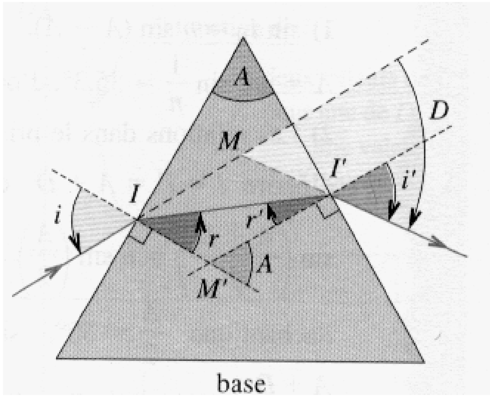
Démonstration du minimum de déviation du prisme

L'angle de déviation D vaut : D=i-r+i'-r'



Or A=r+r' où A est l'angle au sommet du prisme.

D'où D=i+i'-A.

D est minimum quand $\frac{dD}{di} = 0$ soit $1 + \frac{di\prime}{di} = 0$ et donc di'=-di

Or les lois de la réfraction à l'entrée et à la sortie donnent

$$(1)\ \sin(i) = n.\sin(r)$$
$$(2)\ \sin(i') = n.\sin(r')$$

En différentiant (1) et (2), on obtient $\cos(i)\,di = n.\cos(r)dr$ et $\cos(i')\,di' = n.\cos(r')dr'$. Il suffit d'en faire ensuite le rapport pour obtenir : $\frac{\cos(i)di}{\cos(i')di\prime} = \frac{\cos(r)dr}{\cos(r')dr\prime}$ (3)

Or on a montré que di=-di' et en différentiant A=r+r', on obtient de même que dr=-dr'. En remplaçant dans (3), on a alors : $\frac{\cos(i)}{\cos(i')} = \frac{\cos(r)}{\cos(r')}$

On obtient alors facilement que $\frac{1-\sin(i)^2}{1-\sin(i\prime)^2} = \frac{1-\frac{\sin(i)^2}{n^2}}{1-\frac{\sin(i\prime)^2}{n^2}}$ soit encore $\frac{1-\sin(i)^2}{n^2-\sin(i)^2} = \frac{1-\sin(i\prime)^2}{n^2-\sin(i\prime)^2}$ (4)

Pour résoudre cette équation, il faut donc étudier la fonction $f(x) = \frac{1-x}{n^2-x}$ pour x>0

Dérivons : $f(x) = \frac{-1}{n^2-x} + \frac{1-x}{(n^2-x)^2} = \frac{1-n^2}{(n^2-x)^2} < 0$ car n>1

La fonction f est monotone décroissante donc injective. L'équation (4) admet donc pour solution unique i = i'. Cela entraine immédiatement que r = r'.

Alors $D_m = 2i - A = 2\arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A$

Soit $\frac{A+D_m}{2} = \arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)$

On en déduit la formule classique donnant l'indice du verre du prisme en fonction de D_m :

$$n = \frac{sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Le tracé des rayons lumineux au minimum de déviation est donc le suivant :