

Épreuve de TIPE – Partie D

Titre : Reconstruction de la vitesse d'un fluide par tomographie vectorielle

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

Guide pour le candidat

Le dossier ci-joint comporte 12 pages.

Travail suggéré au candidat : Faire une synthèse du document. On s'attachera, en particulier, à mettre en évidence les caractéristiques communes et les principales différences entre la tomographie classique par rayons X (scanner médical) et la tomographie vectorielle.

Conseils généraux pour la préparation de l'épreuve :

- Lisez le dossier en entier en un temps raisonnable.
- Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

1 Tomographie Médicale

La tomographie, du grec *tomos* “coupe”, est une technique d’imagerie bien connue dans le monde de la santé. Elle permet de produire la reconstruction d’une coupe du corps humain, et donc de visualiser les organes selon un plan de coupe. Cette reconstruction s’opère à partir de mesures d’atténuation de rayons X qui traversent le patient suivant des droites de ce plan. Mathématiquement, le problème à résoudre est celui de l’identification d’une fonction du plan (de coupe) connaissant l’intégrale sur les droites du plan (en pratique, on ne connaît qu’un nombre fini de mesures, c’est à dire, l’atténuation sur un échantillon des droites du plan). Ce procédé d’imagerie est plus connu sous le nom de scanner médical. Un scanner se présente sous la forme d’un tube ou un anneau dans lequel on positionne le patient : un générateur de rayons-X et une couronne de détecteurs tournent alors autour du patient afin de mesurer l’atténuation des rayons-X suivant de nombreuses droites d’un plan. Ses principaux inventeurs, Cormack et Hounsfield, furent couronnés à la fin des années 70 par le prix Nobel de Médecine. Le principe de fonctionnement d’un scanner est basé sur l’atténuation des rayons X lorsqu’ils traversent de la matière. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un point du plan, notons $f(x)$ la fonction d’atténuation caractéristique de la matière traversée par des rayons X. Nous supposons que le support de cette fonction est borné et contenu dans le disque unité noté Ω : c’est le cas de toute section d’un individu ! En pratique on normalise le problème en choisissant comme unité une grandeur légèrement supérieure au demi-diamètre de la section d’un individu. L’axe de rotation du scanner passe par O , le centre du disque. Deux vecteurs canoniques e_1, e_2 sont choisis pour former un repère unitaire direct (O, e_1, e_2) , (voir les figures 1, 2 et 3). Supposons qu’un faisceau de rayons X traverse cette matière d’un point x_s , la source, à un point x_d , le détecteur, x_s et x_d étant sur le cercle unité. Soit I_s l’intensité du rayonnement émise par la source, I_d l’intensité mesurée sur le détecteur, en faisant l’hypothèse que le rayonnement est monochromatique et que l’atténuation dans l’air est négligeable, on peut modéliser l’atténuation de l’intensité par la lois de Lambert Beer :

$$I_d = I_s e^{-\int_{x_s}^{x_d} f(x) dx}.$$

Plus précisément (voir la figure 1), notons $\theta^\perp = (-\sin \phi, \cos \phi)^t$ le vecteur directeur de la droite (x_s, x_d) , $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)^t$ et notons s l’abscisse de x_s (ou de x_d) sur l’axe (O, θ) , c’est à dire $s = x_s \cdot \theta$ où $y \cdot z = \sum_{j=1}^n y_j z_j$ désigne le produit scalaire Euclidien de deux vecteurs y et z de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ (ici $n = 2$).

La droite (x_s, x_d) est l'ensemble des points $s\theta + t\theta^\perp, t \in \mathbb{R}$ et nous avons :

$$I_d = I_s e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt}.$$

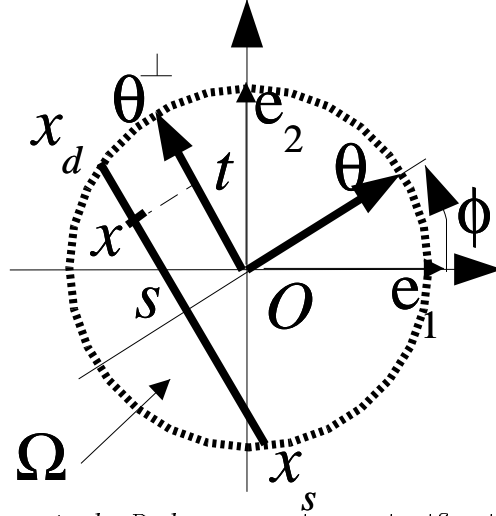


FIG. 1 – *transformée de Radon : notations, signification géométrique des variables et paramètres*

Connaissant I_s et mesurant I_d , nous pouvons former le rapport $-\ln\left(\frac{I_d}{I_s}\right)$ qui dépend linéairement de f . Ainsi, en considérant l'atténuation suivant toutes les droites du plan, c'est à dire suivant tous les ensembles $L_{\phi,s} = \{x \in \mathbb{R}^2, x \cdot \theta = s\}$, $\forall s \in \mathbb{R}, \forall \phi \in [0, 2\pi[$, (θ est une fonction de ϕ), nous pouvons définir la transformée de Radon de f :

$$\mathcal{R}f(\phi, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \left[= -\ln\left(\frac{I_d}{I_s}\right) \right].$$

Dans les scanners médicaux de la première génération, on utilisait un échantillonnage parallèle de l'ensemble des droites du plan (voir la figure 2). L'échantillonnage parallèle est réalisé par la translation régulière d'un système composé d'une source de rayons X et d'un monodétecteur (échantillonnage en s), suivant plusieurs positions angulaires ϕ équiréparties sur $[0, \pi[$ (échantillonnage en ϕ). Dans un scanner médical moderne, on utilise un

échantillonnage régulier de l'ensemble des droites du plan suivant une géométrie en éventail (voir la figure 3). Pour réaliser cet échantillonnage, on dispose un ensemble de détecteurs suivant l'arc du cercle unitaire et face à cet éventail de détecteurs on dispose la source. Puis, on fait tourner cet ensemble autour du patient. Ainsi, on réalise un échantillonnage de l'ensemble des droites du plan d'autant plus riche que le nombre de détecteurs suivant l'arc de cercle et que le nombre de positions angulaires autour du patient sont grands.

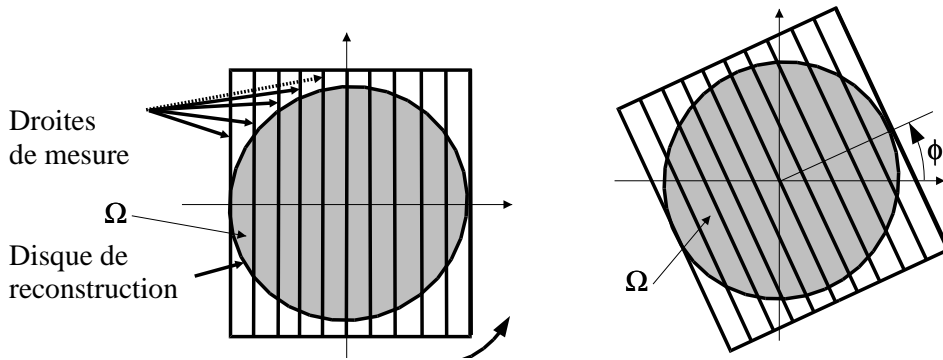


FIG. 2 – Première géométrie d'acquisition parallèle dans un scanner médicale : nous représentons les droites d'intégration pour deux positions angulaires du système de mesure (gauche et droite).

Le problème mathématique à résoudre est alors celui de l'inversion de \mathcal{R} : en effet, connaissant $\mathcal{R}f$, on souhaite estimer f . Pour cela nous disposons d'un premier théorème qui établit le lien entre la transformée de Fourier de la transformée de Radon $\mathcal{R}f$ et la transformée de Fourier de la fonction f : il s'agit du théorème de "coupe projection". Pour le formuler, nous utilisons la définition suivante de la transformée de Fourier d'une fonction $h(x)$ intégrable sur \mathbb{R}^n ($x \in \mathbb{R}^n$),

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

et la transformée de Fourier inverse (pour f suffisamment régulière)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ désigne l'élément de volume dans \mathbb{R}^n (idem pour $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$). Par ailleurs, la transformée de Fourier de la transformée de Radon est définie par rapport à la variable scalaire (la seconde variable) à ϕ fixé :

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\phi, s) e^{-i\sigma s} ds$$

Théorème de coupe projection. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 ,

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\sigma\theta)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\phi, s) e^{-i\sigma s} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt e^{-i\sigma s} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) e^{-i\sigma s} dt ds, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vérifiée dès que f est une fonction intégrable. En introduisant le changement de variable $x = s\theta + t\theta^\perp$, c'est à dire en remplaçant le couple (s, t) par le couple (x_1, x_2) , nous obtenons

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\sigma\theta \cdot x} dx \quad (2)$$

En effet, le changement de variable étant une rotation, son Jacobien vaut 1 (valeur absolue du déterminant de matrice Jacobienne) et donc $dsdt = dx \stackrel{\text{def}}{=} dx_1 dx_2$. D'autre part $x = s\theta + t\theta^\perp \Rightarrow x \cdot \theta = s$. Nous obtenons le théorème par identification du second membre de (2) avec la définition de la transformée de Fourier (1). \square

Grâce au théorème de coupe projection, nous disposons d'algorithmes qui nous permettent d'inverser la transformée de Radon : pour chaque direction de projection θ , c'est à dire pour chaque angle ϕ , nous calculons la transformée de Fourier de $\mathcal{R}f(\phi, s)$ par rapport à s . Nous obtenons ainsi la transformée de Fourier de f suivant un échantillonnage polaire. Une première famille d'algorithmes consiste à interpoler la transformée de Fourier de f sur une grille cartésienne à partir d'une grille polaire pour le calcul d'une

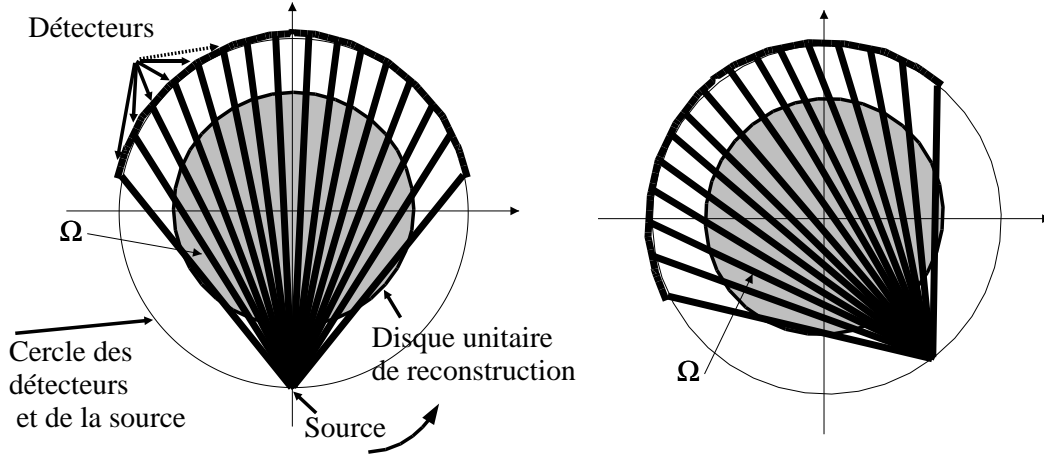


FIG. 3 – Les scanners modernes intègrent une géométrie en éventail.

transformée de Fourier discrète inverse rapide. En pratique, cette opération est délicate et coûteuse. Une alternative consiste à inverser la transformée de Fourier de f selon la démarche suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

On effectue le changement de variable polaire $\xi = \sigma \theta$ pour obtenir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\sigma \theta) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi,$$

soit, en utilisant le théorème de coupe-projection

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi. \quad (3)$$

En remarquant que θ est une fonction de ϕ et que $\theta(\phi + \pi) = -\theta(\phi)$, le lecteur vérifiera la relation de symétrie de la transformée de Radon $\mathcal{R}f(\phi + \pi, s) = \mathcal{R}f(\phi, -s)$. Cette relation entraîne que $\widehat{\mathcal{R}f}(\phi + \pi, \sigma) = \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, -\sigma)$. Le lecteur pourra alors vérifier sans peine que

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} (-\sigma) d\sigma d\phi.$$

L'équation (3) se transforme donc en

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma| d\sigma d\phi. \quad (4)$$

La discrétisation de cette dernière équation (4) est à la base des méthodes numériques généralement employées dans les scanners médicaux, connues sous le nom de “rétroprojection filtrée”.

2 Tomographie vectorielle

La tomographie vectorielle consiste à reconstruire un champ de vecteurs, par exemple un champ de vitesses, à partir des mesures de l’intégrale sur des droites du produit scalaire de ce champ de vecteurs avec une direction de test ω . Ce problème apparaît par exemple en océanographie, lorsqu’on cherche à mesurer la vitesse des courants marins avec des ultrasons. Nous allons considérer ce problème en dimension 2. Supposons que des émetteurs et des récepteurs d’ultrasons soient placés le long d’un cercle unitaire entourant un domaine (le disque unité) que nous souhaitons étudier. Notons $c(x)$ la célérité du milieu en x et $\mathbf{v}(x)$ la vitesse du fluide dans le plan contenant le cercle unité sur lequel nous déplaçons des sources et des détecteurs d’ultrason. Supposons qu’une source d’ultrason soit située en x_s et qu’un détecteur soit en x_d comme dans la figure 1, et supposons que l’onde ultrasonore se propage en ligne droite entre x_s et x_d (voir la figure 4), alors la vitesse de propagation en un point $x(t) = s\theta + t\theta^\perp$ de cette droite est donnée par $(c(x) + \mathbf{v}(x) \cdot \theta^\perp)\theta^\perp$ et donc le temps de propagation $T(x_s, x_d)$ de x_s à x_d est donné par

$$T(x_s, x_d) = \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(x(t)) + \mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp}.$$

Lorsqu’on inverse les rôles (le récepteur est placé en x_s et la source en x_d), la vitesse de propagation est donnée par $(c(x) - \mathbf{v}(x) \cdot \theta^\perp)(-\theta^\perp)$. Donc

$$T(x_d, x_s) = \int_{x_d}^{x_s} \frac{-dt}{c(x(t)) - \mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp} = \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(x(t)) - \mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp}.$$

Si nous faisons l’hypothèse que la célérité est très supérieure à la vitesse du fluide : $\forall x \in \Omega, |c(x)| \gg |\mathbf{v}(x)|$, alors nous avons

$$\frac{1}{c(x) \left(1 + \frac{\mathbf{v}(x)}{c(x)} \cdot \theta^\perp\right)} \approx \frac{1}{c(x)} \left(1 - \frac{\mathbf{v}(x)}{c(x)} \cdot \theta^\perp\right)$$

et donc

$$T(x_s, x_d) \approx \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(x(t))} - \int_{x_s}^{x_d} \frac{\mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp}{c^2(x(t))} dt$$

et

$$T(x_d, x_s) \approx \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(x(t))} + \int_{x_s}^{x_d} \frac{\mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp}{c^2(x(t))} dt$$

Nous en déduisons

$$T(x_s, x_d) + T(x_d, x_s) \approx 2 \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(x(t))} \quad (5)$$

$$T(x_d, x_s) - T(x_s, x_d) \approx 2 \int_{x_s}^{x_d} \frac{\mathbf{v}(x(t)) \cdot \theta^\perp}{c^2(x(t))} dt. \quad (6)$$

25 Introduisons maintenant la notation $\mathbf{v}^c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}(x)}{c^2(x)}$ et considérons la définition suivante :

Définition. On appelle transformée de Radon vectorielle dans la direction ω l'opérateur \mathcal{R}^ω défini par :

$$\mathcal{R}^\omega(\mathbf{u})(\phi, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(s\theta + t\theta^\perp) \cdot \omega dt,$$

pour tout vecteur ω (dépendant éventuellement de ϕ ou de s) et tout champ de vecteurs \mathbf{u} .

La transformée de Radon vectorielle de direction θ^\perp qui apparaît dans (6) est appelée transformée de Radon vectorielle longitudinale. Nous pouvons réécrire maintenant les équations (5) et (6) sous la forme

$$T(x_s, x_d) + T(x_d, x_s) \approx 2 \int_{x_s}^{x_d} \frac{dt}{c(s\theta + t\theta^\perp)} = \mathcal{R}(1/c)(\phi, s) \quad (7)$$

$$T(x_d, x_s) - T(x_s, x_d) \approx 2 \int_{x_s}^{x_d} \mathbf{v}^c(s\theta + t\theta^\perp) \cdot \theta^\perp dt = \mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c(\phi, s) \quad (8)$$

30 Clairement, d'après la première partie, l'équation (7) permet d'estimer $1/c(x)$ donc $c(x)$. L'équation (8) permet-elle d'estimer \mathbf{v}^c (et donc \mathbf{v} connaissant c) ?

Pour répondre à cette question nous allons tout d'abord établir un théorème de coupe projection pour la transformation de Radon vectorielle longitudinale (8). Pour cela, nous définissons la transformée de Radon vectorielle $\mathcal{R}(\mathbf{u})$ d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}(x)$ par la transformée de Radon de chacune de ses composantes :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u})(\phi, s) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{R}\mathbf{u}_1(\phi, s), \mathcal{R}\mathbf{u}_2(\phi, s))^t.$$

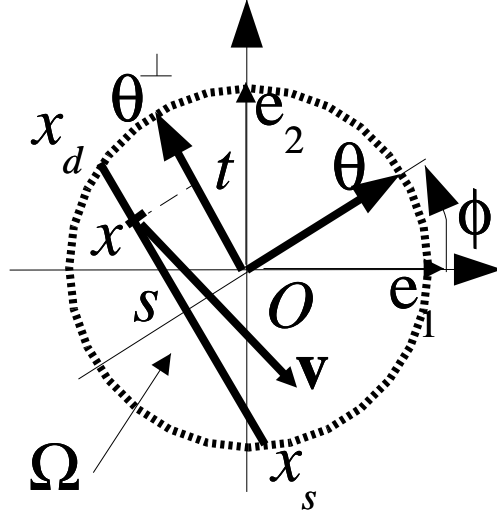


FIG. 4 – transformée de Radon vectorielle longitudinale : notations, signification géométrique des variables et paramètres

Ainsi, nous remarquons que

$$\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c(\phi, s) = \mathcal{R}(\mathbf{v}^c)(\phi, s) \cdot \theta^\perp$$

De même, nous définissons la transformée de Fourier d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}(x)$ par la transformée de Fourier de chacune de ses composantes :

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\mathbf{u}}_1(\xi), \widehat{\mathbf{u}}_2(\xi))^t.$$

En définissant la transformée de Fourier de $\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c(\phi, s)$ par rapport à la seconde variable (variable scalaire s , c'est à dire à ϕ fixé), nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c}(\phi, \sigma) &= \left(\widehat{\mathcal{R} \mathbf{v}^c}(\phi, \sigma) \right) \cdot \theta^\perp \\ &= \left(\widehat{\mathcal{R} \mathbf{v}_1^c}(\phi, \sigma), \widehat{\mathcal{R} \mathbf{v}_2^c}(\phi, \sigma) \right)^t \cdot \theta^\perp \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\widehat{\mathbf{v}_1^c}(\sigma\theta), \widehat{\mathbf{v}_2^c}(\sigma\theta) \right)^t \cdot \theta^\perp \end{aligned}$$

Et donc nous avons

$$\widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c}(\phi, \sigma) = \sqrt{2\pi} \left(\widehat{\mathbf{v}^c}(\sigma\theta) \right) \cdot \theta^\perp \quad (9)$$

Nous admettrons que le théorème d'Helmholtz de décomposition des champs de vecteurs (suffisamment réguliers) permet d'écrire que le champ \mathbf{v}^c dérive d'un potentiel scalaire $q(x)$ et d'un potentiel vecteur $w(x)e_3$ (où $e_3 = (0, 0, 1)^t$) sous la forme :

$$\mathbf{v}^c(x) = \nabla q(x) + \nabla \times w(x)e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial q}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_2}(x) \\ -\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Nous déduisons de (10) :

$$\widehat{\mathbf{v}}^c(\xi) = i \left(\hat{q}(\xi) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \hat{w}(\xi) \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc, avec $\xi = \sigma\theta$

$$\widehat{\mathbf{v}}^c(\sigma\theta) = i \left(\hat{q}(\sigma\theta)\sigma\theta - \hat{w}(\sigma\theta)\sigma\theta^\perp \right)$$

A partir de cette dernière équation et de (9), nous pouvons énoncer le théorème de coupe projection pour la transformée de Radon vectorielle longitudinale.

Théorème de coupe projection en tomographie vectorielle.

$$\widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c}(\phi, \sigma) = \sqrt{2\pi} \left(\widehat{\mathbf{v}}^c(\sigma\theta) \right) \cdot \theta^\perp = -i\sqrt{2\pi}\sigma\hat{w}(\sigma\theta).$$

Comme en tomographie médicale, le théorème de coupe projection de la
 35 tomographie vectorielle permet de fournir une formule d'inversion et donc
 une méthode de reconstruction d'un champ de vecteurs à partir de $\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{v}^c(\phi, s)$.
 Mais en tomographie vectorielle, seule la composante $\nabla \times w(x)e_3$ peut être
 reconstruite. En pratique, cette information peut-être très intéressante. En
 effet, dans certaines applications, on sait que $q(x) = 0$. Pour les autres,
 40 d'autres types de mesures sont nécessaires pour estimer $q(x)$ et donc \mathbf{v}^c .

Afin de définir plus précisément la méthode de reconstruction, le lecteur
 remarquera que la transformée de Radon vectorielle longitudinale possède
 une propriété de symétrie : pour tout champs de vecteurs \mathbf{u}

$$\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}(\phi + \pi, s) = -\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}(\phi, -s).$$

Pour l'établir, on remarquera que θ et θ^\perp sont des fonctions de ϕ : en parti-
 culier, $\theta(\phi + \pi) = -\theta(\phi)$ et $\theta^\perp(\phi + \pi) = -\theta^\perp(\phi)$. On en déduit facilement
 que

$$\widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}}(\phi + \pi, \sigma) = -\widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}}(\phi, -\sigma).$$

Notre objectif est d'obtenir une reconstruction de $\nabla \times we_3(x)$:

$$\begin{aligned}\nabla \times we_3(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\nabla \times we_3}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} i\hat{w}(\xi) \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix} e^{ix \cdot \xi} d\xi.\end{aligned}$$

Après un changement de variable en polaire, nous obtenons

$$\nabla \times we_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} -i\hat{w}(\sigma\theta)\sigma\theta^\perp e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi$$

Le théorème de coupe projection de tomographie vectorielle longitudinale nous permet d'écrire :

$$\nabla \times we_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp \mathbf{v}^c}}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma \theta^\perp d\sigma d\phi \quad (11)$$

Par ailleurs, avec le changement de variable $\psi = \phi + \pi$ et $u = -\sigma$ nous avons

$$\int_\pi^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp \mathbf{v}^c}}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma \theta^\perp d\sigma d\phi = \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp \mathbf{v}^c}}(\psi, u) e^{iu x \cdot \theta} |u| \theta^\perp du d\psi \quad (12)$$

Et donc en utilisant (12) dans (11) nous obtenons la formule de rétroprojection filtrée pour la transformée de Radon vectorielle longitudinale

$$\nabla \times we_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}^{\theta^\perp \mathbf{v}^c}}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma| \theta^\perp d\sigma d\phi. \quad (13)$$

3 Une application numérique

Les méthodes de reconstruction issues du théorème de coupe projection sont nécessairement discrétisées. Elles conduisent à des algorithmes que nous illustrons par une application numérique présentée dans la figure 5. L'algorithme est basé sur une discrétisation de (13). Cette modélisation numérique a été mise en place pour une application industrielle dans laquelle on cherche à reconstruire le champ des vecteurs vitesse $\mathbf{v}(x)$ d'un fluide dans la section d'un tuyau, dans un écoulement établi en régime permanent et qu'on suppose indépendant de x_3 (direction de l'axe du tuyau, perpendiculaire au plan de coupe considéré). La célérité du milieu homogène est supposée constante et q est supposé nul pour des raisons physiques.

Ces résultats permettent aussi d'estimer la possibilité d'utiliser la technique de tomographie vectorielle longitudinale pour la mesure de courants marins.

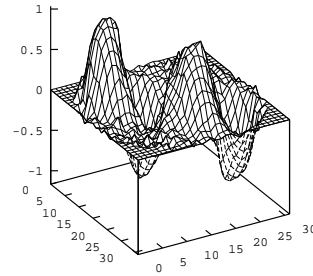
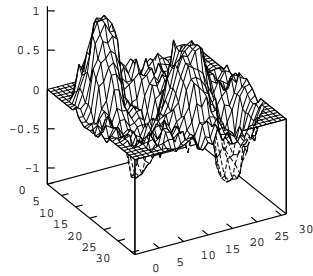
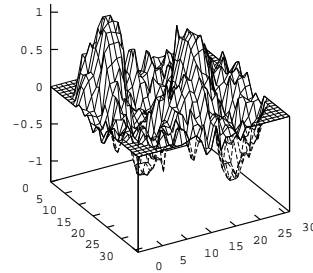
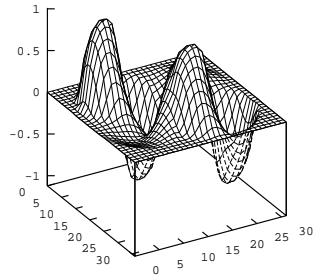


FIG. 5 – Une application numérique d'un algorithme issu du théorème de coupe projection pour la transformée de Radon vectorielle d'un champ de vecteurs. En haut à gauche est représenté la composante suivant e_1 d'un champ $\nabla \times w(x)e_3$. En haut à droite, nous présentons une reconstruction de la première composante de $\nabla \times w(x)e_3$ à partir de 14 projections (c'est à dire 14 positions angulaires ϕ) équiréparties sur $[0, \pi[$ et 8 translations (c'est à dire, 8 positions en s) équiréparties sur $] - 1, 1[$, soit un échantillonnage de $14 \cdot 8$ droites du plan. En bas à gauche, nous présentons une reconstruction à partir de 19 projections de 12 translations. En bas à droite, nous présentons une reconstruction à partir de 35 projections de 22 translations

Fiche à l'attention des examinateurs

Reconstruction de la vitesse d'un fluide par tomographie vectorielle

Auteur : Laurent Desbat

A Points essentiels

Nous attendons de l'étudiant qu'il présente les principales différences des
 60 deux types de tomographie envisagées : rayons X et ultrason ; atténuation
 et effet Doppler ; fonction d'atténuation et champ de vecteur ; on identifie
 complètement la fonction d'atténuation f alors qu'on n'identifie que la com-
 pensate solénoïdale du champ v ; symétrie de la TR et antisymétrie de la
 TRV. L'étudiant soulignera les similitudes : Même géométrie de mesures ;
 65 intégration sur des droites ; existence d'un théorème de coupe projection ;
 existence d'une formule de rétroprojection filtrée.

B Suggestion de questions

- Expliquez géométriquement les relations de symétrie de la transformée
 de Radon classique $\mathcal{R}f(\phi + \pi, s) = \mathcal{R}f(\phi, -s)$ et de la transformée de
 Radon vectorielle longitudinale $\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}(\phi + \pi, s) = -\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}(\phi, -s)$?
 70 **Réponse :** La droite $\{x, x \cdot \theta(\phi) = s\}$ est la même que $\{x, x \cdot \theta(\phi + \pi) =$
 $-s\}$ car $\theta(\phi + \pi) = -\theta(\phi)$, d'où la symétrie de la transformée de Ra-
 don classique. Pour la transformée de Radon vectorielle longitudinale,
 $\mathcal{R}^{\theta^\perp} \mathbf{u}(\phi, s) = \mathcal{R} \mathbf{u}(\phi, s) \cdot \theta^\perp$. Or $\mathcal{R} \mathbf{u}$ possède la même symétrie que $\mathcal{R}f$
 75 alors que $\theta^\perp(\phi + \pi) = -\theta^\perp(\phi)$ (le sens de parcours de l'onde sonore
 induit un signe sur l'effet Doppler).
- Commentez la figure 5
Réponse : L'algorithme de reconstruction fournit "bien" une estima-
 tion de $\nabla \times w(x)e_3$. La qualité de la reconstruction semble augmenter
 80 avec le nombre de points de mesures.
- A votre avis comment obtient-on un algorithme à partir de (4) ou de
 de (13) ?
Réponse : Par discrétisation des deux intégrales (par la formule des
 trapèzes). Bien entendu, l'erreur diminue avec le pas de discrétisation
 85 des intégrales qui est dépendant du nombre de points de mesures.
- Dans la démonstration du théorème de coupe projection, on dit que le
 changement de variable $x = s\theta + t\theta^\perp$ est une rotation : expliquez nous

cela.

- Expliquez le passage de (3) à (4)
- 90 - Expliquez comment on obtient l'équation (12) et son rôle pour l'obtention de (13).
- Quelles sont d'après vous les limites de cette méthode? Pensez vous qu'elle soit véritablement utilisable en pratique pour mesurer les courants marins (que faut-il vérifier)?