INTÉGRALES MULTIPLES

Nicolas CHIREUX

Chapitre 1

Intégrales doubles

1.1 Cas général

1.1.1 Définition

Soit D un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ inscrit dans le rectangle $[a, b] \times [c, d]$,
Soit f une fonction définie continue sur le domaine D, prolongée par zéro à l'extérieur de D,
Soient

- $x_0 = a, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- $y_0 = c, \ldots, y_j, \ldots, y_m = d$ une subdivision de $[c, d]$ avec $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$
- $r_{ij} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$ et (r_{ijk}) une subdivision de D en rectangles élémentaires

Alors l'intégrale f sur D est définie par :

$$I(f) = \iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty \\ r_{ij} \in D}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j \tag{1.1}$$

1.1.2 Propriétés

Elles découlent de celles de l'intégrale simple :

- $I(f + g) = I(f) + I(g)$
- $I(\lambda f) = \lambda I(f)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Si $f \geq 0$, alors $I(f) \geq 0$
- Si $D_1 \cup D_2 = D$ et si le volume $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ alors

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy \tag{1.2}$$

1.1.3 Calcul

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right\} dx \tag{1.3}$$

On aura si $f = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} [F(y_2(x)) - F(y_1(x))]dx \tag{1.4}$$

Il suffit ensuite d'intégrer l'expression $F(y_2(x)) - F(y_1(x))$ par rapport à x. Soit G la primitive de $F(y_2(x)) - F(y_1(x))$ par rapport à x, on obtient finalement :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = G(x_2) - G(x_1) \tag{1.5}$$

Il est très important de ne pas mélanger l'ordre des intégrations : il faut toujours commencer par le domaine dont les bornes sont des fonctions des autres variables pour finir par le domaine qui ne dépend pas des autres. Si aucune des bornes n'est une fonction des autres variables alors l'ordre des intégration n'a aucune importance.

Il est à remarquer que si la fonction $f(x,y) = 1$, l'intégrale calculée représente la surface du domaine D :

$$\iint\limits_D dxdy = S_D \tag{1.6}$$

Cas particulier Soit D un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ inscrit dans le rectangle $[a,b] \times [c,d]$,

Soit F une fonction définie continue sur le domaine D, prolongée par zéro à l'extérieur de D, pouvant se mettre sous la forme $F(x,y) = f(x).g(y)$. Alors dans ce cas, si les bornes d'intégration ne sont pas interdépendantes, on a

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x).g(y)dy\right\} dx = \int_a^b f(x)dx. \int_c^d g(y)dy \tag{1.7}$$

1.1.4 Exemple

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left\{\int_0^{2x} xdy\right\} dx && (1.8)\\
&= \int_0^1 [xy]_0^{2x}\, dx && (1.9)\\
&= \int_0^1 2x^2 dx && (1.10)\\
&= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} && (1.11)
\end{aligned}$$

1.2 Changement de variables dans l'intégrale double

1.2.1 Cas général

Soit $\phi(u,v) = [x(u,v), y(u,v)]$ une application inversible de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Δ porte sur (u,v) et D porte sur (x,y).

On a $D = \phi(\Delta) \Leftrightarrow \Delta = \phi^{-1}(D)$.

On supposera en outre que les fonctions x et y admettent des dérivées partielles continues sur Δ.

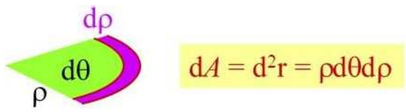
On définira le Jacobien de l'application ϕ par :

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial u} \tag{1.12}$$

Ce Jacobien ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application ϕ soit inversible. Alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta=\phi^{-1}(D)} f(\phi(u,v))|J(u,v)|dudv \tag{1.13}$$

1.2.2 Cas des coordonnées polaires



Ici $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$.
Le Jacobien vaut alors :

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

L'élément de surface en coordonnées polaires s'écrit donc :

$$dS = \rho d\rho d\theta \tag{1.14}$$

Si le problème présente une symétrie cylindrique - donc que la fonction à intégrer ne dépend pas de θ -, on pourra utiliser l'élément de surface déjà intégré pour $\theta \in [0, 2\pi]$ soit $dS = 2\pi\rho d\rho$. Alors :

$$\iint_\Delta F(\rho,z)dS = \int_\Delta F(\rho)2\pi\rho d\rho \tag{1.15}$$

Chapitre 2

Intégrales triples

2.1 Cas général

2.1.1 Définition

Soit D un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^3$ inscrit dans le parallélépipède $[a,b] \times [c,d] \times [e,h]$,
Soit f une fonction définie continue sur le domaine D, prolongée par zéro à l'extérieur de D,
Soient

- $x_0 = a, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ avec $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- $y_0 = c, \ldots, y_j, \ldots, y_m = d$ une subdivision de $[c,d]$ avec $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$
- $z_0 = e, \ldots, z_k, \ldots, z_p = h$ une subdivision de $[e,h]$ avec $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$
- $p_{ijk} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}] \times [z_k, z_{k-1}]$ et (p_{ijk}) une subdivision de D en parallélépipèdes élémentaires

Alors l'intégrale f sur D est définie par :

$$I(f) = \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \lim_{p_{ijk} \in D} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \tag{2.1}$$

2.1.2 Propriétés

Elles découlent de celles de l'intégrale simple :

- $I(f+g) = I(f) + I(g)$
- $I(\lambda f) = \lambda I(f)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Si $f \geq 0$, alors $I(f) \geq 0$
- Si $D_1 \cup D_2 = D$ et si le volume $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ alors

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)dxdydz \tag{2.2}$$

2.1.3 Calcul

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dy \right\} dx \tag{2.3}$$

On aura si $f = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y}$:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} [F(z_2(x,y)) - F(z_1(x,y))]dy \right\} dx \tag{2.4}$$

On intègre ensuite l'expression $F(z_2(x,y)) - F(z_1(x,y))$ à x constant. Soit G la primitive de $F(z_2(x,y)) - F(z_1(x,y))$ à x constant, on aura alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} [G(y_2(x)) - G(y_1(x))]dx \tag{2.5}$$

Il suffit ensuite d'intégrer l'expression $G(y_2(x)) - G(y_1(x))$ par rapport à x. Soit H la primitive de $G(y_2(x)) - G(y_1(x))$ par rapport à x, on obtient finalement :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = [H(x_2) - H(x_1)] \tag{2.6}$$

Il est très important de ne pas mélanger l'ordre des intégrations : il faut toujours commencer par le domaine dont les bornes sont des fonctions des autres variables pour finir par le domaine qui ne dépend pas des autres. Si aucune des bornes n'est une fonction des autres variables alors l'ordre des intégration n'a aucune importance.

Il est à remarquer que si la fonction $f(x,y,z) = 1$, l'intégrale calculée représente le volume du domaine D :

$$\iiint_D dxdydz = V_D \tag{2.7}$$

Cas particulier Soit D un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^3$ inscrit dans le parallélépipède $[a,b] \times [c,d] \times [e,h]$,

Soit F une fonction définie continue sur le domaine D, prolongée par zéro à l'extérieur de D, pouvant se mettre sous la forme $F(x,y,z) = f(x).g(y).h(z)$. Alors dans ce cas, si les bornes d'intégration ne sont pas interdépendantes, on a

$$\iiint_D F(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left\{ \int_e^h f(x).g(y).h(z)dz \right\} dy \right\} dx = \int_a^b f(x)dx. \int_c^d g(y)dy. \int_e^h h(z)dz \tag{2.8}$$

2.1.4 Exemple

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} dz \right\} dy \right\} dx && (2.9) \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (1-x-y)dy \right\} dx && (2.10) \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_0^{1-x} dx && (2.11) \\
&= \left[-\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} && (2.12)
\end{aligned}$$

2.2 Changement de variables dans l'intégrale triple

2.2.1 Cas général

Soit $\phi(u,v,w) = [x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]$ une application inversible de $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ sur $D \subset \mathbb{R}^3$. Δ porte sur (u,v,w) et D porte sur (x,y,z).

On a $D = \phi(\Delta) \Leftrightarrow \Delta = \phi^{-1}(D)$.

On supposera en outre que les fonctions x, y et z admettent des dérivées partielles continues sur Δ.

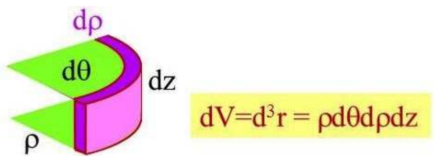
On définira le Jacobien de l'application ϕ par :

$$J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Ce Jacobien ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application ϕ soit inversible. Alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Delta=\phi^{-1}(D)} f(\phi(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw \tag{2.14}$$

2.2.2 Cas des coordonnées cylindriques



Ici $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ et $z = z$.
Le Jacobien vaut alors :

$$J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

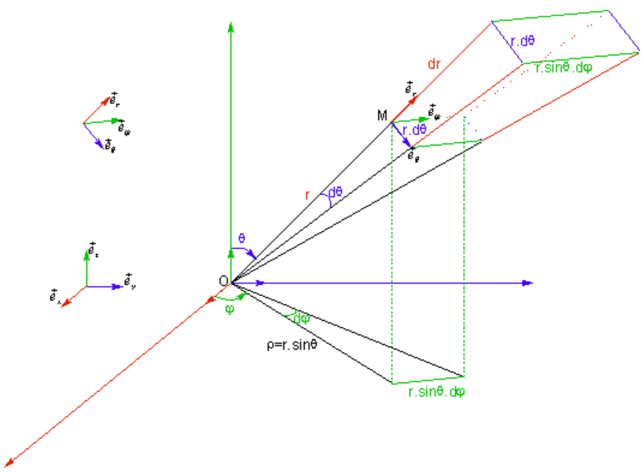
L'élément de volume en coordonnées cylindriques s'écrit donc :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz \tag{2.15}$$

Si le problème présente une symétrie cylindrique - donc que la fonction à intégrer ne dépend pas de θ -, on pourra utiliser l'élément de volume déjà intégré pour $\theta \in [0, 2\pi]$ soit $dV = 2\pi\rho d\rho dz$. Alors :

$$\iiint_\Delta F(\rho,z)dV = \iint_\Delta F(\rho,z)2\pi\rho d\rho dz \tag{2.16}$$

2.2.3 Cas des coordonnées sphériques



Ici $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = r\cos\theta$.
Le Jacobien vaut alors :

$$\begin{aligned} J &= J(u,v,w) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

L'élément de volume en coordonnées sphériques s'écrit donc :

$$dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{2.17}$$

Si le problème présente une symétrie sphérique - donc que la fonction à intégrer ne dépend ni de θ, ni de φ -, on pourra utiliser l'élément de volume déjà intégré pour $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$ soit $dV = 4\pi r^2 dr$. Alors :

$$\iiint_{\Delta} F(r) dV = \int_{\Delta} F(r) 4\pi r^2 dr \tag{2.18}$$