

Chapitre 1

ANALYSE VECTORIELLE

ANALYSE VECTORIELLE

Nicolas CHIREUX

9 octobre 2017

ANALYSE VECTORIELLE

Soient U et V deux champs scalaires et \vec{a} et \vec{b} deux champs vectoriels.

Attention l'équivalence des formules avec celles données avec la notation $\vec{\nabla}$ n'est rigoureuse qu'avec le système de coordonnées cartésiennes. Dans les autres cas, c'est juste une facilité de notation tolérée.

1.1 Formules portant sur un seul champ

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = \vec{\nabla}^2 U$ soit $\text{div}(\vec{\text{grad}} U) = \Delta U$
2. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$ soit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} U) = \vec{0}$
3. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{0}$ soit $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{a}) = \vec{0}$
4. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a}$ soit $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{a}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

1.2 Formules portant sur deux champs

1. $\vec{\nabla}(UV) = V\vec{\nabla}(U) + U\vec{\nabla}(V)$ soit $\vec{\text{grad}}(UV) = V\vec{\text{grad}}U + U\vec{\text{grad}}V$
2. $\vec{\nabla} \cdot (U\vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} U) + U(\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$ soit $\text{div}(U\vec{a}) = \vec{\text{grad}}U \cdot \vec{a} + U\text{div}\vec{a}$
3. $\vec{\nabla} \wedge (U\vec{a}) = (\vec{\nabla} U) \wedge \vec{a} + U(\vec{\nabla} \wedge \vec{a})$ soit $\vec{\text{rot}}(U\vec{a}) = \vec{\text{grad}}U \wedge \vec{a} + U\vec{\text{rot}}\vec{a}$
4. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$ soit $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\text{rot}}\vec{b}$
5. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$
soit $\vec{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\text{div}\vec{b})\vec{a} - (\text{div}\vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{b}$
6. $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$
soit $\vec{\text{grad}}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\vec{\text{rot}}\vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\text{rot}}\vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{b}$

1.3 Expressions des opérateurs dans divers systèmes de coordonnées

1.3.1 Gradient

- * cartésiennes : $\vec{\text{grad}}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{e}_z$
- * cylindriques : $\vec{\text{grad}}U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{e}_z$
- * sphériques : $\vec{\text{grad}}U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$

1.3.2 Divergence

- * cartésiennes : $\text{div}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$
- * cylindriques : $\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$. Si $\vec{a} = a_r(r)\vec{e}_r$ alors $\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{d r a_r}{d r}\right)$
- * sphériques : $\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\theta \sin\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right)$. Si $\vec{a} = a_r(r)\vec{e}_r$ alors $\text{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d r^2 a_r}{d r}\right)$

1.3.3 Rotationnel

* cartésiennes : $\vec{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

* cylindriques : $\vec{rot} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

* sphériques : $\vec{rot} \vec{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$

1.3.4 Laplacien

* cartésiennes : $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$

* cylindriques : $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$. Si $U = U(r)$ alors $\Delta U = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \left(\frac{dU}{dr} \right) \right)$

* sphériques : $\Delta U = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right)$.

Si $U = U(r)$ alors $\Delta U = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} r^2 \left(\frac{dU}{dr} \right) \right)$

1.4 Action des opérateurs sur le trièdre de base

1.4.1 Coordonnées cylindriques

Rotationnel

$$\vec{rot} \vec{e}_r = \vec{0} \quad \vec{rot} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_z}{r} \quad \vec{rot} \vec{e}_z = \vec{0}$$

Divergence

$$\text{div} \vec{e}_r = \frac{1}{r} \quad \text{div} \vec{e}_\theta = 0 \quad \text{div} \vec{e}_z = 0$$

1.4.2 Coordonnées sphériques

Rotationnel

$$\vec{rot} \vec{e}_r = \vec{0} \quad \vec{rot} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \quad \vec{rot} \vec{e}_\varphi = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_r - \frac{\vec{e}_\theta}{r}$$

Divergence

$$\text{div} \vec{e}_r = \frac{2}{r} \quad \text{div} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r \tan \theta} \quad \text{div} \vec{e}_\varphi = 0$$