autour de cet axe.

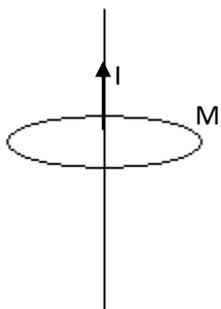
3.2. Méthode de calcul

Si la distribution présente un haut degré de symétrie (donc en général si le champ ne dépend que d'une seule variable d'espace ou deux à la rigueur), on peut chercher à appliquer le théorème d'Ampère. Pour cela, il faut trouver un contour fermé qui rende élémentaire le calcul de la circulation de \vec{B} . Ce sera donc un contour le long duquel le module du champ magnétique est constant. Si on ne peut constituer un contour fermé en respectant cette condition, on le fermera en y adjoignant des morceaux de contour tels que $\vec{B} \perp d\vec{l}$. On comptera positivement les courants traversant la surface s'appuyant sur le contour orienté C dans le sens fixé par l'orientation de C (règle du tire bouchon)

Dans tous les autres cas, on fera un calcul direct à l'aide de la loi de Biot et Savart. Dans ce cas, l'étude préalable des symétries permettra le plus souvent de réduire le calcul à une ou deux intégrales simples. Il ne faut donc pas oublier de **projeter** \vec{B} sur les directions où il sera non nul **avant de faire les intégrations**. Même dans les cas où les coordonnées cartésiennes semblent judicieuses (demi-droite, segment...), un paramétrage en angle simplifiera souvent les calculs.

4. Champs classiques

4.1. Fil infini



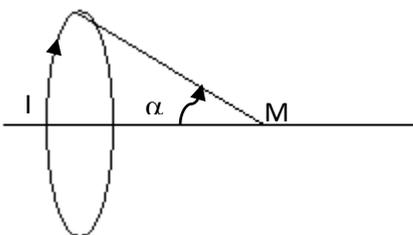
Par symétrie : $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$

Par invariance : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$

Le contour fermé sera un cercle de rayon r : le contour passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de B est constant sur ce contour.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

4.2. Spire de rayon R



Soit une spire de rayon R, d'axe z, parcourue par un courant I. Eu égard aux symétries, il faut faire un calcul direct.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{IR d\theta \vec{e}_\theta \wedge (R\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On trouve pour un point M appartenant à l'axe Oz :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

$$\text{où } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Le champ au voisinage de l'axe a deux composantes : une composante axiale qu'on considérera égale à celle obtenue pour un point de l'axe et une composante radiale qu'on trouvera en utilisant le fait que le champ magnétique est à flux conservatif. Pour cela on calculera le flux de \vec{B} à travers un petit cylindre de longueur dz et de rayon r petit devant z.

On montre alors que :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = - \iint_{\text{base en } z} B_z(z) \cdot dS + \iint_{\text{surface latérale}} B_r(r, z) \cdot dS + \iint_{\text{base en } z+dz} B_z(z + dz) \cdot dS$$

$$\text{Soit } 0 = -B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_r(r, z) \cdot 2\pi r dz + B_z(z + dz) \pi r^2$$

D'où

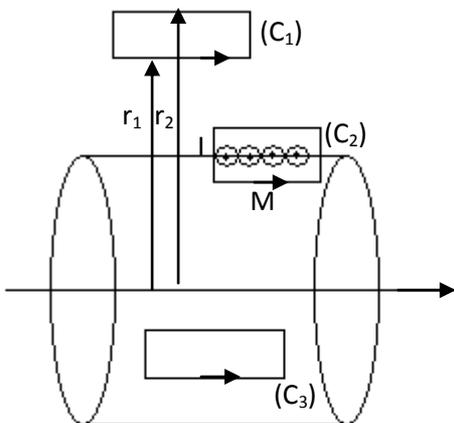
$$\boxed{B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

4.3. Solénoïde infini

Soit un solénoïde de rayon R, infiniment long, comportant n spires par unité de longueur. Chaque spire est parcourue par un courant d'intensité I.

Par symétrie : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Par invariance : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$



On va utiliser 3 contours fermés : un à l'extérieur du solénoïde, un à l'intérieur et un à cheval sur l'intérieur et l'extérieur. Le contour fermé sera un rectangle de longueur h arbitraire et dont un de côté est à r_1 de l'axe du solénoïde et l'autre à r_2 : le contour passe comme toujours par le point où on cherche le champ ! Le module de B est constant sur les côtés horizontaux et $\vec{B} \perp d\vec{l}$ sur les côtés verticaux.

On comptera positivement les courants traversant la surface s'appuyant sur les contours orientés C_i dans le sens fixé par l'orientation de C_i (règle du tire bouchon)

Sur (C_1) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 = B(r_1) \cdot h - B(r_2) \cdot h$$

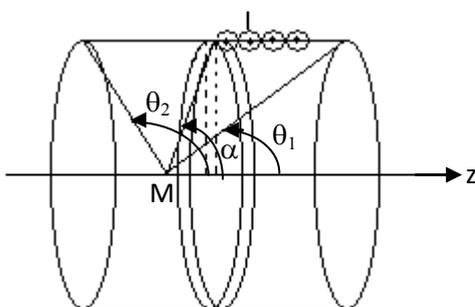
Donc B_{ext} est constant. On prendra cette constante nulle pour des considérations énergétiques : en effet si cette constante n'était pas nulle, cela signifierait qu'une tranche de solénoïde de longueur dz pourrait

stocker une énergie infinie ! En utilisant le contour (C_3), on montre de même que B_{int} est constant.

Enfin sur (C_2) :

$$\text{Soit } \boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{int}} \cdot h = \mu_0 n I h \end{array} \right.$$

4.4. Solénoïde fini



Soit un solénoïde de rayon R, de longueur L, comportant N spires. Chaque spire est parcourue par un courant d'intensité I.

Par symétrie : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Par invariance : $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_z$

On découpe le solénoïde en tronçons élémentaires d'épaisseur dz. Chaque tronçon contient $\frac{N}{L} dz$ spires. Le champ élémentaire créé est :

$$d\vec{B} = \frac{N}{L} dz \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

Or

$$\cot \alpha = \frac{z}{R}$$

Alors

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2L} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \vec{e}_z$$

5. Calcul du potentiel vecteur

5.1. Symétries

La première étape consiste à trouver la direction du potentiel vecteur. Comme \vec{A} est un vecteur polaire (il ne dépend pas de l'orientation de l'espace), il présente les mêmes symétries que le champ électrique

Le champ \vec{A} en un point M appartenant aux plans de symétrie de la distribution de charges D appartient aussi à ces plans. Le champ \vec{A} en un point M appartenant aux plans d'antisymétrie de la distribution de charges D est perpendiculaire à ces plans.

Remarque 1 : le plan de symétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D **et contenir le point M !**

Remarque 2 : le plan d'antisymétrie doit être un plan de symétrie géométrique de D qui change le signe des charges dans l'opération de symétrie. **Il doit aussi contenir le point M !**

5.2. Invariances

La deuxième étape consiste trouver les variables d'espace dont dépend le potentiel vecteur.

Si la répartition est invariante par translation le long d'un axe alors \vec{A} est invariant le long de cet axe.

Si la distribution est invariante par rotation autour d'un axe alors le champ \vec{A} ne dépend pas de l'angle repérant la rotation autour de cet axe.

5.3. Méthodes de calcul

5.3.1. A partir de la définition

Sachant que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, si le champ magnétique a déjà été calculé et que le potentiel vecteur est simple, il est possible d'envisager un calcul direct.

Par exemple, pour un solénoïde de rayon R, infiniment long, comportant n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité I, il est évident que :

Par symétrie : $\vec{A} = A(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$

Par invariance : $\vec{A} = A(r) \vec{e}_\theta$

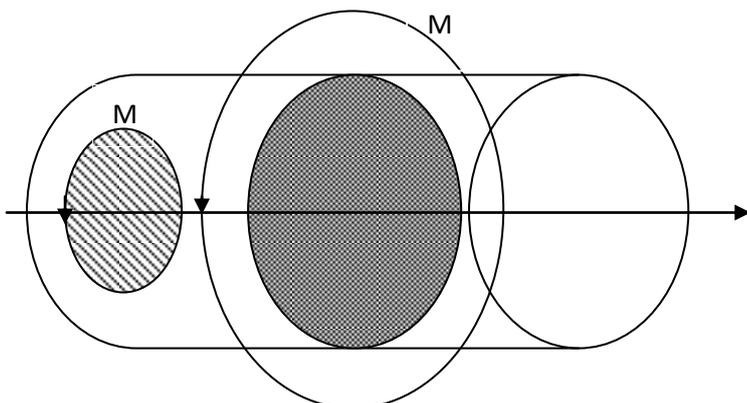
Alors $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} A(r) \wedge \vec{e}_\theta + A(r) \vec{\nabla} \wedge \vec{e}_\theta = \frac{dA(r)}{dr} \vec{e}_z + A(r) \frac{\vec{e}_z}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(rA(r))}{dr} \vec{e}_z$

Comme $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ et $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$, on en déduit que $\vec{A}_{int} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \vec{e}_\theta$ si \vec{A} est nul en $r=0$ et $\vec{A}_{ext} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \vec{e}_\theta$

5.3.2. A partir du flux

Sachant que $\varphi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ d'après le théorème de Stokes, si le champ magnétique a déjà été calculé, il est possible d'envisager, à partir d'un choix de surface et de contour judicieux, un calcul du potentiel vecteur sous cette forme non locale.

Reprenons l'exemple du solénoïde infini ci-dessus :



Pour un point M à l'intérieur du solénoïde, nous allons choisir un cercle de rayon $r < R$ et comme surface pour le flux de B, le disque s'appuyant sur ce cercle. La formule ci-dessus nous donne alors :

$$\varphi = \iint_S \mu_0 n I \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z = \oint_C A(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Soit } \mu_0 n I \pi r^2 = 2\pi r A(r)$$

$$\text{d'où } \vec{A}_{int} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \vec{e}_\theta$$

Pour un point M à l'extérieur du solénoïde, nous allons choisir un cercle de

rayon $r > R$ et comme surface pour le flux de B , le disque s'appuyant sur ce cercle. La formule ci-dessus nous donne alors :

$$\varphi = \iint_S \mu_0 n I \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z = \oint_C A(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta$$

Soit $\mu_0 n I \pi R^2 = 2\pi r A(r)$ car le champ B est nul à l'extérieur de la surface grisée !

$$d'où \vec{A}_{ext} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \vec{e}_\theta$$

5.3.3. Cas où \vec{B} est uniforme

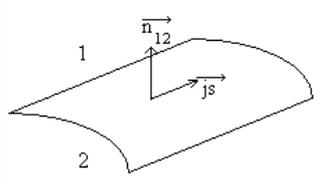
Dans ce cas très particulier, il existe une expression simplifiée pour le potentiel vecteur. on aura :

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2}$$

On peut aisément vérifier que $\text{div} \vec{A} = 0$.

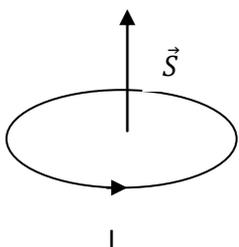
6. Continuités

A la traversée d'une distribution de charges, le potentiel vecteur et le champ magnétique se comportent différemment. Les diverses continuités sont rappelées ci-dessous.

Distribution	Champ électrique \vec{B}	Potentiel vecteur \vec{A}
Volumique $\vec{j}(P)$	Continu	Continu
Surfacique $\vec{j}_s(P)$	Discontinu  Relation de passage $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$	Continu
Linéique I	Discontinu	Discontinu

7. Dipôle magnétique

7.1. Moment dipolaire magnétique



Soit une boucle de courant (C) parcourue par un courant I. Sa surface est $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \wedge \overline{d\vec{r}}$.

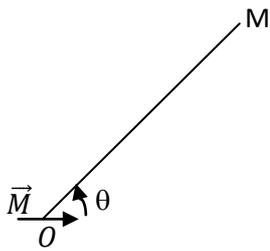
Le moment magnétique sera alors : $\vec{M} = I \cdot \vec{S} = \frac{I}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \wedge \overline{d\vec{r}}$

Dans le cas d'une distribution de courants permanents $\vec{j}(P)$, on la décompose en tubes élémentaires de courant où l'intensité est constante. Dans ce cas, le moment magnétique

devient :

$$\vec{M} = I \cdot \vec{S} = \frac{I}{2} \iiint_{(D)} \vec{r} \wedge \overline{j(P)} d\tau$$

7.2. Champ créé à grande distance - actions subies



Soit un dipôle magnétique de moment \vec{M} placé en O. Le dipôle est quasi ponctuel et le point M est à grande distance.

Le potentiel vecteur créé en un point M distant de r est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 M \cos\theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\varphi$$

Le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos\theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

Placé dans un champ magnétique extérieur, il acquiert une énergie potentielle : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$

Le dipôle a donc tendance à l'aligner sur le champ extérieur et à se déplacer vers les zones de champ intense. On retrouve ces propriétés en utilisant le torseur des forces subies :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$$

7.3. Spectre

On peut faire le tracé des lignes de champ. A partir de

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta}$$

on montre que $r = r_0 \cdot \sin^2\theta$

On obtient alors le tracé suivant :

