RÉSOUDRE UN EXERCICE D'INDUCTION

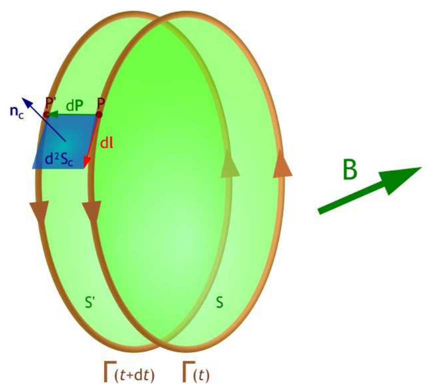
Nicolas CHIREUX

La résolution d'un exercice d'induction doit suivre un certain nombre d'étapes imposées. Ces étapes vont suivre l'établissement du phénomène physique étudié.

1 Analyse du problème et calcul du flux

Il faut déterminer le type de problème d'induction qui est à traiter afin que savoir quelle est la cause du phénomène d'induction.

1.1 Cas de Lorentz

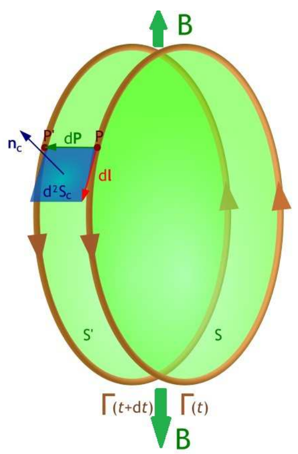


Il s'agit ici du cas d'un circuit mobile (ou déformable, c'est pareil) dans un champ magnétique $\vec{B}$ permanent. Attention, le champ magnétique $\vec{B}$ n'est pas forcément uniforme même si ce sera le cas dans la majorité des exercices.

Le circuit (Γ) sera orienté de manière à ce que le vecteur surface $\vec{dS}$ soit de même sens que le champ $\vec{B}$. Cette orientation du circuit donnera aussi le sens de l'intensité parcourant le circuit.

On calculera ensuite le flux de $\vec{B}$ à travers (Γ) par

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS} \tag{1}$$



Dans certains exercices, le circuit mobile (ou déformable) se déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$ permanent tel qu'à tout instant $\vec{dS} \perp \vec{B}$. Nous ne pourrons plus travailler avec le flux tel que calculé précédemment puisqu'il est nul à tout instant.

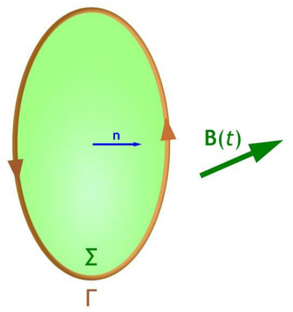
Nous considèrerons à la place le flux à travers la surface engendrée par le déplacement du circuit (surface en bleu sur le schéma ci-contre). On parlera de **flux coupé**.

On calculera alors le flux coupé par (Γ) à travers la zone où règne le champ $\vec{B}$ par

$$\phi_c = \iint_{(S_c)} \vec{B}.\overrightarrow{d^2S_c} = \iint_{(S_c)} \vec{B}.(\vec{dr} \wedge \vec{dl}) \tag{2}$$

$\vec{dr}$ est colinéaire au déplacement de (Γ) et $\vec{dl}$ est porté par le circuit et orienté dans son sens d'orientation.

1.2 Cas de Neumann



Il s'agit ici du cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique $\vec{B}$ variable.

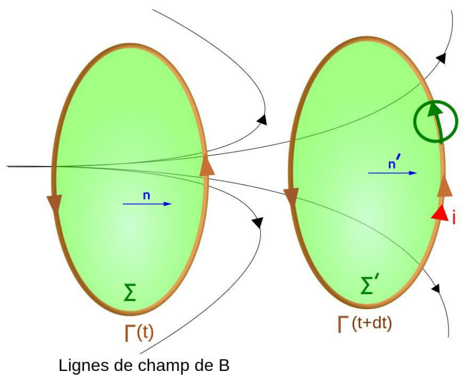
Le circuit (Γ) sera orienté de manière à ce que le vecteur surface $\vec{dS}$ soit de même sens que le champ $\vec{B}$. Cette orientation du circuit donnera aussi le sens de l'intensité parcourant le circuit.

On calculera ensuite le flux de $\vec{B}$ à travers (Γ) par

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS} \tag{3}$$

2 Aspect électrique de l'induction

2.1 Calcul de la fem induite



Que nous soyons dans le cas de Lorentz ou de Neumann, l'existence d'un flux ϕ ou d'un flux coupé dépendants du temps va causer l'apparition d'une fem induite e que l'on calculera par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \tag{4}$$

L'apparition de e induit l'apparition d'un courant i induit dans le circuit. Notez que e et i sont dans le même sens que le sens choisi pour orienter le circuit (Γ)

Rem : si le circuit n'est pas linéique mais volumique, les courants volumiques induits s'appellent **courants de Foucault**

2.2 Équation électrique (EE)

L'équation électrique s'obtient en modélisant le circuit (Γ) étudié par :

- si on ne tient pas compte de l'auto-induction : une source de tension e en série avec une résistance R représentant la résistance du circuit (Γ)
- si on tient compte de l'auto-induction : une source de tension e en série avec une résistance R représentant la résistance du circuit (Γ) et une auto-inductance L représentant l'auto-inductance du circuit (Γ)

L'équation électrique se trouve alors en appliquant les lois de l'électricité au circuit électrique équivalent.

Par exemple, si E représentent les sources de tension du circuit électrique, Rc ses résistances, l'équation électrique sera :

$$(EE) : \quad E + e = (R + R_c)i + L\frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad E + e = (R + R_c)i \ \text{ sans autoinduction} \tag{5}$$

3 Aspect mécanique de l'induction

3.1 Calcul de la force de Laplace

Selon la loi de Lenz, le courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui ont donné naissance. C'est par le biais de la force de Laplace que ce phénomène de modération se produit.

En effet, un circuit (Γ) parcouru par un courant i, placé dans $\vec{B}$ va subir une force de Laplace qui vaut :

$$\vec{F_L} = \int_{(\Gamma)} i\vec{dl} \wedge \vec{B} \quad \text{cas linéique} \tag{6}$$

$$\vec{F_L} = \iiint_{(V)} \vec{j}(P) \wedge \vec{B} d\tau \quad \text{cas volumique} \tag{7}$$

Il faut alors vérifier que la force de Laplace calculée s'oppose bien aux causes de l'apparition de i (opposition au mouvement dans le cas de Lorentz par exemple).

3.2 Équation mécanique (EM)

La suite d'un problème d'induction se traite comme un problème de mécanique classique. Il suffit d'ajouter dans le bilan des forces la force de Laplace calculée précédemment.

Si nous avons un mouvement de rotation, c'est le moment de la force de Laplace qu'il faudra calculer. Ce calcul est souvent assez compliqué mais il peut-être évité assez souvent.

En effet **si le circuit** (Γ) **est rigide et placé dans un champ permanent**, nous pourrons le représenter par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = i.\vec{S}$ où i est le courant induit. Le moment subi par le circuit sera alors :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \tag{8}$$

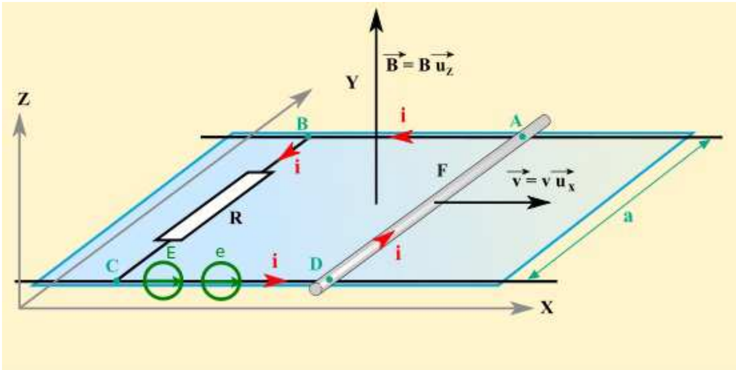
4 Aspect énergétique de l'induction

Les circuits étudiés dans les phénomènes d'induction sont des transducteurs électromécaniques réversibles. Ils vont convertir :

- de l'énergie mécanique (potentielle ou cinétique) en énergie électrique comme dans les alternateurs
- de l'énergie électrique en énergie mécanique (potentielle ou cinétique) comme dans les moteurs électriques ou les haut-parleurs.

On obtient le bilan en multipliant l'équation électrique par i et en l'additionnant à l'équation mécanique multipliée par la vitesse (ou la vitesse angulaire si le mouvement est un mouvement de rotation). Les termes liés au couplage inductif doivent s'annuler à savoir le terme en $e.i$ de l'$(EE).i$ et le terme en $\vec{F_L}.\vec{v}$ de l'$(EM).\vec{v}$.

5 Exemple des rails de Laplace



Soit une tige de résistance R, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ se déplaçant sur des rails conducteurs distants de a dans un champ $\vec{B} = B\vec{e_z}$.

Le circuit est alimenté par un générateur de fem E.

On néglige l'auto-induction.

Calcul du flux Nous sommes dans le cas de Lorentz. i est fléché comme ci-dessus afin que $\vec{dS} = dS\vec{e_z}$. Nous obtenons immédiatement que

$$\phi = \iint_{(ABCD)} \vec{B}.\vec{dS} = \iint_{(ABCD)} B\vec{e_z}.adx\vec{e_z} = aB(x_A - x_B) \tag{9}$$

Équation électrique La fem induite vaut d'après la loi de Faraday $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = -aB\dfrac{dx_A}{dt} = -aBv$.
L'équation électrique s'écrit alors en l'absence d'auto-induction :

$$(EE) : \; E + e = Ri \Leftrightarrow \quad E - aBv = Ri \tag{10}$$

Équation mécanique La force de Laplace s'exerçant sur la tige AD s'écrit :

$$\vec{F_L} = \int_D^A i\vec{dl} \wedge \vec{B} = \int_0^a idy\vec{e_y} \wedge B\vec{e_z} = iBa\vec{e_x} \tag{11}$$

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, le bilan des forces fait intervenir le poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$, la réaction des rails $\vec{R} = R\vec{e_z}$ et la force de Laplace $\vec{F_L} = iBa\vec{e_x}$. En projetant la deuxième loi de Newton sur l'axe des x, nous obtenons l'équation mécanique :

$$(EM) : \; m\frac{dv}{dt} = iaB \tag{12}$$

En remplaçant i par son expression, nous obtenons l'équation du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} = aB(\frac{E - aBv}{R}) \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{mR}v = \frac{aBE}{mR} \tag{13}$$

Aspect énergétique Calculons $(EE).i$ et $(EM).v$:

$$\begin{cases} Ei - iabv &= Ri^2 \\ mv\dfrac{dv}{dt} &= iaBv \end{cases}$$

Éliminons le terme de couplage $iaBv$ en calculant la différence entre les deux équations précédentes

$$Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 \tag{14}$$

Le premier terme est la puissance fournie par le générateur, le deuxième est la puissance stockée sous forme cinétique et le troisième la puissance dissipée par effet Joule. Il y a conversion d'énergie électrique en énergie cinétique mais avec pertes.

Avec auto-induction Le circuit présente maintenant une inductance L. Le calcul du flux ne change pas mais l'équation électrique devient alors :

$$(EE): \; E + e = Ri + L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \quad E - aBv = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{15}$$

L'équation mécanique ne change pas et est toujours

$$(EM): \; m\frac{dv}{dt} = iaB \tag{16}$$

En sortant i de l'équation mécanique et en l'injectant dans l'équation électrique, nous obtenons la nouvelle équation du mouvement :

$$E - aBv = \frac{mR}{aB}\frac{dv}{dt} + \frac{mL}{aB}\frac{d^2v}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{mL}v = \frac{aBE}{mL} \tag{17}$$

L'équation du mouvement est maintenant du deuxième degré en v. Tenir compte de l'auto-induction augmente d'une unité le degré de l'équation du mouvement.

Le bilan énergétique change aussi.Calculons $(EE).i$ et $(EM).v$:

$$\begin{cases} Ei - iabv &= Ri^2 + Li\dfrac{di}{dt} \\ mv\dfrac{dv}{dt} &= iaBv \end{cases}$$

Éliminons le terme de couplage $iaBv$ en calculant la différence entre les deux équations précédentes

$$Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 \tag{18}$$

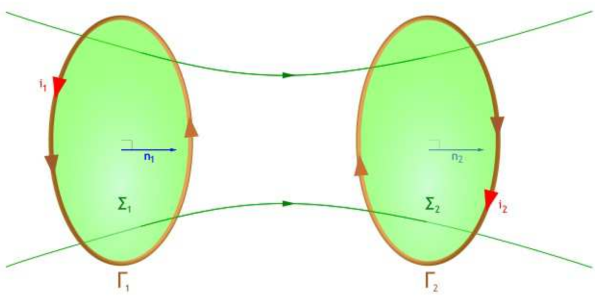
Le premier terme est la puissance fournie par le générateur, le deuxième est la puissance stockée sous forme cinétique, le troisième la puissance stockée sous forme magnétique et le quatrième la puissance dissipée par effet Joule. L'énergie fournie pour le générateur se retrouve maintenant sous forme d'énergie cinétique et d'énergie magnétique : une partie est perdue car dissipée par la résistance du circuit.

6 Coefficients d'induction

6.1 Inductance propre

Le champ propre d'un circuit est le champ magnétique qu'il créerait s'il était seul - en l'absence des autres circuits -.

Le flux propre est le flux du champ propre à travers le circuit lui-même.



Comme le champ propre est proportionnel à l'intensité parcourant le circuit, le flux propre l'est aussi. Nous pouvons donc définir les coefficients d'autoinductance de la manière suivante :

$$\phi_{11} = \iint_{\Gamma_1} \vec{B_1}.d\vec{S_1} = L_1 i_1 \tag{19}$$

$$\phi_{22} = \iint_{\Gamma_2} \vec{B_2}.d\vec{S_2} = L_2 i_2 \tag{20}$$

FIGURE 1 – Circuits couplés

On a $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$.

6.2 Inductance mutuelle

Avec les conventions de la figure 6.1, nous pouvons définir les flux croisés comme étant les flux d'un des champ magnétique à travers un autre circuit que lui-même. Nous aurons donc :

$$\phi_{12} = \iint_{\Gamma_2} \vec{B_1}.d\vec{S_2} \tag{21}$$

$$\phi_{21} = \iint_{\Gamma_1} \vec{B_2}.d\vec{S_1} \tag{22}$$

Comme le champ magnétique créé par le circuit Γ_1 est proportionnel à i_1, ϕ_{12} sera aussi proportionnel à i_1. De même le champ magnétique créé par le circuit Γ_2 est proportionnel à i_2, ϕ_{21} sera aussi proportionnel à i_2. On pourra donc définir la mutuelle inductance de la manière suivante :

$$\phi_{12} = \iint_{\Gamma_2} \vec{B_1}.d\vec{S_2} = M_{12} i_1 \tag{23}$$

$$\phi_{21} = \iint_{\Gamma_1} \vec{B_2}.d\vec{S_1} = M_{21} i_2 \tag{24}$$

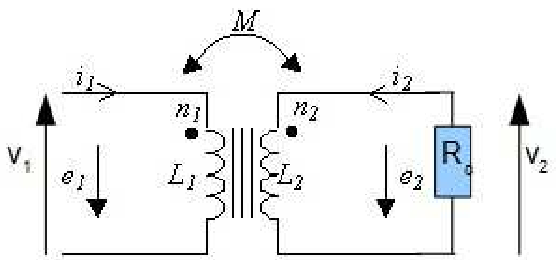
On montre que :

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{25}$$

Contrairement aux coefficients d'autoinductance qui sont forcément positifs, **le signe de la mutuelle inductance dépend des orientations respectives des courants dans les deux circuits Γ_1 et Γ_1**

7 Transformateurs

On s'intéresse ici au transformateur suivant :



Le circuit primaire de n_1 spires, de résistance R_1, est parcouru par un courant i_1.
Le circuit secondaire de n_2 spires, de résistance R_2, est parcouru par un courant i_2.
Comme le transformateur est considéré comme parfait, on aura $R_1 = R_2 = 0$.
On a :

$$\begin{cases} v_1 = -e_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = -e_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} = -R_c i_2 \end{cases} \tag{26}$$

En régime sinusoïdal de pulsation ω :

$$\begin{cases} \underline{v_1} = jL_1\omega \underline{i_1} + jM\omega \underline{i_2} \\ \underline{v_2} = jL_2\omega \underline{i_2} + jM\omega \underline{i_1} = -R_c \underline{i_2} \end{cases} \tag{27}$$

7.1 Transformateur de tension

On se place ici dans le cas où $R_c = +\infty$ soit $\underline{i_2} = 0$.

Le système ci-dessus donne immédiatement que $\dfrac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}} = \dfrac{M}{L_1}$. Or on peut montrer en exercices que $M \propto N_1 N_2$ et que $L_1 \propto N_1^2$. Alors

$$\frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}} = \frac{N_2}{N_1} \tag{28}$$

<u>Rem :</u> un transformateur de tension permet d'élever ou d'abaisser la tension suivant les nombres de spires respectifs des circuits primaire et secondaire.

7.2 Transformateur de courant

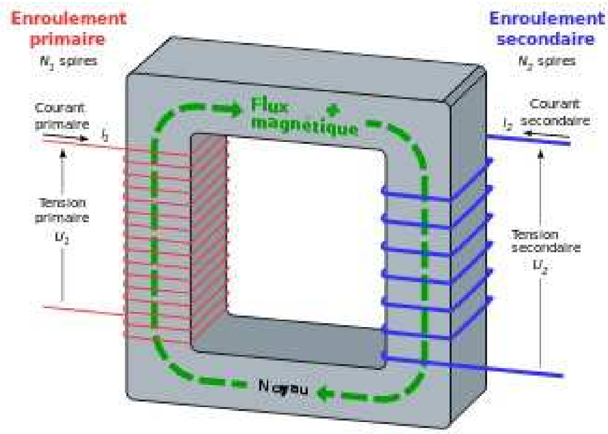
On se place ici dans le cas où $R_c = 0$ soit $\underline{v_2} = 0$.

Le système ci-dessus donne immédiatement que $\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = -\dfrac{M}{L_2}$. Or on peut montrer en exercices que $M \propto N_1 N_2$ et que $L_2 \propto N_2^2$. Alors

$$\frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{29}$$

Rem : un transformateur de courant permet d'élever ou d'abaisser le courant suivant les nombres de spires respectifs des circuits primaire et secondaire. C'est utilisé dans les pinces ampèremétriques.

7.3 Transformateur réel



Dans un transformateur réel, pour gagner en rendement, les lignes de champ magnétique sont canalisées par un noyau de fer.

Le problème est que dans un conduction massif, des courants de Foucault prennent naissance entrainant une dissipation d'énergie qui sont une des composantes de ce qu'on appelle les **pertes fer**. Afin de limiter ce phénomène, on feuilletera le noyau comme illustré ci-dessous.